МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1989

УДК 532.59

БАХОЛДИН И. Б.

УСРЕДНЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ И РАЗРЫВЫ, ОПИСЫВАЮЩИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН СТОКСА С МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИМИСЯ ПАРАМЕТРАМИ

Исследуются уравнения, описывающие стационарную огибающую периодических волн на поверхности жидкости постоянной и переменной глубины. Методы, применявшиеся ранее [1–5] для исследования распространения солитонов, обобщаются на случай периодических волн. Рассматриваемые уравнения выводятся из кубического уравнения Шредингера с использованием предположения о медленном изменении параметров волн. При использовании этих уравнений в некоторых случаях необходимо введение разрывов. По аналогии со случаем солитонов рассматривается теория разрывов, в соответствии с которой разрывы интерпретируются как резонансные взаимодействия трех волн. Решается задача о Маховском отражении волн от вертикальной стенки и задача о распаде произвольного разрыва. Для обоснования этой теории исследуются решения, описывающие взаимодействие двух волн над горизонтальным дном. Методом усреднения [6] выводятся системы уравнений, описывающие распространение одной и двух взаимодействующих между собой волн на поверхности жидкости постоянной и переменной глубины. Эти системы имеют стационарные решения и могут быть записаны в дивергентном виде.

1. Уравнения для волн над горизонтальным дном. Стационарная огибающая A периодических волн малой амплитуды на поверхности жидкости постоянной глубины, распространяющихся под малыми углами к оси x горизонтальной системы координат x, y описывается кубическим уравнением Шредингера [7]

$$2A_x-\frac{i}{k}A_{yy}+iK'|A|^2A=0 \qquad (1.1)$$

$$K'=k^3\frac{c}{c_g}\frac{\operatorname{ch}4q+8-2\operatorname{th}^2 q}{8\operatorname{sh}^4 q}>0,\qquad q=kh,\qquad c=\frac{\omega}{k}$$

$$c_g=\frac{\partial\omega}{\partial k}=\frac{\omega}{k\operatorname{sh}2q}\left(\frac{\operatorname{sh}2q}{2}+q\right),\qquad \omega^2=kg\operatorname{th}q$$

Здесь k — волновое число, ω — частота волны, c и c_g — фазовая и групповая скорости, h — глубина жидкости, g — ускорение силы тяжести. После замены переменных x, y переменными xk, yk уравнение (1.1) приводится к виду

$$2A_x-iA_{yy}+iK|A|^2A=0,\quad K=K'/k \qquad (1.2)$$

Уравнение (1.2) является универсальным уравнением. Оно описывает и некоторые нестационарные волновые процессы на воде [8], при этом переменная x заменяется переменной времени, а знак K может быть как положительным, так и отрицательным. Кубическое уравнение Шредингера используется также в оптике, ионной акустике и ряде других моделей [9]. Перенос полученных в разд. 1–4 результатов на эти модели в случае $K>0$ очевиден.

После подстановки в уравнение (1.2) выражения $A=ae^{i\varphi}$, приравнивания к нулю действительной и мнимой частей, домножения действительной части на a и дифференцирования мнимой по y возникает система [7]

$$E_x+(EW)_y=0, \qquad W_x+\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{a_{yy}}{2a}+\frac{W^2}{2}+\frac{KE}{2}\right)=0 \tag{1.3}$$
$$W=\psi_y, \quad E=a^2$$

Сделаем замену переменных $x=LX$, $y=LY$, где L — большая величина, пренебрежем членом $a_{YY}/(2aL^2)$ и получим нелинейную гиперболическую систему

$$\frac{\partial}{\partial X}E+\frac{\partial}{\partial Y}(EW)=0, \qquad \frac{\partial}{\partial X}W+\frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{W^2}{2}+\frac{KE}{2}\right)=0 \tag{1.4}$$

Если в системе (1.4) величины E, W, X, Y, $K/2$ обозначить h, u, t, x, g, то система совпадет с системой нестационарных уравнений мелкой воды, в которых u — средняя скорость. Следовательно, характеристические скорости системы (1.4) равны $W\pm K/\sqrt{2a}$, а инварианты Римана $W\pm K\sqrt{2a}$. Система (1.3) при малых изменениях величины E аналогична системе уравнений Буссинеска в случае, когда дисперсия обусловлена поверхностным натяжением [10].

