

УДК 532.526.2

МАНУЙЛОВИЧ С. В.

О ВОЗМУЩЕНИЯХ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ, ВЫЗВАННЫХ НЕРОВНОСТЯМИ ОБТЕКАЕМОГО ТЕЛА

Один из сценариев ламинарно-турбулентного перехода в пограничном слое заключается в возбуждении неустойчивых мод, пространственное нарастание которых вниз по потоку от места возникновения и вызывает разрушение ламинарного течения. На крыльях малой стреловидности переход к турбулентному режиму обусловлен неустойчивостью Толлмина – Шлихтинга, однако с увеличением угла стреловидности начинает доминировать неустойчивость другого типа, связанная с наличием в пограничном слое поперечного течения (перпендикулярного направлению внешнего потока) [1]. Этот тип неустойчивости был экспериментально обнаружен в [2] при исследовании аномально раннего перехода на стреловидном крыле: как показала визуализация, турбулизация потока инициировалась стационарными вихрями нарастающей интенсивности, направленными вдоль линий тока внешнего течения. В связи с этим становится актуальным исследование факторов, ответственных за возбуждение возмущений такого типа в пространственном пограничном слое. В данной работе изучается восприимчивость трехмерного течения в пограничном слое на скользящем крыле по отношению к периодическим неровностям обтекаемой поверхности.

1. Постановка задачи. Рассмотрим обтекание скользящего крыла равномерным потоком вязкой несжимаемой жидкости. Введем ортогональную систему координат с началом в точке O на поверхности крыла, абсциссой x , отсчитываемой вдоль обтекаемой поверхности в направлении, перпендикулярном образующей крыла, ординатой y – расстоянием по нормали к невозмущенной обтекаемой поверхности и осью z вдоль образующей. Все величины в дальнейшем будем считать безразмерными, используя в качестве основных единиц измерения плотность жидкости ρ , поперечную составляющую $U_{z\infty}$ вектора скорости набегающего потока и характерный масштаб длины $\delta = (\nu X / U_{z\infty})^{1/2}$ (ν – кинематический коэффициент вязкости, X – расстояние между точкой O и линией присоединения, отсчитываемое вдоль обтекаемой поверхности). Число Рейнольдса $R = U_{z\infty} \delta / \nu$ будем считать достаточно большим, чтобы к описанию основного течения в окрестности начала координат была применима концепция пограничного слоя. Будем также предполагать, что точка O расположена достаточно близко к линии присоединения, так что пограничный слой в окрестности этой точки существенно трехмерный ($U_x(y)$, $U_z(y)$ – профили продольной и поперечной скоростей).

Пусть стационарные возмущения основного течения вызваны неровностью поверхности крыла, периодической в поперечном направлении

$$y_w = \sigma f(x) \exp(i\beta z) \quad (1.1)$$

Здесь $\beta > 0$ – волновое число поперечной модуляции, $\sigma \ll 1$ – амплитуда неровности. Задачу расчета возмущений течения, вызванных неровностью (1.1), будем решать в предположении параллельности основного течения, поэтому функцию f , задающую продольное распределение амплитуды неровности, будем считать заметно отличной от нуля лишь в области $|x| \ll X$.

Возмущения компонент вектора скорости и давления обозначим $\sigma q(x, y) \exp(i\beta z)$ ($q = v_x, v_y, v_z, p$). Функции q удовлетворяют линейризо-

ванной системе уравнений Навье — Стокса. В соответствии с принятой моделью в уравнениях исходной линеаризованной системы будем отбрасывать члены, связанные с вертикальной компонентой скорости и продольными градиентами параметров невозмущенного потока. Кроме того, следуя [3], из полученной системы будем исключать и члены, младшие (при больших R) по сравнению с уже отброшенными, после чего в уравнениях импульса вдоль осей x и z останется лишь по одному диссипативному члену, а в уравнении импульса вдоль оси y эти члены вообще будут отсутствовать. В результате система примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + i\beta v_z &= 0 \\ U_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{dU_x}{dy} v_y + i\beta U_z v_x + \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{1}{R} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \\ U_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + i\beta U_z v_y + \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ U_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{dU_z}{dy} v_y + i\beta U_z v_z + i\beta p &= \frac{1}{R} \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Сформулируем краевые условия, которым должно удовлетворять решение полученной системы уравнений. Производя линеаризацию условий прилипания, записанных для стенки (1.1), получим

$$v_x(x, 0) = -f(x) \frac{dU_x}{dy}(0), \quad v_y(x, 0) = 0, \quad v_z(x, 0) = -f(x) \frac{dU_z}{dy}(0) \quad (1.3)$$

На решение системы (1.2) будем также налагать условия затухания: $q \rightarrow 0$ при $y \rightarrow \infty$ и вверх по потоку $x \rightarrow -\infty$.

