МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1989

УДК 532.72:532.54

КОЛТУНОВА Л. Н.

О ДИФФУЗИИ В НЕОДНОРОДНОМ ПОЛЕ СКОРОСТИ

Рассмотрено влияние неоднородного поля скорости на процесс диффузии. При осреднении локального уравнения переноса пассивной примеси по сечению канала получено дифференциальное уравнение для средней по сечению концентрации в виде бесконечного асимптотического ряда, членами которого являются линейные комбинации производных средней концентрации по координате и времени, а коэффициенты зависят от степени поперечной неравномерности поля скорости и радиального числа Пекле. Выполнены оценки, показывающие, что в большинстве встречающихся в практике случаев для обеспечения необходимой точности расчетов ряд должен включать производные вплоть до третьего порядка. Методом асимптотических разложений найдено приближенное решение осредненного уравнения и определены начальные моменты функции распределения времени пребывания жидкости в канале.

1. Рассмотрим процесс эволюции «пассивной» примеси в потоке, текущем в цилиндрическом канале. Направим ось x по направлению средней скорости потока, ось r — по радиусу трубы, так чтобы значение $r=0$ находилось на оси трубы. Будем считать масштаб времени достаточно большим, чтобы для турбулентных течений пользоваться осредненными во времени величинами, а поля скоростей и коэффициентов диффузии — неизменными по длине канала. Вследствие осевой симметрии поля скорости и, как следствие, поля концентраций в дифференциальном уравнении переноса можно не учитывать производные концентрации по углу. Поскольку направления осей координат выделены самими условиями гидродинамически стабилизированного течения в трубе, можно считать, что тензор коэффициентов диффузии диагонален. Отбросим член, ответственный за продольную диффузию, как малый по сравнению с соответствующим конвективным членом. При сделанных выше допущениях уравнение диффузии примет вид

$$\frac{\partial C}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}u_xC=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rD_{rr}\frac{\partial C}{\partial r}\right) \tag{1.1}$$

где C — концентрация, u — скорость, t — время, D — коэффициент диффузии. Разлагая осевую компоненту скорости u_x (далее обозначаемую u) и концентрацию C на средние (по площади потока) и флуктуационные составляющие и пренебрегая изменением D_{rr} (обозначаемого далее D_r) вдоль радиуса, из (1.1) найдем

$$\frac{\partial\langle C\rangle}{\partial t}+\langle u\rangle\frac{\partial\langle C\rangle}{\partial x}=-\frac{\partial}{\partial x}\langle u'C'\rangle \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial C'}{\partial t}+\langle u\rangle\frac{\partial C'}{\partial x}-\frac{1}{r}D_r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial C'}{\partial r}\right)=-u'\frac{\partial\langle C\rangle}{\partial x}-u'\frac{\partial C'}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\langle u'C'\rangle \tag{1.3}$$

Используя безразмерные переменные и переходя к координатам $\tau(\tau,\ z_1)$ и $z_1=z-\tau$, движущимся со средней скоростью потока, из (1.2), (1.3) получим

$$\frac{\partial\langle C\rangle}{\partial\tau}=-\frac{\partial\langle u'C'\rangle}{\partial z_1} \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial C'}{\partial\tau}-\frac{1}{\mathrm{Pe}_r}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial C'}{\partial\rho}\right)=-u'\frac{\partial\langle C\rangle}{\partial z_1}-u'\frac{\partial C'}{\partial z_1}+\frac{\partial\langle u'C'\rangle}{\partial z_1} \tag{1.5}$$

$$\tau=\frac{t\langle u\rangle}{H};\quad z=\frac{x}{H};\quad \rho=\frac{r}{R};\quad u'=\frac{u'}{\langle u\rangle};\quad \mathrm{Pe}_r=\frac{\langle u\rangle R^2}{D_r H} \tag{1.6}$$

В (1.6) H — характерная длина, R — радиус канала.