Система (1.4) для периодических волн имеет тот же смысл, что и используемая в [1] система, описывающая эволюцию уединенных волн

$$\frac{\partial}{\partial Y}(E\cos\alpha)-\frac{\partial}{\partial X}(E\sin\alpha)=0, \qquad \frac{\partial}{\partial Y}\frac{\sin\alpha}{V}+\frac{\partial}{\partial X}\frac{\cos\alpha}{V}=0 \tag{1.5}$$
$$V(E,h)=\sqrt{h}\left(1+\frac{3}{8}\frac{E^{2/3}}{h^2}\right)$$

где α — угол между касательной к фронту и осью X, V — скорость волны, h — глубина жидкости. Если в системе (1.5) поменять X и Y местами, сделать замену $\alpha=-W$, $V=1+0{,}5KE$ и, считая величину W малой, а величину E малой величиной порядка W^2, пренебречь членами порядка W^4, получится система (1.4). Следовательно, первое уравнение системы (1.4) имеет смысл уравнения сохранения энергии, а второе уравнение кинематическое.

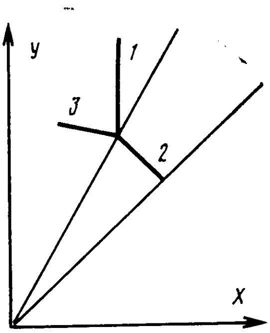
2. Теория разрывов. При решении системы (1.4), как и в случае уединенных волн, могут возникать пересечения характеристик. Требуется введение разрывов, представляющих собой изломы фронта со скачком плотности энергии. В работе [7] для исследования маховского отражения волн Стокса от вертикальной стенки была введена модель разрыва с сохранением энергии на нем. В данной работе, как и в случае солитонов [2], разрыв интерпретируется как резонансное взаимодействие трех волн. Пусть линия разрыва прямая $Y=0$, а волна имеет вид

$$A=a_1\exp[i(k_{x1}x+k_{y1}y)]+a_3\exp[i(k_{x3}x+k_{y3}y)], \quad y>0$$
$$A=a_2\exp[i(k_{x2}x+k_{y2}y)], \quad y<0$$

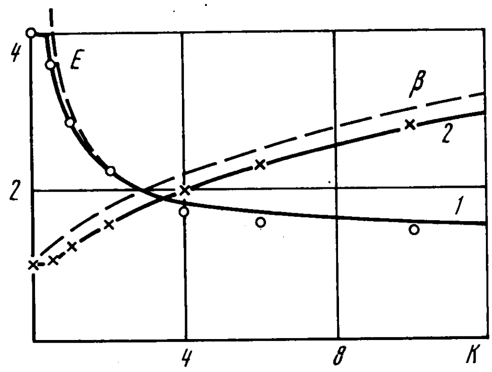
Введем следующие граничные условия на разрыве:

$$a_2{}^2k_{y2}=a_1{}^2k_{y1}+a_3{}^2k_{y3}, \quad k_{yi}=W_i, \quad a_i{}^2=E_i \tag{2.1}$$
$$a_2=a_1+a_3, \quad k_{x1}=k_{x2}=k_{x3} \tag{2.2}$$
$$2k_{x2}+k_{y2}{}^2+Ka_2{}^2=0, \quad 2k_{xi}+k_{yi}{}^2+K(a_1{}^2+a_3{}^2)=0; \quad i=1,\ 3 \tag{2.3}$$

Уравнение (2.1) — условие сохранения энергии в системе из трех волн. Уравнения (2.2) — предположение о том, что амплитуда волны *2* определяется так же, как и в линейном случае и условия сохранения числа гребней на разрыве. Уравнения (2.3) — дисперсионное соотношение для волны *2* и предполагаемые дисперсионные соотношения для волн *1* и *3*,



Фиг. 1



Фиг. 2

введенные из соображений симметрии. Заметим, что из этой системы следует $k_{y1}=-k_{y3}$.

Уравнения (2.1)–(2.2) можно вывести, приравнивая величины A, A_x, A_y по разные стороны от линии разрыва. При этом приравнивание величины A_y дает соотношение, которое можно интерпретировать как условие сохранения импульса

$$a_2k_{y2}=a_1k_{y1}+a_3k_{y3} \tag{2.4}$$

Соотношение (2.1) выводится из (2.4) домножением на a_1+a_3, поскольку $k_{y1}=-k_{y2}$ и $a_2=a_1+a_3$.