Указанных краевых условий оказывается недостаточно для построения единственного решения системы (1.2). При замыкании задачи необходимо различать два основных случая: когда все стационарные моды с волновым числом β пространственно устойчивы, т. е. затухают вниз по потоку (случай 1); когда параметр β принадлежит области пространственной неустойчивости (случай 2).

Рассмотрим сначала случай 1, т. е. предположим, что $q \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$. Решение сформулированной задачи будем строить с помощью преобразования Фурье по переменной x

$$q = q_F = \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(k) q^*(y; k) \exp(ikx) dk \quad (1.4)$$

Здесь фурье-образы искоемых функций ради удобства нормированы на величину фурье-образа продольного распределения амплитуды неровности

$$f^* = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-ikx) dx$$

Коэффициенты системы уравнений в частных производных (1.2) зависят лишь от переменной y ; преобразование (1.4) позволяет свести ее к системе обыкновенных дифференциальных уравнений шестого порядка для фурье-амплитуд. Если не интересоваться возмущениями продольной и поперечной составляющих скорости, задача расчета фурье-гармоник может быть сведена к решению уравнения типа Орра — Зоммерфельда

(четвертого порядка) с неоднородными граничными условиями

$$V \left[\frac{d^2 v_y^*}{dy^2} - (k^2 + \beta^2) v_y^* \right] - \frac{d^2 V}{dy^2} v_y^* = \frac{1}{R} \frac{d^4 v_y^*}{dy^4} \quad (1.5)$$

$$v_y^*(0; k) = 0, \quad \frac{dv_y^*}{dy}(0; k) = \frac{dV}{dy}(0), \quad v_y^*(\infty; k) = 0$$

Здесь $V(y) = ikU_x + i\beta U_z$; первые два краевых условия следуют из линейризованных условий прилипания (1.3), последнее условие (1.5) является следствием затухания возмущений при $y \rightarrow \infty$: оно исключает из числа возможных решений уравнения (1.5) два экспоненциально растущих линейно независимых интеграла. Затухание возмущений при $|x| \rightarrow \infty$ обеспечивается самим применением преобразования (1.4) к решению сформулированной задачи.

Исследуем структуру возмущенного течения вниз по потоку от неровности. Анализ интеграла (1.4) для $x \gg 1$, основанный на аналитическом продолжении фурье-амплитуд в область комплексных k , полностью аналогичен случаю генерации волн Толлмина — Шлихтинга, рассмотренному в [4].

Функции q^* имеют полюс первого порядка в точке $k = \alpha_{CF}(\beta)$, соответствующей неустойчивой моде. В случае 1 (докритические β) этот полюс расположен в верхней полуплоскости вблизи действительной оси. Резкое изменение подынтегральной функции в окрестности полюса α_{CF} приводит к тому, что при $x \gg 1$ интеграл (1.4) имеет вид волны, определяемый вычетом подынтегрального выражения в точке α_{CF}

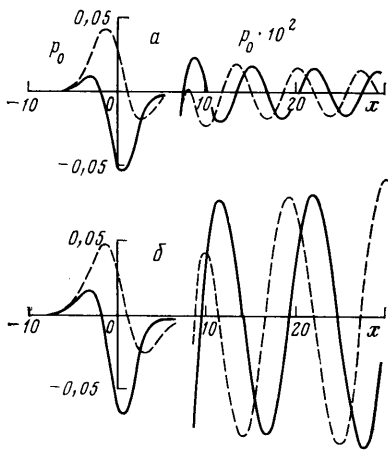
$$q_{CF} = 2\pi i f^*(\alpha_{CF}) \operatorname{res}_{k=\alpha_{CF}} q^*(y; k) \exp(i\alpha_{CF} x) \quad (1.6)$$

При приближении параметра β к области неустойчивости полюс α_{CF} приближается к действительной оси, поэтому декремент затухания волны (1.6) уменьшается и решение, определяемое интегралом (1.4), затухает при $x \rightarrow -\infty$ значительно быстрее, чем при $x \rightarrow +\infty$.