Граничные условия для (1.5) определяются симметрией профиля концентраций относительно вертикальной оси и отсутствием потока массы через стенку канала

$$\frac{\partial C'}{\partial\rho}(\tau, z_1, 0)=0;\qquad \frac{\partial C'}{\partial\rho}(\tau, z_1, 1)=0 \tag{1.7}$$

В качестве начального условия примем введение индикатора в виде δ-функции равномерно по сечению канала

$$\langle C\rangle(0,\ 0)=\delta(z);\qquad C'(0,\ 0,\ \rho)=0 \tag{1.8}$$

Будем решать (1.5), считая $\partial\langle C\rangle/\partial z_1$ параметром, а остальные члены в правой части уравнения — некоторыми малыми добавками. В этих условиях можно записать для (1.5) функцию Грина

$$G(\rho,\tau,\rho_0,\tau_0)=\frac{2}{\mathrm{Pe}_r}\sum_{i=1}^{\infty}E\frac{j_0(\lambda_i\rho_0)j_0(\lambda_i\rho)}{j_0^2(\lambda_i)} \tag{1.9}$$

$$E=\exp[-\lambda_i^2(\tau-\tau_0)/\mathrm{Pe}_r]$$

где вследствие (1.7) собственные значения λ_i находятся как корни уравнения $j_1(\lambda_i)=0$. Подставляя (1.9) в уравнение для C' и учитывая (1.8), найдем

$$C'(\tau,\rho)=-\int_0^{\tau}\int_0^{1}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2}{j_0^2(\lambda_i)}Ej_0(\lambda_i\rho)j_0(\lambda_i\rho_0)\rho_0\times$$

$$\times\left[u'(\rho_0)\frac{\partial\langle C\rangle}{\partial z_1}+u'(\rho_0)\frac{\partial C'}{\partial z_1}-\frac{\partial\langle u'C'\rangle}{\partial z_1}\right]d\rho_0\,d\tau_0 \tag{1.10}$$

Для решения интегродифференциального уравнения (1.10) используем метод итераций, в соответствии с которым, вычисляя C_{n+1}', под знаком интеграла будем принимать $C'=C_n'$. Для начального приближения примем $C_0'=0$. Уравнение для C_1' примет вид

$$C'=-\int_0^{\tau}\int_0^{1}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2}{j_0^2(\lambda_i)}Ej_0(\lambda_i\rho)j_0(\lambda_i\rho_0)\rho_0\frac{\partial\langle C\rangle}{\partial z_1}u'(\rho_0)\,d\rho_0\,d\tau_0 \tag{1.11}$$

Проинтегрируем (1.11) по ρ_0, умножим C' на $u'(\rho)$ и осредним полученное произведение по сечению канала. Будем иметь

$$\langle u'C'\rangle=-\int_0^{\tau}\sum_{i=1}^{\infty}K_iE\frac{\partial\langle C\rangle}{\partial z_1}d\tau_0 \tag{1.12}$$

где K_i — некоторые константы, определяемые профилем скорости. Подставим (1.12) в (1.4)

$$\frac{\partial\langle C\rangle}{\partial\tau}=\frac{\partial}{\partial z_1}\int\limits_0^\tau\sum_{i=1}^\infty K_iE\frac{\partial\langle C\rangle}{\partial z_1}d\tau_0 \tag{1.13}$$

Для решения (1.13) воспользуемся методом, предложенным в [1]. Продифференцируем (1.13) по τ, после чего умножим его на $\mathrm{Pe}_r/\lambda_1^2$ и сложим полученное выражение с (1.13)

$$\frac{\partial\langle C\rangle}{\partial\tau}+\frac{\mathrm{Pe}_r}{\lambda_1^2}\frac{\partial^2\langle C\rangle}{\partial\tau^2}=\sum_{i=1}^\infty K_i\frac{\mathrm{Pe}_r}{\lambda_1^2}\frac{\partial^2\langle C\rangle}{\partial z_1^2}-\sum_{i=2}^\infty K_i\int\limits_0^\tau\left(\frac{\lambda_i^2}{\lambda_1^2}-1\right)\frac{\partial^2\langle C\rangle}{\partial z_1^2}E\,d\tau_0 \tag{1.14}$$