Над решениями уравнения (1.2) можно производить преобразование, которое ниже называется вращением. Если $f(x, y)$ – решение уравнения (1.2), то $f(x, y+\beta x)\exp[i(-\beta^2/2x-\beta y)]$ – также решение уравнения (1.2). Воспользовавшись этим преобразованием, запишем условия на разрыве, линия которого наклонена к оси X под углом с тангенсом β

$$\begin{gathered}\beta(E_1+E_3-E_2)=E_1W_1+E_3W_3-E_2W_2,\\ \beta(W_1-W_2)=0{,}5(W_1^2-W_2^2)+0{,}5K(E_1+E_3-E_2)\\ \beta(W_1-W_3)=0{,}5(W_1^2-W_3^2)+0{,}5K(E_1+E_3-E_2),\quad \sqrt{E_2}=\sqrt{E_1}+\sqrt{E_3}\end{gathered} \tag{2.5}$$

В [7] численно было исследовано отражение волн Стокса от вертикальной стенки. На фиг. 1 приведена схема взаимодействия волны со стенкой в соответствии с введенной выше моделью разрыва. Полагая в соответствии с [7] в соотношениях (2.5) $W_1=0$, $W_2=1$, $E_1=1$, найдем значение E у стенки и тангенс угла наклона линии разрыва

$$E_2=(1+1/\sqrt{2K})^2,\quad \beta={}^1/_2+\sqrt{K/2} \tag{2.6}$$

На фиг. 2 показаны графики величин E и β, полученные в [7] численно (1 и 2) и аналитически (штриховыми линиями), а также построенные по формулам (2.6) (сплошными линиями). Модель трехволнового резонанса учитывает как маховское, так и регулярное отражение и значительно более точно определяет величины β и E, чем модель разрыва с сохранением энергии. Таким образом, соотношения (2.5) пригодны для исследования решений с разрывами.

Соотношения (2.1)–(2.3) аналогичны соответствующим соотношениям для трехволнового резонанса солитонов [2]. Рассмотрим эту аналогию подробнее. Решением системы (2.1)–(2.3) являются линейные соотношения

$$W_1=-\frac{K}{\sqrt{2}}a_2,\quad W_2=-\frac{K}{\sqrt{2}}(2a_1-a_2),\quad W_3=\frac{K}{\sqrt{2}}a_3,\quad a_2=a_1+a_3,\quad W_1<W_2 \tag{2.7}$$

Из (2.7) следует, что характеристики системы (1.4), записанной для каждой волны отдельно, расположены по отношению к линии разрыва так же, как и в случае резонанса солитонов. У волны *1* обе характеристики приходят на линию разрыва, у волны *3* обе уходят, у волны *2* одна уходит и одна приходит. Разрыв является эволюционным.

Из уравнений (2.7) следует соотношение

$$W_2-W_1=K\sqrt{2}(a_2-a_1) \tag{2.8}$$

которое выполняется при произвольном направлении линии разрыва, поскольку оно не меняет своего вида при вращении. Как и в случае солитонов [2], соотношение (2.8) совпадает с условием сохранения инварианта Римана на характеристике системы (1.4).

Задача о распаде произвольного разрыва для данной модели исследуется так же, как и для солитонов [2]. Приведем результаты ее решения для периодических волн. Индексами 1 и 2 обозначим начальные значения величин на произвольном разрыве, $a_2 \geqslant a_1$. При $-K\sqrt{2}(a_2-a_1)<W_2-W_1<K\sqrt{2}(a_2-a_1)$ решение содержит центрированную простую волну и трехволновую конфигурацию. При $K\sqrt{2}(a_2-a_1)<W_2-W_1<K\sqrt{2}(a_2-a_1)$ решение содержит две трехволновые конфигурации, а при $k\sqrt{2}(a_2+a_1)<W_2-W_1<k\sqrt{2}(a_2-a_1)$ – две простые волны. При $W_2-W_1>k\sqrt{2}(a_2+a_1)$ формальное решение содержит два разрыва, линии которых сходятся. Требуется введение разрыва типа пересечения волн [2]. При $W_2-W_1<-K\sqrt{2}(a_2+a_1)$ в решении имеются центрированные простые волны, между которыми образуется зона тени, где нет волн.

Необходимо отметить, что приведенная в этом разделе модель является приближенной, поскольку в случае периодических волн волны *1* и *3* нельзя исследовать независимо друг от друга. Точный метод рассматривается в следующих разделах.

