

УДК 532.527.032

СЫЧЕВ В. В.

ВЯЗКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ВИХРЯ С ТВЕРДОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Рассматривается трехмерное нестационарное течение вязкой жидкости, обусловленное процессом взаимодействия диссипирующего вихря с плоской твердой поверхностью. Предполагается, что в начальный момент времени имеет место потенциальное поле течения от линейной вихревой нити, перпендикулярной стенке. В дальнейшем происходят одновременно процессы диффузии вихря и развитие индуцируемого им пограничного слоя. Отношение циркуляции исходного вихря $2\pi\Gamma$ к коэффициенту кинематической вязкости среды ν (число Рейнольдса задачи) предполагается большим. Это позволяет использовать для исследования поля течения метод срачиваемых асимптотических разложений. Из-за отсутствия характерного линейного размера задачи исследуемое поле течения является автомодельным. Наиболее примечательное свойство полученного решения — неизбежность отрыва пограничного слоя и образования вблизи оси симметрии «глаза» вихря весьма большой протяженности с почти неподвижной жидкостью. Это, а также некоторые другие свойства рассмотренного поля течения характерны в имеющихся описаниях торнадо.

1. Введение. Исследование вращательно-симметричного течения вязкой жидкости, происходящего под действием того или иного вихревого образования с осью симметрии, перпендикулярной твердой стенке, служит моделью для целого ряда гидродинамических явлений в природе и технике [1]. Сюда относятся такие явления, как смерчи или торнадо, «пыльные дьяволы», течения в вихревых камерах, и, возможно, явления, сопровождающие генерацию вихрей при трехмерных отрывах пограничного слоя от гладкой поверхности.

Весьма важную роль в течениях такого рода играет условие прилипания вязкой жидкости к твердой поверхности. Связанное с этим условием уменьшение окружной составляющей вектора скорости приводит к появлению радиальной скорости, необходимой для сохранения равновесия инерционных сил с градиентом давления. При больших числах Рейнольдса это течение возникает в пограничном слое; оно усиливается по мере приближения к оси симметрии и служит здесь источником появления больших значений осевой составляющей вектора скорости. Простейшей из возможных задач этого рода является стационарная задача о взаимодействии прямолинейной вихревой нити с бесконечной плоскостью [2]. Ввиду совпадения размерностей величин циркуляции $2\pi\Gamma$ и кинематической вязкости ν , а также отсутствия характерного линейного размера решение такой задачи должно быть автомодельным, зависящим лишь от одной независимой переменной — отношения радиальной и осевой координат цилиндрической системы. Однако, как было показано в [3], такое автомодельное решение уравнений Навье — Стокса существует лишь в диапазоне весьма малых значений числа $Re = \Gamma/\nu$ — примерно до $Re = 5,5$.

Если вместо бесконечной плоскости имеется диск конечного радиуса, то решение перестает быть автомодельным и существует при всех числах Re . Его изучению в приближении пограничного слоя (т. е. при $Re \rightarrow \infty$) была посвящена работа [4]. Наиболее важным и интересным в ней явля-

ется подробный анализ двухслойной структуры пограничного слоя вблизи оси (широко используемый ниже).

Стационарные течения возможны лишь в тех случаях когда существует постоянно действующий механизм генерации завихренности. В противном случае вязкость среды приводит к процессу диффузии завихренности и ее затуханию благодаря диссипативным эффектам. Классическим примером такого нестационарного течения является известная задача о диффузии вихревой нити в безграничной вязкой жидкости [5]. В этом течении зависимость азимутальной компоненты вектора скорости v_θ от времени t и расстояния от оси симметрии r^0 и перепад давления $p^0 - p_\infty$, уравновешивающий действие центробежных сил, равны

$$v_\theta = \frac{\Gamma}{r^0} (1 - e^{-r^{02}/4\nu t}) \quad (1.1)$$

$$\frac{p^0 - p_\infty}{\rho} = -\Gamma^2 \int_{r^0}^{\infty} (1 - e^{-x^2/4\nu t})^2 \frac{dx}{x^3} \quad (1.2)$$

В данной работе будет рассмотрено взаимодействие нестационарного (диффундирующего) вихря с ортогональной ему бесконечной плоской поверхностью при числах Рейнольдса $\Gamma/\nu \gg 1$.