Тем же способом исключим в сумме, находящейся в правой части (1.14), второй и последующие интегралы. Полное осредненное уравнение диффузии (в первом приближении) имеет вид

$$\frac{\partial\langle C\rangle}{\partial\tau}+\mathrm{Pe}_r\frac{\partial^2\langle C\rangle}{\partial\tau^2}\sum_{i=1}^\infty\frac{1}{\lambda_i}+\mathrm{Pe}_r^2\frac{\partial^3\langle C\rangle}{\partial\tau^3}\sum_{\substack{i=1\\ j>i}}^\infty\frac{1}{\lambda_i\lambda_j}+\mathrm{Pe}_r^3\frac{\partial^4\langle C\rangle}{\partial\tau^4}\sum_{\substack{i=1\\ i<j<k}}^\infty\frac{1}{\lambda_i\lambda_j\lambda_k}+\ldots=$$

$$=\mathrm{Pe}_r\frac{\partial^2\langle C\rangle}{\partial z_1^2}\sum_{i=1}^\infty\frac{K_i}{\lambda_i^2}+\mathrm{Pe}_r^2\frac{\partial^3\langle C\rangle}{\partial\tau\,\partial z_1^2}\sum_{i=1}^\infty\frac{K_i}{\lambda_i^2}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^\infty\frac{1}{\lambda_j^2}+\ldots \tag{1.15}$$

Как явствует из (1.15), осредненное уравнение представляет собой асимптотический ряд, члены которого являются линейными комбинациями средней по сечению концентрации $\langle C\rangle$ по времени и осевой координате, а коэффициенты зависят от степени поперечной неравномерности профиля скорости и эффективности радиального перемешивания в системе. Для упрощения записи введем следующие обозначения:

$$\gamma_1=\sum_{i=1}^\infty\frac{1}{\lambda_i^2};\quad \gamma_2=\sum_{\substack{i=1\\ j>i}}^\infty\frac{1}{\lambda_i^2\lambda_j^2};\quad \gamma_3=\sum_{\substack{i=1\\ i<j<k}}^\infty\frac{1}{\lambda_i^2\lambda_j^2\lambda_k^2}\ldots;\quad A_1=\sum_{i=1}^\infty\frac{K_i}{\lambda_i^2};$$

$$A_2=\sum_{i=1}^\infty\frac{K_i}{\lambda_i^2}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^\infty\frac{1}{\lambda_j^2}\ldots$$

Как видно из (1.15), в первом приближении это уравнение совпадает с уравнением идеального вытеснения (1.16), во втором приближении — с уравнением телеграфного вида (1.17)

$$\frac{\partial\langle C\rangle}{\partial\tau}=0 \tag{1.16}$$

$$\frac{\partial\langle C\rangle}{\partial\tau}+\mathrm{Pe}_r\gamma_1\frac{\partial^2\langle C\rangle}{\partial\tau^2}=\mathrm{Pe}_r A_1\frac{\partial^2\langle C\rangle}{\partial z_1^2} \tag{1.17}$$

Уравнения типа (1.17) предложены в литературе для решения одномерных задач диффузии и теплопереноса [1—6], однако в отличие от этих работ (1.17) описывает изменение не истинной концентрации, а средней по сечению в потоке с неоднородным профилем скорости, в связи с чем в (1.17) в явном виде входят характеристики реального профиля скорости (A_1) и эффективности радиального перемешивания в системе (Pe_r).