3. Осредненные уравнения для двух взаимодействующхи волн. Будем считать, что в уравнении (1.2) $K=1$, что достигается заменой переменной A на $A\sqrt{K}$. Подставим в уравнение (1.2) выражение $A=a_1\exp(i\psi_1)+a_2\exp(i\psi_2)$, приравняем к нулю действительную и мнимую части, а затем сгруппируем в них члены так, чтобы выделить для каждой волны энергетическое и кинематическое соотношения

$$2a_{ix}+2a_{iy}+a_i\psi_{iyy}=0; \quad i=1,\ 2 \tag{3.1}$$

$$2a_i\psi_{ix}-a_{iyy}+a_i\psi_{iy}^2+a_i[a_1^2+a_2^2+2a_1a_2\cos(\psi_1-\psi_2)]=0 \tag{3.2}$$

Величины ψ_x, ψ_y при $\psi=0$ ниже обозначаются k_x, k_y. Рассмотрим стационарные (не зависящие от x) решения системы (3.1), (3.2). Интегрируя уравнения (3.1), получаем

$$a_i^2\psi_{iy}=a_{0i}^2k_{yi}, \qquad \psi_i=\int_0^y \psi_{iy}\,dy \tag{3.3}$$

где a_0 – значение a при $\psi=0$. Подставляя ψ_{iy} и ψ_i из уравнений (3.3) в уравнения (3.2), получаем

$$\frac{a_{iyy}}{a_i}=2k_{xi}+\left(\frac{a_{0i}^2k_{yi}}{a_i^2}\right)^2+a_1^2+a_2^2+2a_1a_2\cos\int_0^y\left(\frac{a_{01}^2}{a_1^2}k_{y1}-\frac{a_{02}^2}{a_2^2}k_{y2}\right)dy \tag{3.4}$$

Если предположить, что

$$a_i=a_{0i}\theta, \quad \theta(0)=1, \quad -k_{y1}=k_{y2}=k_y>0, \quad k_{x1}=k_{x2}=k_{x3}$$

то при $i=1$ и 2 уравнения (3.4) будут иметь одинаковый вид

$$\theta_{yy}=\theta\left[2k_x+\left(\frac{k_y}{\theta^2}\right)^2+\theta^2\left(a_{01}^2+a_{02}^2+2a_{01}a_{02}\cos\int_0^y\frac{2k_y}{\theta^2}dy\right)\right] \tag{3.5}$$

Уравнение (3.5) приводится к виду

$$z_{\psi\psi}=\chi z^{-2}-z-z^{-5}(1+\eta^2+2\eta\cos 2\psi) \tag{3.6}$$

$$\psi=\int_0^y \frac{k_y}{\theta^2}dy, \quad z=\frac{1}{R\theta}, \quad R=\frac{a_{02}}{a_{01}^2}k_y=\frac{\eta}{a_{01}}k_y=\frac{1}{z(0)}$$

$$\eta=\frac{a_0^2}{a_{01}}, \quad \chi=-\frac{2k_x}{k_y}\left(\frac{k_y}{a_{01}}\right)^{4/3}$$

Пусть величина η малая, $z=z_0+z_1$, где z_1 — малая величина порядка η. После линеаризации уравнения (3.6) получим

$$z_{1\psi\psi}=(-4+2z_0^{-6})z_1-z_0^{-5}2\eta\cos\psi, \qquad \chi z_0^{-3}-z_0-z_0^{-5}=0 \tag{3.7}$$

Общим решением уравнения (3.7) будет

$$z_1=z_0[\eta\cos 2\psi+b\cos(\psi\sqrt{4-2z_0^{-6}}+\Delta)] \tag{3.8}$$

где b и Δ — произвольные постоянные. Это решение квазипериодическое. С точностью до членов порядка η модуль комплексной амплитуды — периодическая функция, определяемая формулой

$$|A|=a_{01}[1-b\cos(\psi\sqrt{4-2z_0^{-6}}+\Delta)] \tag{3.9}$$

Следовательно, это решение можно рассматривать как решение, описывающее взаимодействие двух волн. Максимумы функции $|A|$ соответствуют пересечению гребней или ложбин волн. Из формулы (3.9) видно, что одно и то же решение о взаимодействии волн может быть представлено в виде $a_1\exp(i\psi_1)+a_2\exp(i\psi_2)$ разными способами. Наиболее удобно выбирать $b=-\eta$, $\Delta=0$, тогда $z(0)=z_0$, $z_\psi(0)=0$.