Можно предположить, что решение этой задачи будет описывать свойства течений и с другими, более сложными начальными условиями при достаточно больших временах, так как течение со временем о них «забывает». С этой точки зрения ввиду достаточно большой продолжительности существования вихревых образований типа торнадо (часто измеряемой десятками минут) полученное решение должно отражать некоторые важные черты этого еще недостаточно изученного явления.

Впрочем, поскольку представленный здесь анализ относится к решению одной из фундаментальных проблем гидродинамики, он имеет право на существование и независимо от указанных приложений. Это тем более важно подчеркнуть, что здесь не рассматриваются столь важные для атмосферных приложений свойства среды, как бароклинность и неоднородность, а учет турбулентного характера ее движения возможен лишь на основе простейшей модели турбулентности — предположения о постоянстве «вихревой» вязкости.

2. Пограничный слой. Начнем с рассмотрения пограничного слоя, индуцируемого на твердой поверхности нестационарным вихрем (1.1). Будем различать два характерных масштаба поля течения в радиальном направлении. Один из них соответствует внешней области размером, порядка $\sqrt{\Gamma t}$, а другой — внутренней с размером порядка $\sqrt{\nu t}$. Им соответствуют характерные значения окружной составляющей скорости $\sqrt{\Gamma/t}$ и $\sqrt{\Gamma^2/\nu t}$. Поэтому, вводя нормированные безразмерные переменные соответственно для внешней и внутренней областей течения

$$r = \frac{r_0}{\sqrt{\Gamma t}}, \quad v = v_0 \left(\sqrt{\frac{\Gamma}{t}} \right)^{-1}, \quad p = \frac{p^0 - p_\infty}{\rho} \left(\frac{\Gamma}{t} \right)^{-1} \quad (2.1)$$

$$R = \frac{r_0}{\sqrt{\nu t}}, \quad V = v_0 \left(\frac{\Gamma}{\nu t} \right)^{-1}, \quad P = \frac{p^0 - p_\infty}{\rho} \left(\frac{\Gamma^2}{\nu t} \right)^{-1} \quad (2.2)$$

перепишем уравнения (1.1), (1.2) в виде

$$v = \frac{1}{r} + o(1), \quad p = -\frac{1}{2r^2} + o(1) \quad (2.3)$$

$$V = \frac{1}{R} (1 - e^{-R^2/4}), \quad P = -\int_R^\infty (1 - e^{-R^2/4})^2 \frac{dR}{R^3} \quad (2.4)$$

Отброшенный член в выражениях (2.3) пропорционален $e^{-r^2/4\varepsilon^2}$, где $\varepsilon = \sqrt{v/\Gamma}$ — малый параметр задачи.

Таким образом, развитие пограничного слоя при $r=O(1)$ будет происходить под действием циркуляционного течения (2.3). Так как толщина пограничного слоя нарастает по закону \sqrt{vt} , то нормальная к стенке (осевая) безразмерная независимая переменная порядка единицы здесь будет

$$z = z^0 / \sqrt{vt} \quad (2.5)$$

а безразмерные радиальную и осевую составляющие скорости порядка единицы определим соответственно как

$$u = v_r \left(\sqrt{\frac{\Gamma}{t}} \right)^{-1}, \quad w = v_z \left(\sqrt{\frac{v}{t}} \right)^{-1} \quad (2.6)$$

Подставляя приведенные выражения зависимых и независимых переменных в исходную систему уравнений Навье — Стокса, записанную в цилиндрических координатах [5], можно получить следующую систему дифференциальных уравнений пограничного слоя для области течения, где $r=O(1)$:

$$\begin{aligned} \left(u - \frac{1}{2}r \right) \frac{\partial u}{\partial r} + \left(w - \frac{1}{2}z \right) \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{2}u - \frac{v^2}{r} + \frac{1}{r^3} &= \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ \left(u - \frac{1}{2}r \right) \frac{\partial v}{\partial r} + \left(w - \frac{1}{2}z \right) \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{1}{2}v + \frac{uv}{r} &= \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\ \frac{\partial ru}{\partial r} + \frac{\partial rw}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Граничными условиями задачи будут

$$u = v = w = 0, \quad z = 0; \quad vr \rightarrow 1, \quad u \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \infty \quad (2.8)$$

Отброшенные при выводе (2.7) члены уравнений Навье — Стокса имеют порядок ε^2 .

Таким образом, рассматриваемая задача о течении в пограничном слое является автомодельной.