Профиль скорости	$A_1\cdot 10^4$	$A_2\cdot 10^5$	$A_3\cdot 10^6$	$-B_1\cdot 10^3$
I	208,332	120,485	31,375	22,822
II	11,524	6,998	1,862	5,241
III	9,172	5,590	1,491	4,000
IV	7,502	4,593	1,228	3,123
V	6,275	3,858	1,034	2,483
VI	13,101	8,115	2,180	34,607
VII	12,233	8,057	2,184	0,390
VIII	69,161	45,578	12,354	5,252
IX	177,264	116,819	31,663	21,552
X	362,262	238,735	64,708	69,963

Поскольку собственные значения λ_i определяются из условия $j_1(\lambda_i)=0$, а коэффициенты K_i – из решения соответствующей гидродинамической задачи, можно записать (1.15) следующим образом:

$$\frac{\partial\langle C\rangle}{\partial\tau}+\mathrm{Pe}_r\,\gamma_1\frac{\partial^2\langle C\rangle}{\partial\tau^2}+\mathrm{Pe}_r^2\,\gamma_2\frac{\partial^3\langle C\rangle}{\partial\tau^3}+\mathrm{Pe}_r^3\,\gamma_3\frac{\partial^4\langle C\rangle}{\partial\tau^4}+\ldots$$

$$\ldots=\mathrm{Pe}_r\,A_1\frac{\partial^2\langle C\rangle}{\partial z_1^2}+\mathrm{Pe}_r^2\,A_2\frac{\partial^3\langle C\rangle}{\partial z_1^2\,\partial\tau}+\mathrm{Pe}_r^3\,A_3\frac{\partial^4\langle C\rangle}{\partial z_1^2\,\partial\tau^2}+\ldots$$

$$\gamma_1=0{,}1245;\quad \gamma_2=5{,}001\cdot10^{-3};\quad \gamma_3=9{,}595\cdot10^{-5};\quad \gamma_4=1{,}054\cdot10^{-6} \tag{1.18}$$

Значения коэффициентов γ_i найдены расчетом с точностью до 60 членов ряда.

Параметры A_1, A_2, A_3 для некоторых видов профиля скорости в круглой трубе (параболический (I), поток со степенной зависимостью скорости от расстояния от стенки при значениях показателя степени $1/n=7$ (II), 8 (III), 9 (IV), 10 (V), логарифмический профиль, образующийся при течении в шероховатой трубе при $\mathrm{Re}=1{,}53\cdot10^4$ (VI) и течение с поверхностью тангенциального разрыва скорости, при котором на доле площади потока, равной Y, скорость неизменна и равна V_1, а на доле площади $(1-Y)$ – также неизменна и равна V_2) приведены в таблице. Для потоков с поверхностью тангенциального разрыва принято $Y=0{,}36$; $V_1=0{,}6$, $V_2=0{,}4$ (VII); $V_1=0{,}7$, $V_2=0{,}3$ (VIII); $V_1=0{,}8$, $V_2=0{,}2$ (IX) и $V_1=0{,}9$, $V_2=0{,}1$ (X).

Как следует из таблицы, коэффициент при $\partial\langle C\rangle/\partial z^2$ в точности равен тейлоровскому коэффициенту дисперсии, в частности, для параболического профиля скорости $1/\mathrm{Pe}_e=1/48\cdot\mathrm{Pe}_r$. Ниже приведено сравнение коэффициентов эффективной диффузии для турбулентного потока, рассчитанных по уравнению $1/\mathrm{Pe}_e=A_1\cdot\mathrm{Pe}_r\ (\mathrm{Pe}/\xi)_1$ с соответствующими величинами, рассчитанными по уравнению, приведенному в [7] $(\mathrm{Pe}_r/\xi)_2$, при этом коэффициент сопротивления ξ для гладких труб рассчитывали по формуле Никурадзе $1/\sqrt{\xi}=2{,}0\lg(\mathrm{Re}\sqrt{\xi})-0{,}8$:

$\mathrm{Re}\cdot10^{-6}$	0,11	0,44	1,35	3,23
$(\mathrm{Pe}_r/\xi)_1$	121,007	174,642	240,022	321,027
$(\mathrm{Pe}_r/\xi)_2$	120,264	178,571	242,777	297,796

Расчеты для турбулентного потока в круглой трубе с гладкими стенками и профилем D, определяемым уравнением [10]

$$D=\frac{\xi}{16}\langle u\rangle\rho(1-\rho)^{1-1/n}\frac{2n^3}{(n+1)(2n+1)}$$

показали, что поправка, даваемая продольным коэффициентом диффузии, имеет порядок $2/(\mathrm{Pe}_r\cdot\mathrm{Pe}_z)$, а поправка, обусловленная неравномерностью профиля D_r по радиусу трубы,– около 8% от Pe_e.