При конечных значениях η решение уравнения (3.6), описывающее взаимодействия двух волн, искалось численно. Начальные условия полагались следующими:

$$z(0)=z_0, \quad z_\psi(0)=0, \quad \chi z_0^{-3}-z_0-z_0^{-5}(1+\eta^2)=0 \tag{3.10}$$

Из последнего соотношения следует дисперсионное соотношение для пары волн, использовавшееся в разд. 2

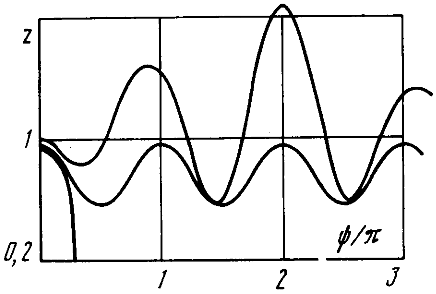
$$2k_{xi}+k_{yi}^2+a_{01}^2+a_{02}^2=0 \tag{3.11}$$

Найдем значение $z_0=z_{0*}$, при котором возникает резонанс, т. е. слияние двух волн в одну. Из соотношений (2.1)—(2.3) следует уравнение

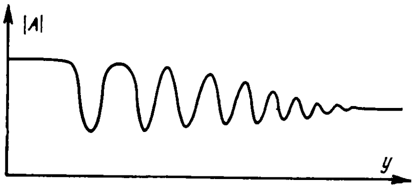
$$\left(\frac{1-\eta}{1+\eta}\right)^2 z_0^6-\chi z_0^2+(1+\eta)^2=0 \tag{3.12}$$

Подставляя в (3.12) z_0 из соотношения (3.11), находим $z_{0*}=(1+\eta)^{1/3}2^{-1/6}$.

Расчеты показывают, что при $z_0>z_{0*}$ решение квазипериодическое, а функция $|A|(y)$ периодическая. При $z_0=z_{0*}$ решение периодическое, $|A|=\text{const}$. При $z_0<z_{0*}$ функция $z(\psi)$ монотонно убывает и при некотором ψ становится равной нулю. Типичный вид графиков $z(\psi)$ в этих трех случаях приведен на фиг. 3. Графики соответствуют $\eta=0{,}3$ и χ, вычисленному из уравнения (3.10) при следующих значениях z_0: 1,02; 0,9723; 0,94. При $z_0\to z_{0*}+$ период функции $|A|(y)$ стремится к бесконечности, а ее график приближается к последовательности уединенных волн отрицательной амплитуды. Таким образом, решение уравнения (3.6) с начальными условиями (3.10) описывает взаимодействие двух волн, у которых величины k_{xi} совпадают.



Фиг. 3



Фиг. 4

Решения о взаимодействии волн с различными значениями k_{xi} получаются из построенных выше решений вращением. При вращении величина $2k_x+k_y^2$ сохраняется, следовательно, дисперсионное соотношение (3.11) выполняется для всех взаимодействующих волн.

Выведем уравнения, описывающие эволюцию пары волн, аналогичные уравнениям (1.4). После домножения уравнений (3.1) на a_i и дифференцирования уравнений (3.2) по y возникает система

$$\frac{\partial}{\partial x}E_i+\frac{\partial}{\partial y}(E_iW_i)=0, \qquad \frac{\partial}{\partial x}W_i+\frac{\partial}{\partial y}F_i=0 \tag{3.13}$$

$$F_i=-\frac{a_{iyy}}{a_i}+\frac{W_i^2}{2}+\frac{1}{2}\left[E_1+E_2+2a_1a_2\cos(\psi_1-\psi_2)\right], \quad E_i=a_i^2, \quad W_i=\psi_{iy}$$

Пусть E_i, W_i, ψ_i – функции быстрых x, y и медленных X, Y переменных ($x=LX$, $y=LY$, L – большая константа). Усредним уравнения (3.13)

$$\frac{\partial}{\partial X}\langle E_i\rangle+\frac{\partial}{\partial Y}\langle E_iW_i\rangle=0, \qquad \frac{\partial}{\partial X}\langle W_i\rangle+\frac{\partial}{\partial Y}\langle F_i\rangle=0 \tag{3.14}$$

$$\langle E_i\rangle=\frac{E_{0i}}{R^2}\frac{\langle z^{-4}\rangle}{\langle z^{-2}\rangle}, \qquad \langle W_i\rangle=\beta\mp\frac{k_yR^2}{\langle z^{-2}\rangle}$$

$$\langle E_iW_i\rangle=\beta\langle E_i\rangle\mp E_{0i}k_y, \qquad \langle F_i\rangle=-k_{xi}$$