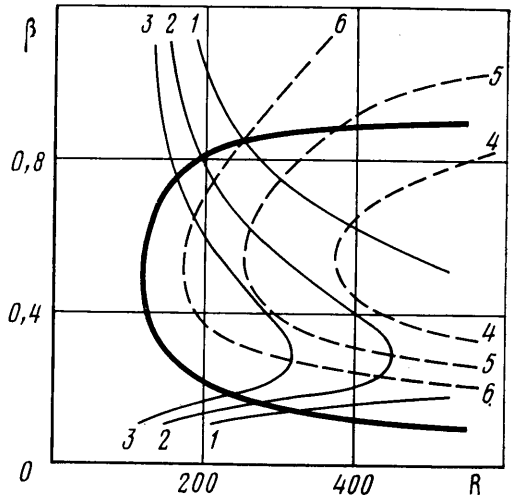
Интеграл Фурье всегда является затухающей при $|x| \rightarrow \infty$ функцией, поэтому при прохождении параметром β своего критического значения и вхождения его в область неустойчивых значений интеграл (1.4) меняется скачком [5]: при $x \rightarrow +\infty$ он становится быстро затухающим, а в направлении $x \rightarrow -\infty$, наоборот, затухает слабо и определяется вычетом в точке α_{CF} (1.6), взятым со знаком минус. Таким образом, решение поставленной задачи, построенное с помощью преобразования (1.4) для случая 2 (закритические β), противоречит физическому смыслу: оно описывает волну, приходящую из области $x < 0$ и гасящуюся неровностью, в то время как истинной картине возмущенного движения должна соответствовать генерация волны неустойчивости в окрестности неровности и распространение волны вниз по потоку.

Указанного противоречия можно избежать, если в случае 2 изменить математическую постановку задачи. Следуя [5], отбросим требование о затухании возмущений при $x \rightarrow +\infty$ и определим искомое решение задачи как сумму классического преобразования Фурье (1.4) и волны неустойчивости, определяемой выражением (1.6) $q = q_F + q_{CF}$. Полученная сумма действительно является решением сформулированной краевой задачи, поскольку функции (1.6) удовлетворяют системе (1.2) и однородным граничным условиям при $y = 0, \infty$. Одновременно сохраняется непрерывность изменения решения в зависимости от величины поперечного волнового числа β .

Приведенные выше соотношения решают поставленную задачу в случае как докритических, так и закритических β , а формула (1.6) дает единое выражение для генерируемой волны неустойчивости в случаях 1 и 2.



Фиг. 1



Фиг. 2

2. Результаты численного анализа. При построении численного решения сформулированной краевой задачи будем использовать в качестве параметров основного течения профили скорости пространственного пограничного слоя в окрестности линии присоединения на скользящем крыле [6]. Расстояние X между линией присоединения и местом локализации неровности выберем таким, чтобы продольное внешнее течение в окрестности неровности имело скорость, равную скорости скольжения $U_x(\infty) = U_z(\infty) = 1$ (что всегда можно сделать при достаточно малом угле стреловидности, поскольку вблизи линии присоединения продольная скорость внешнего течения растет с увеличением x по линейному закону $U_x(\infty) \sim 1 + xX^{-1}$).

Результаты расчета возмущенного движения проиллюстрируем на примере функции $p_0 = p(x, 0)$ для продольного распределения амплитуды неровности вида $f = f_0(x) = \exp(-ax^2)$, где $a \sim \lambda^{-2}$, λ — характерная длина волны неустойчивости в направлении x (функция f_0 становится исчезающе малой при $|x|$ порядка нескольких длин волн).