Как следует из таблицы, с относительной погрешностью, не превышающей ΔA, параметры A_2, $A_3\ldots$ для всех видов потоков можно рассчитывать по приближенным зависимостям

$$A_2={}^1/_2\gamma_1A_1\ (|\Delta A|\leqslant0{,}045);\quad A_3={}^1/_3\gamma_2A_1(|\Delta A|\leqslant0{,}056)$$

Практически важен вопрос о количестве необходимых для расчета членов ряда (1.14). Исключим как маловероятный ламинарный режим течения ($\mathrm{Pe}_r=10^6$–10^8).

В турбулентном режиме в гладких трубах при изменении числа Re от 10^5 до 10^6 радиальное число Пекле меняется от 400 до 500 R/H. В шероховатых трубах ($\mathrm{Re}=1{,}54\cdot10^4$) $\mathrm{Pe}_r=30\,R/H$ [7]. По данным [8], в камерах смешения $\mathrm{Pe}_r=(2{,}5-25)\cdot R/H$. В трубчатых реакторах с зернистым слоем, по данным [9], $\mathrm{Pe}_r=(11-12)\cdot R^2/(Hd_з)$ ($d_з$ – диаметр зерна катализатора). Если учесть, что обычно $R/d_з\geqslant5$, то в зернистых слоях $\mathrm{Pe}_r\geqslant(50-60)\cdot R/H$. В барботажных слоях большой высоты [10] $\mathrm{Pe}_r=5\cdot R/H$. Таким образом, считая гладкие трубы скорее исключением, чем правилом, принимая в камерах смешения $R/H=0{,}1$ [8], в трубчатых реакторах с зернистым слоем $R/H\leqslant0{,}1$, в барботажных реакторах $R/H\leqslant0{,}5$, найдем, что для оптимальных оценок следует принять $\mathrm{Pe}_r\sim5$, для более осторожных $\mathrm{Pe}_r\sim10$.

Используя более осторожную оценку $\mathrm{Pe}_r=10$ и значение $A_1=0{,}01$ (средняя степень поперечной неравномерности профиля скорости), а для расчета средней концентрации принимая уравнение, выведенное для одномерных потоков, принимая также за минимальное время, значимое для расчетов,– время, при котором концентрация $\langle C\rangle$ достигает 10% от своего среднего за весь период измерений значения $\langle C_m\rangle$, найдем, что в турбулентном потоке второй член суммы составляет примерно 20% от первого, третий член $\sim9\%$, четвертый $\sim4\%$.

Таким образом, для инженерных расчетов без большой погрешности можно пользоваться тремя первыми членами ряда (1.18), который при этом примет вид

$$\frac{\partial\langle C\rangle}{\partial\tau}+\gamma_1\,\mathrm{Pe}_r\frac{\partial^2\langle C\rangle}{\partial\tau^2}+\gamma_2\,\mathrm{Pe}_r^2\frac{\partial^3\langle C\rangle}{\partial\tau^3}=\mathrm{Pe}_r A_1\frac{\partial^2\langle C\rangle}{\partial z_1^2}+\mathrm{Pe}_r^2 A_2\frac{\partial^3\langle C\rangle}{\partial z_1^2\,\partial\tau}$$