$$\beta=(k_{y1}+k_{y2})/2, \qquad k_y=(k_{y2}-k_{y1})/2, \qquad k_{y2}>k_{y1}$$

$$2k_{xi}+k_{yi}^2+E_{01}+E_{02}=0, \qquad 2k_x+k_y^2+E_{01}+E_{02}=0$$

$$R=\frac{\eta k_y}{a_{01}}=\frac{1}{z_0}, \qquad \chi=-\frac{2k_x}{k_y}\left(\frac{k_y}{a_{01}}\right)^{4/3}, \qquad \eta=\frac{a_{02}}{a_{01}}$$

$$\langle G\rangle(X,Y)=\int\limits_{\Delta x}\int\limits_{\Delta y}G(x,y,X,Y)\,dx\,dy\Bigg/\int\limits_{\Delta x}\int\limits_{\Delta y}dx\,dy; \qquad G=E,W,F,EW$$

$$\langle z^n\rangle=\int\limits_{\Delta\psi}z^n\,d\psi/\Delta\psi; \qquad n=-2,-4$$

Здесь $\Delta x\Delta y$ – достаточно большая область, $\Delta\psi$ – отрезок, на котором укладывается достаточно большое число колебаний квазипериодической функции $z(\psi)$, являющейся решением уравнения (3.6) с начальными условиями (3.10), β – параметр преобразования вращения. С помощью вращения из решений, в которых $k_{xi}=k_x$, $k_{yi}=\mp k_y$, получены решения с заданными значениями k_{yi}. Все величины в уравнениях (3.14) определяются параметрами k_{yi} и $E_{0i}=a_{0i}^2$.

Для случая $E_{02}\ll E_{01}$ можно воспользоваться линеаризованными решениями, для которых осредненные уравнения имеют более простой вид

$$\frac{\partial}{\partial X}\langle E_i\rangle+\frac{\partial}{\partial Y}\langle E_i\rangle\langle W_i\rangle, \quad \langle W_i\rangle=k_{yi}, \quad \langle E_i\rangle=E_{0i}$$
$$\frac{\partial}{\partial X}\langle W_i\rangle+\frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\langle W_i\rangle^2}{2}+\frac{\langle E_1\rangle+\langle E_2\rangle}{2}\right)=0 \tag{3.15}$$

Уравнение, определяющее характеристические скорости [6] системы (3.15), имеет вид

$$(\langle W_1\rangle-c)^2(\langle W_2\rangle-c)^2-{}^1/{}_2\langle E_1\rangle(\langle W_2\rangle-c)^2-$$
$$-{}^1/{}_2\langle E_2\rangle(\langle W_1\rangle-c)^2-{}^1/{}_4\langle E_1\rangle\langle E_2\rangle=0 \tag{3.16}$$

Если величина $|\langle W_2\rangle-\langle W_1\rangle|$ не слишком мала по сравнению с $\langle E_1\rangle^{1/2}$, оно имеет четыре действительных корня, система (3.15) гиперболическая. С точностью до членов порядка $\langle E_2\rangle^{1/2}$ характеристические скорости определяются формулами

$$c_{1,2}=\langle W_1\rangle\mp\sqrt{\frac{\langle E_1\rangle}{2}+\frac{\langle E_1\rangle\langle E_2\rangle}{4(\langle W_1\rangle-\langle W_2\rangle\pm\sqrt{0{,}5\langle E_1\rangle})^2}}$$

$$c_{3,4}=\langle W_2\rangle\mp\sqrt{\frac{0{,}5\langle E_2\rangle(\langle W_1\rangle-\langle W_2\rangle)^2+0{,}25\langle E_1\rangle\langle E_2\rangle}{(\langle W_1\rangle-\langle W_2\rangle)^2-0{,}5\langle E_1\rangle}}$$

При $\langle W_1\rangle<\langle W_2\rangle$ $c_1<c_2<c_3<c_4$. Первые две характеристики можно назвать характеристиками волны *1*, а две другие характеристиками волны *2*. Очевидно, аналогичными свойствами обладает и система (3.14).

4. Автомодельные решения. Система (3.14) аналогична системе (1.5), записанной для обеих волн. У нее должны существовать автомодельные решения, описываемые уравнениями

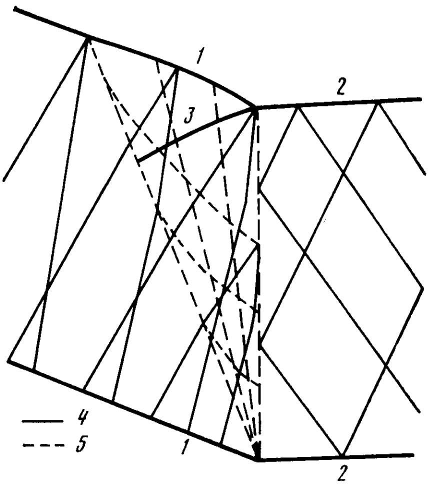
$$\langle E_i\rangle_\xi-\xi\langle E_iW_i\rangle_\xi=0, \quad \langle W_i\rangle_\xi-\xi\langle F_i\rangle=_0, \quad \xi=X/Y \tag{4.1}$$