На основании результатов разд. 1 возмущенное давление на поверхности крыла как в до-, так и в закритическом случаях дается выражением

$$p_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_0^*(k) P(k) \exp(ikx) dk + \theta(-\text{Im } \alpha_{CF}) 2\pi i f_0^*(\alpha_{CF}) A_{CF} \exp(i\alpha_{CF} x) \quad (2.1)$$

$$f_0^* = \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} \exp\left(-\frac{k^2}{4a}\right), \quad P = \frac{1}{(k^2 + \beta^2)R} \frac{d^3 v_y^*}{dy^3}(0; k), \quad A_{CF} = \text{res } P_{k=\alpha_{CF}}$$

где $\theta(\xi)$ — функция Хевисайда, а A_{CF} — коэффициент порождения волны неустойчивости, определяющий наравне с геометрическим параметром f_0^* амплитуду и фазу генерируемой волны (1.6). В данной работе величины интеграла Фурье, продольного волнового числа α_{CF} и коэффициента порождения A_{CF} , входящие в формулу (2.1) для p_0 , вычислялись с помощью метода, развитого в [4] применительно к задаче о восприимчивости двумерного пограничного слоя к внешним нестационарным воздействиям (вибратор, периодический вдув-отсос, колебания температуры стенки).

На фиг. 1 показаны результаты расчета продольного распределения возмущенного давления в окрестности неровности. Значение постоянной $a = 0,2$ выбрано из условия равенства характерного продольного размера неровности половине длины волны неустойчивости $\lambda/2$: в этом случае амплитуда генерируемой волны наибольшая. Расчеты проведены при $R = 400$

для случаев до- и закритических поперечных волновых чисел (фиг. 1, $a \sim \beta=1,1$, $b-\beta=0,7$). Графики величин $\text{Re } p_0$ и $\text{Im } p_0$ изображены соответственно сплошными и штриховыми линиями.

Как показывают результаты вычислений, распределение давления при умеренных $|x|$ имеет вид, характерный для обтекания неровности идеальной несжимаемой жидкостью: давление возрастает над впадинами и уменьшается над выступами, причем амплитуда возмущений тем выше, чем больше длина волны поперечной модуляции. Вниз по потоку от неровности наблюдаются колебания давления, имеющие амплитуду примерно в 10^2 раз меньшую, чем амплитуда возмущений непосредственно над неровностью (на фиг. 1 правые части графиков приведены в увеличенном масштабе). Грубый количественный анализ поведения численного решения, построенного для случая 1 (когда возмущения представимы в виде интеграла Фурье (1.4); фиг. 1, a), показывает, что продольное волновое число генерируемых колебаний связано с поперечным волновым числом соотношением $\alpha \approx -0,8\beta$, т. е. возмущения вниз по потоку от неровности (1.1) действительно имеют вид вихрей, направление осей которых приблизительно совпадает с направлением внешнего течения.

Более детальное изучение колебаний давления при $x \gg 1$ указывает на то, что они имеют те же параметры, что и волна (1.6). Естественно, аналогичная картина наблюдается и в расчете, выполненном для случая 2 (фиг. 1, b), поскольку при построении решения для закритических β к интегралу Фурье (1.4) добавляется слагаемое в виде волны (1.6) (качественное различие состоит в том, что теперь возмущения течения растут при $x \rightarrow +\infty$). Вычисления, проведенные для этого случая в области, лежащей вверх по потоку от неровности, показывают, что решение быстро и монотонно затухает при $x \rightarrow -\infty$, т. е. ведет себя так же, как и интеграл Фурье (1.4) в случае 1.

Численный анализ возмущений вниз по потоку от неровности указывает также на значительное увеличение амплитуды колебаний при уменьшении величины поперечного волнового числа β (по крайней мере в рассматриваемом диапазоне изменения $\beta=0,7-1,1$). Эта закономерность связана с одновременным действием трех факторов. Во-первых, из второго равенства (2.1) следует, что при уменьшении β величина $|f_0^*(\alpha_{CF})|$ возрастает (поскольку $|\alpha_{CF}|$ убывает). Во-вторых, в рассматриваемом диапазоне с уменьшением β возрастает модуль коэффициента порождения $|A_{CF}|$. Это видно из результатов расчета коэффициента порождения A_{CF} , приведенных на фиг. 2 (вычисления произведены для фиксированных профилей скорости основного течения U_x, U_z , так что изменение числа R вызвано не изменением расстояния от неровности до линии растекания, а, например, изменением скорости набегающего потока). Сплошные линии 1-3 на фиг. 2 соответствуют значениям $|A_{CF}|$, равным $\{2,5; 3; 3,5\} \cdot 10^{-4}$, а штриховые линии 4-6 — значениям $\text{arg} A_{CF}$, равным $-1,4; -1,2; -1$; сплошной жирной линией отмечена нейтральная кривая. Оба описанных свойства приводят к возрастанию начальной (т. е. вычисленной в точке $x=0$) амплитуды волны (1.6) при уменьшении β . И наконец, в-третьих, при изменении β от 1,1 до 0,7 затухание волны (1.6) сменяется нарастанием, что также увеличивает амплитуду колебаний вниз по потоку от неровности.