Или в неподвижной системе координат

$$\frac{\partial\langle C\rangle}{\partial\tau}+\frac{\partial\langle C\rangle}{\partial z}+\gamma_1\,\mathrm{Pe}_r\frac{\partial^2\langle C\rangle}{\partial\tau^2}+2\gamma_1\,\mathrm{Pe}_r\frac{\partial^2\langle C\rangle}{\partial\tau\,\partial z}+\mathrm{Pe}_r(\gamma_1-A_1)\frac{\partial^2\langle C\rangle}{\partial z^2}+$$
$$+\gamma_2\,\mathrm{Pe}_r^2\frac{\partial^3\langle C\rangle}{\partial\tau^3}+3\gamma_2\,\mathrm{Pe}_r^2\frac{\partial^3\langle C\rangle}{\partial\tau^2\,\partial z}+\mathrm{Pe}_r^2(3\gamma_2-A_2)\frac{\partial^3\langle C\rangle}{\partial\tau\,\partial z^2}+$$
$$+\mathrm{Pe}_r^2(\gamma_2-A_2)\frac{\partial^3\langle C\rangle}{\partial z^3}=0 \qquad (1.19)$$

Для ламинарного потока, несмотря на чрезвычайно высокие числа Пекле, при интегрировании уравнения (1.11) также можно ограничиться тремя первыми членами ряда. Действительно, все экспоненциальные сомножители в уравнении (1.11) вследствие чрезвычайно высоких чисел Pe_r практически равны единице, но для ламинарного потока $K_1=0{,}2969$; $K_2=0{,}0264$. При этом вся сумма коэффициентов K_i (с точностью до 20 членов ряда) равна 0,3333. Таким образом, использование первых двух членов ряда позволяет получить всю сумму с точностью до 3%. К сожалению, такое соотношение между коэффициентами K_i наблюдается далеко не во всех случаях сильной поперечной неравномерности профиля скорости.

Как следует из (1.19), коэффициент при второй производной $\partial^2\langle C\rangle/\partial z^2$ положителен (так как $\gamma_1>A_1$). На самом деле градиент концентраций, определяющий дисперсионную составляющую переноса, равен $\mathrm{Pe}_r\,\partial/\partial z\times\times[2\gamma_1\partial\langle C\rangle/\partial\tau+(\gamma_1-A_1)\partial\langle C\rangle/\partial z]$. Но поскольку $\partial\langle C\rangle/\partial\tau$ противоположен по знаку $\partial\langle C\rangle/\partial z$ и, вообще говоря, $|\partial\langle C\rangle/\partial\tau|>|\partial\langle C\rangle/\partial z|$, то суммарный знак у такого «обобщенного» дисперсионного члена будет отрицательный.

Уравнение (1.18) представляет собой дифференциальный аналог интегродифференциального уравнения (1.5) (с учетом (1.10)) в первом приближении. Подставляя найденное значение C_1^1 в (1.10), найдем второе приближение, при этом левая часть (1.18) не изменится, а в правой части появятся дополнительные слагаемые вида

$$B_1\,\mathrm{Pe}_r^2\frac{\partial^3\langle C\rangle}{\partial z^3}+B_2\,\mathrm{Pe}_r^3\frac{\partial^4\langle C\rangle}{\partial z^3\,\partial\tau}+B_3\,\mathrm{Pe}_r^4\frac{\partial^5\langle C\rangle}{\partial z^3\,\partial\tau^2}+\dots$$

Значения коэффициентов B_1 для рассмотренных выше потоков приведены в таблице. Из приведенных выше соображений о порядке слагаемых в уравнении (1.18) следует, что вторым приближением в большинстве встречающихся в практике случаев можно пренебречь.