Уравнения (4.1) могут иметь отличающиеся от констант решения только в том случае, если одно из семейств характеристик прямые $\xi=$ $=\mathrm{const}$ (свойство центрированных простых волн). Тогда одно из соотношений на центрированной простой волне $c_i=\xi$, а еще три соотношения определяются по трем другим характеристикам.

Очевидно, исследованные численно в [7] решения могут быть описаны автомодельными решениями (4.1). В этих решениях график $|A|(y)$ при фиксированном x близок к последовательности периодических волн, начинающейся с волн малой амплитуды и заканчивающейся уединенной волной понижения уровня. Схематичный вид графика $|A|(y)$ при больших значениях x представлен на фиг. 4. Таким образом, эта автомодельная структура составлена из трехволновой конфигурации и центрированной простой волны, в которой волны *1* и *3* взаимодействуют в соответствии с системой (3.14), в начальной части $\langle E_2\rangle\ll\langle E_1\rangle$ и можно применять систему (3.15).

Сходные автомодельные решения для периодических волн уравнения Кортевега — де Вриза ранее [11] также исследовались методом Уизема. Здесь же исследуются решения системы (1.3), аналогичной системе уравнений Буссинеска с отрицательной дисперсией. В отличие от усредненных уравнений, используемых в [11], уравнения (3.14) описывают двухфазные решения и содержат четыре, а не три неизвестных. Решение системы (1.3) в виде уединенной волны понижения уровня соответствует резонансному взаимодействию волн, описываемых уравнением Шредингера.

На фиг. 5 представлена схема расположения фронтов волн *1*, *2*, *3* в исследуемом автомодельном решении, а также характеристик волн *1* и *2*



Фиг. 5

(линии *4*) и волны *3* (линии *5*). Поскольку в центрированной простой волне одно из семейств характеристик — прямые $\xi=\text{const}$, а центрированная простая волна следует сразу за линией разрыва, то характеристика этого семейства направлена вдоль линии разрыва. Сравнение начальной части рассматриваемого решения с аналогичным решением для солитонов показывает, что семейством характеристик $\xi=\text{const}$ являются характеристики волны *3*, обозначенные выше номером 3, $c_1<c_2<c_3<<c_4$ (см. фиг. 5).

Условия на разрыве симметричны относительно волн *1* и *3*. Можно поменять номера волн *1* и *3* местами и рассмотреть другой разрыв, в котором соответствующая характеристика также направлена вдоль линии разрыва. В исходных обозначениях это характеристика с номером 2. Две слившиеся характеристики с номерами 3 и 2 направлены вдоль линии разрыва. Следовательно, резонанс для системы (3.14) имеет смысл потери гиперболичности.

Таким образом, рассмотренные в разд. 2 разрывы на самом деле заменяют некоторые автомодельные структуры, аппроксимируемые соотношениями (2.8).

5. Усредненные уравнения для волн на поверхности жидкости переменной глубины. При достаточно медленном изменении глубины огибающая периодических волн описывается параболическим уравнением, представляющим собой обобщение уравнения (1.1) [12]

$$2kcc_gA_x+(kcc_g)_xA-i(cc_gA_y)_y+ikcc_gK'|A|^2A=0 \tag{5.1}$$

Формулы, определяющие величины c, c_g, k, K', приведены в разд. 1. Но в уравнении (5.1) эти величины зависят от x и y, поскольку параметр h переменный.

Для вывода уравнений, аналогичных уравнениям (1.4), необходимо выполнить те же операции, что и в разд. 1, и сделать предположение $h=h(X, Y)$. Система, описывающая эволюцию волны, имеет вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial X}E+\frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial Y}(EW)+\frac{EW}{kcc_g}\frac{\partial}{\partial Y}(cc_g)+\frac{E}{kcc_g}\frac{\partial}{\partial X}(kcc_g)=0\\ \frac{\partial}{\partial X}W+\frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{W^2}{2k}+\frac{K'}{2}E\right)=0\end{gathered} \tag{5.2}$$