Проведенный численный анализ выявляет одно принципиальное различие между процессами генерации волн Толлмина — Шлихтинга [4] и волн неустойчивости поперечного течения: если амплитуда волны Толлмина — Шлихтинга в месте своего возникновения имеет тот же порядок, что и полная амплитуда возмущения, то относительная амплитуда волны неустойчивости поперечного течения имеет порядок 10^{-2} . Это обстоятельство может существенно повлиять на методику предсказания ламинарно-турбулентного перехода на стреловидном крыле. Известные методы определения положения перехода либо основаны на анализе пространственного усиления неустойчивых мод [7] (путем принятия постулата о том, что от

нейтральной точки до точки перехода волна усиливается в e^n раз, где $n \sim 10$ — фиксированное число), либо учитывают также и начальную амплитуду волны неустойчивости [8] (в этом случае положение перехода определяется по достижении волной неустойчивости амплитуды $\sim 10^{-2}$). Последний метод, пригодный для предсказания положения перехода на прямом крыле (обусловленного неустойчивостью Толлмина — Шлихтинга), может оказаться неэффективным в случае стреловидного крыла: начиная с некоторой амплитуды неровности, турбулизация течения будет вызываться не нарастающей вниз по потоку волной неустойчивости поперечного течения, а амплитудой возмущения непосредственно над неровностью (большей, чем начальная амплитуда волны в $e^4 - e^5$ раз).

В заключение остановимся на вопросе о пределах применимости рассматриваемой постановки к расчету возмущений пространственного пограничного слоя. Выше указывалось, что рассматриваемая область течения ограничена условием $|x| \ll X$. В то же время численный анализ показывает (фиг. 1), что формирование волны неустойчивости завершается на расстоянии порядка длины волны вниз по потоку от неровности. Таким образом, условие адекватности рассматриваемой постановки сводится к неравенству $\lambda \ll X$. Поскольку $\lambda = 2\pi / \text{Re} \alpha_{CF} \sim 10/\beta$, а $X = R$ в выбранной системе единиц, неравенство приводится к виду $10\beta^{-1} \ll R$.

В области неустойчивости (см. фиг. 2) это условие выполняется с хорошей точностью и тем лучше, чем большие значения принимают параметры R и β .

ЛИТЕРАТУРА

1. Жигулев В. Н., Тумин А. М. Возникновение турбулентности. Динамическая теория возбуждения и развития неустойчивостей в пограничных слоях. Новосибирск: Наука, 1987. 282 с.
2. Gray W. E. The effect of wing sweep on laminar flow // RAE TM Aero. 1952. № 255.
3. Михайлов В. В. Об асимптотике нейтральных кривых линейной задачи устойчивости ламинарного пограничного слоя // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 5. С. 39–46.
4. Мануйлович С. В. О восприимчивости дозвукового течения к осциллирующим воздействиям, локализованным на дне пограничного слоя // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 4. С. 63–69.
5. Богданова Е. В., Рыжов О. С. О возмущениях, генерируемых осцилляторами в потоке вязкой жидкости на закритических частотах // ПМТФ. 1982. № 4. С. 65–72.
6. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978. 736 с.
7. Mack L. M. On the stability of the boundary layer on a transonic swept wing // AIAA Paper. 1979. № 79-0264. 16 p.
8. Mack L. M. Linear stability theory and the problem of supersonic boundary layer transition // AIAA J. 1975. V. 13. № 3. P. 278–289.

Москва

Поступила в редакцию
9.VIII.1988