2. Как следует из (1.19), коэффициент при члене $\partial^3\langle C\rangle/\partial z^3$, особенно при высокой степени поперечной неравномерности профиля скорости, достаточно мал по сравнению с коэффициентами при остальных членах ряда. В связи с этим можно попытаться найти приближенное решение (1.19) методом разложения по малому параметру. Будем искать решение в виде

$$\langle C\rangle=\langle C_0\rangle+\varepsilon\langle C_1\rangle+\varepsilon^2\langle C_2\rangle+\ldots;\qquad \varepsilon=\mathrm{Pe}_r^2(\gamma_2-A_2) \tag{2.1}$$

В качестве начального условия примем импульсное введение индикатора равномерно по сечению потока (1.8). Дополнительные начальные условия, необходимые для решения уравнения третьего порядка, найдем, подставляя (1.8) в (1.13) и (1.14). Получим

$$\tau=0\quad \langle C\rangle=\delta(z);\quad \frac{\partial\langle C\rangle}{\partial z}=\delta'(z);\quad \frac{\partial\langle C\rangle}{\partial\tau}=-\delta'(z);$$

$$\frac{\partial^2\langle C\rangle}{\partial z^2}=\delta''(z);\quad \frac{\partial^2\langle C\rangle}{\partial\tau\,\partial z}=-\delta''(z);\quad \frac{\partial^2\langle C\rangle}{\partial\tau^2}=\delta''(z)\left(1+\frac{A_1}{\gamma_1}\right) \tag{2.2}$$

Естественным граничным условием является условие ограниченности $\langle C\rangle$ на бесконечности: $z\to\pm\infty$ $\langle C\rangle$ — конечно. Преобразуя (1.19) по Лапласу с учетом (2.2) и решая полученное уравнение с указанными граничными условиями, найдем

$$\langle C_0^*\rangle=(F_1e^{s_1z}+F_2e^{s_2z})h(z);\qquad \langle C_1^*\rangle=(F_3e^{s_1z}+F_4e^{s_2z})h(z)z \tag{2.3}$$

где F_1, F_2, F_3, F_4, s_1, s_2 — функции Pe_r, γ_1, $\gamma_2,\ldots$, A_1, $A_2,\ldots$; $h(z)$ — функция Хевисайда.

Так как оба корня s_1 и s_2 отрицательны, использованное граничное условие является единственным физически обоснованным для данной задачи, в связи с чем исчезают различия между решениями для «бесконечного», «полуограниченного» и «ограниченного» каналов, используемые в литературе [11] для потоков с равномерным профилем скорости. Из (2.3) по уравнению $\nu_i=\langle C^*\rangle^{(i)}(-S)|_{S=0}$ (S — переменная Лапласа) найдем статистические характеристики функции $\langle C\rangle$ — ее начальные моменты

$$\nu_0=1+\frac{E_1}{G_1^2}\left[A_1\left(G_1-\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)-G_2\right]\left(1-\frac{G_2}{G_1^3\,\mathrm{Pe}_r}\right)$$

$$\nu_1=1+2A_1\,\mathrm{Pe}_r+\frac{E_1A_1\,\mathrm{Pe}_r}{G_1^2}\left[G_5-2G_1^2+3G_2\frac{\gamma_1}{A_1}+3\gamma_2-\frac{G_4}{G_1A_1}(G_5+2G_3)\right]-$$

$$-E_1\frac{G_2A_1}{G_1^5}\left[7\gamma_2+3G_3-G_1^2+6G_2\frac{\gamma_1}{A_1}-4\gamma_1G_1-G_5-\frac{G_4}{G_1A_1}(G_5-A_1G_1+5G_3)\right] \tag{2.4}$$

$$E_1=\exp(-\mathrm{Pe}_r\,G_1)^{-1};\quad G_1=\gamma_1-A_1;\quad G_2=\gamma_2-A_2;\quad G_3=3\gamma_2-A_2;$$

$$G_4=\gamma_2\left(1+\frac{A_1}{\gamma_1}\right)-A_2;\quad G_5=\left(\gamma_1+A_1-\frac{G_3}{G_1}\right)\Big/\mathrm{Pe}_r \tag{2.5}$$

Уравнение для γ_2 вследствие его громоздкости здесь не приводится. Как следует из (2.4), (2.5), при значениях числа Пекле, используемых на практике, нулевой момент $\nu_0<1$, а первый момент $\nu_1>1$. (При $\mathrm{Pe}_r=20$ и $A_1=0{,}001$ $\nu_0=0{,}815$; $\nu_1=1{,}504$.) Для сравнения: в потоке с равномерным профилем скорости $\nu_0=1$; $\nu_1=1$ (ограниченный канал) и $\nu_0=1$; $\nu_1=1+2A_1\cdot\mathrm{Pe}_r=1{,}04$ (бесконечный канал).