Первое уравнение системы (5.2) можно записать также в дивергентном виде

$$\frac{\partial}{\partial X}(kcc_gE)+\frac{\partial}{\partial Y}(cc_gEW)=0$$

Аналогично выводятся и уравнения для пары волн

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial X}\langle E_i\rangle+\frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial Y}\langle E_iW_i\rangle+\frac{\langle E_iW_i\rangle}{kcc_g}\frac{\partial}{\partial Y}(cc_g)+\frac{\langle E_i\rangle}{kcc_g}\frac{\partial}{\partial X}(kcc_g)=0\\ \frac{\partial}{\partial X}\langle W_i\rangle+\frac{\partial}{\partial Y}\langle F_i\rangle=0\end{gathered} \tag{5.3}$$

$$F_i=-\frac{a_{iyy}}{ka_i}+\frac{W_i^2}{2k}+\frac{K'}{2}[E_1+E_2+2a_1a_2\cos(\Psi_1-\Psi_2)]$$

где $E_i(x, y)$, $W_i(x, y)$, $\psi_i(x, y)$ определяются так же, как в разд. 3, как функции, описывающие решение о взаимодействии двух волн над горизонтальным дном. При этом коэффициенты уравнения Шредингера (1.1) предполагаются не зависящими от быстрых переменных x, y, но зависящими от параметра h.

Как и в случае солитонов [1], при $h=h(Y)$ уравнения (5.2) и (5.3) имеют стационарные решения, описываемые интегральными соотношениями

$$cc_gEW=C_1, \quad \frac{W^2}{2k}+\frac{K'}{2}E=C_2 \tag{5.4}$$

$$cc_g\langle E_iW_i\rangle=C_{1i}, \quad \langle F_i\rangle=C_{2i} \tag{5.5}$$

где C_1, C_2, C_{1i}, C_{2i} – некоторые константы.

Среди стационарных решений (5.4), так же как и в случае солитонов, можно выделить сверхзвуковые решения, в которых обе характеристики находятся по одну сторону от изолинии глубины, и дозвуковые, в которых характеристики расположены по разные стороны от изолинии глубины.

Как показывалось выше, в системе, описывающей распространение пары волн, характеристические скорости одной из волн больше характеристических скоростей другой волны. Поэтому среди стационарных решений (5.5) можно выделить три типа. В первом типе все четыре характеристики расположены по одну сторону от изолинии глубины. Во втором характеристики одной волны расположены по одну сторону, а другой – по разные стороны. В третьем типе решений характеристики одной из волн расположены справа от изолинии глубины, а другой – слева.

Таким образом, и в случае неровного дна имеется аналогия между распространением уединенных и периодических волн. Большинство качественных результатов работ [1–5] применимо к периодическим волнам.

Автор благодарит А. Г. Куликовского и А. А. Бармина за обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Куликовский А. Г., Реутов В. А.* Распространение нелинейных волн над полубесконечными подводными впадинами и хребтами // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 2. С. 53–61.
2. *Бахолдин И. Б.* Разрывы переменных, характеризующих распространение уединенных волн в слое жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 3. С. 87–93.
3. *Бахолдин И. Б.* Распространение уединенных волн над подводными хребтами // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 1. С. 86–93.
4. *Бахолдин И. Б.* Автомодельные решения, описывающие распространение уединенных волн над подводными хребтами и впадинами // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 5. С. 137–144.
5. *Бахолдин И. Б.* Распространение уединенных волн над полубесконечным подводным желобом // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 4. С. 102–107.
6. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны: Пер. с англ. М.: Мир, 1977. 621 с.
7. *Yue D. K. P., Mei C. C.* Forward diffraction of Stokes waves by a thin wedge // J. Fluid Mech. 1980. V. 99. Pt. 1. P. 33–52.
8. *Peregrine D. H.* Water waves, nonlinear Schrodinger equations and their solutions // J. Austral. Math. Soc. 1983. V. B25. P. 16–43.
9. *Карпман В. И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973. 175 с.
10. *Peregrine D. H.* Wave jumps and caustics in the propagation of finite-amplitude water waves // J. Fluid Mech. 1983. V. 136. P. 435–452.
11. *Гуревич А. В., Питаевский Л. П.* Нестационарная структура бесстолкновительной ударной волны // ЖЭТФ. 1973. Т. 65. № 2. С. 590–604.
12. *Kirby J. T., Dalrymple R. A.* A parabolic equation for the combined refraction-diffraction of Stokes waves by mildly varying topography // J. Fluid Mech. 1983. V. 136. P. 453–466.

Москва

Поступила в редакцию 21.VI.1988