При расчете по телеграфному уравнению (1.17) имеем

$$\nu_0=1+E_1A_1/G_1;\qquad \nu_1=1+2A_1\mathrm{Pe}_r(1-E_1)+E_1A_1(\gamma_1+A_1)/G_1^2$$

что при $\mathrm{Pe}_r=20$ и $A_1=0{,}001$ дает $\nu_0=1{,}005$; $\nu_1=1{,}019$

Анализ уравнения (2.5) показывает, что с увеличением неравномерности профиля скорости (параметр A_1) и уменьшением скорости распространения радиальной диффузии (увеличение Pe_r) первый момент увеличивается, а нулевой уменьшается, что приводит к значительно увеличенным значениям ν_1, если нормирование производится на ν_0, как это часто происходит на практике. Факт неравенства первого момента единице ($\nu_1 \neq H/\langle u \rangle$) не раз отмечали в эксперименте [12, 13], но до сих пор он не находил объяснения в литературе.

Параметр A_2 достаточно мал и, как показано выше, с достаточной точностью для всех видов потоков может быть рассчитан по уравнению $A_2 = A_1\gamma_1/2$, в связи с чем (1.19) может рассматриваться как уравнение с двумя параметрами: критерием неоднородности профиля скорости A_1 и критерием радиального перемешивания в системе Pe_r. Оба параметра легко определяются из опытов по исследованию функции распределения времени пребывания жидкости в системе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Швидлер М. И.* Статистическая гидродинамика пористых сред. М.: Недра, 1985. 288 с.
2. *Goldstein S.* On diffusion by discontinuous movements and on the telegraph equation // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1951. V. 4. Pt 2. P. 129–156.
3. *Монин А. С.* О диффузии с конечной скоростью // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1965. № 3. С. 234–248.
4. *Лыков А. В.* Применение методов термодинамики необратимых процессов к исследованию тепло- и массообмена // Инж.-физ. журн. 1985. Т. 9. № 3. С. 287–304.
5. *Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. Ч. I. М.: Наука, 1965. 639 с.
6. *Марон В. И.* Перемешивание взаимно-растворимых жидкостей в турбулентном потоке в трубе // ПМТФ. 1971. № 5. С. 96–102.
7. *Taylor G.* The dispersion of matter in turbulent flow through a pipe // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1954. V. 223. P. 446–468.
8. Теория турбулентных струй/Под ред. Абрамовича Г. Н. М.: Наука, 1984. 716 с.
9. *Сергеев С. П., Дильман В. В.* Стохастические коэффициенты переноса и силы межфазного взаимодействия в неподвижном зернистом слое // Теор. основы хим. технологии. 1986. Т. 20. № 1. С. 19–27.
10. *Дильман В. В., Шульц Э. З.* Полуэмпирическая теория продольного рассеяния вещества в потоке жидкости // Теор. основы хим. технологии. 1968. Т. 2. № 1. С. 84–91.
11. *van der Laan E. Th.* Discussion on the paper by Lievenspiel O. Smith W. K. Notes on the diffusion-type model for the longitudinal mixing in flow // Chem. Eng. Sci. 1958. V. 7. № 3. P. 187–191.
12. Масштабный переход в химической технологии. Разработка промышл. аппаратов методом гидродин. моделирован./Под ред. Розена А. М. М.: Химия, 1980. 320 с.
13. *Awasthi R. C., Vasudeva K.* On mean residence times in flow systems // Chem. Eng. Sci. 1983. V. 38. № 2. P. 313–319.

Москва

Поступила в редакцию 23.VI.1988