Начальные условия для системы (2.7) определяются ее асимптотическим решением при $r \rightarrow \infty$ (так как $u < 0$ и жидкость в пограничном слое движется к центру):

$$u \sim r^{-3}f_0(z), \quad v \sim r^{-1}g_0(z), \quad w \sim r^{-1}h_0(z), \quad r \rightarrow \infty \quad (2.9)$$

Система уравнений и краевых условий для функций f_0 , g_0 , h_0 , полученная подстановкой (2.9) в (2.7), (2.8), имеет вид

$$\begin{aligned} f_0'' + 1/2zf_0' - f_0 &= 1 - g_0^2, \quad g_0'' + 1/2zg_0' = 0, \quad h_0' = 2f_0 \\ f_0(0) = g_0(0) = h_0(0) &= 0, \quad f_0(\infty) = 0, \quad g_0(\infty) = 1 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Решение (2.10) изображено на фиг. 1. Оно может быть выписано в квадратурах, однако из-за громоздкости здесь не приводится. Заметим только, что решение для окружной составляющей скорости, как и следовало ожидать, при $r \rightarrow \infty$ стремится к решению известной задачи о развитии пограничного слоя при внезапном возникновении однородного потока около бесконечной плоской поверхности: $g_0 = \operatorname{erf}(z/2)$.

Используя начальные условия (2.9) и граничные условия (2.8), можно, пользуясь одним из численных методов, построить решение системы (2.7). Однако по мере приближения к оси, при $r \rightarrow 0$, его поведение становится сингулярным и требует специального рассмотрения.

3. Структура пограничного слоя при $r \rightarrow 0$. Асимптотические решения.

По мере приближения к оси симметрии окружная составляющая скорости v и градиент давления $\partial p / \partial r$ во внешнем потенциальном потоке, согласно (2.3), неограниченно возрастают. Это приводит к соответствующему возрастанию компонентов скорости и внутри пограничного слоя. При этом нелинейные (конвективные) члены и градиент давления в (2.7) при $r \rightarrow 0$ растут быстрее, чем линейные нестационарные члены, так что вблизи оси течение становится квазистационарным. Это позволяет в полной мере использовать результаты анализа структуры стационарного пограничного слоя на поверхности диска при $r \rightarrow 0$, проведенного в [4].

Одна из примечательных особенностей этой структуры — наличие вблизи стенки вязкой области автомодельного решения с независимой переменной z/r . Важнейшим свойством течения в этой области является то, что здесь $v \ll u$, т. е. движение жидкости в радиальном направлении под действием внешнего градиента давления доминирует над окружным! Предположение, что здесь сохраняется равенство порядков величин v и u , приводит к системе уравнений, не имеющей решения [4, 6].

Следуя [4], введем в рассмотрение функцию тока ψ и новую независимую переменную η

$$ru = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad rw = -\frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad \eta = \frac{z}{r} \quad (3.1)$$

Подставим (3.1) в (2.7) и (2.8). Сохраняя главные члены порядка $1/r^3$, и используя условие $v \ll u$, получим дифференциальное уравнение

$$\psi_0''' + \psi_0 \psi_0'' + \psi_0'^2 - 1 = 0, \quad \psi_0 = \psi/r \quad (3.2)$$

с граничными условиями $\psi_0(0) = \psi_0'(0) = 0$. Еще одно граничное условие состоит в требовании, чтобы $\psi_0' \rightarrow -1$ при $\eta \rightarrow \infty$, так как в противном случае $\psi_0' \rightarrow -\infty$ при конечных η и решение теряет физический смысл (см. [4]).

Хотя решение этой задачи и может быть выписано через функции Вебера, ограничимся следующими заимствованными из [4] результатами:

$$\psi_0''(0) = -\alpha = -1,0866 \quad (3.3)$$

$$\psi_0(\eta) = -(\eta - \alpha) - (2 - \alpha^2)/2(\eta - \alpha) + O(\eta^{-3}), \quad \eta \rightarrow \infty$$

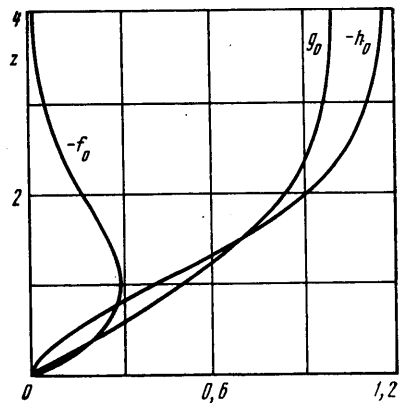
Для определения азимутальной составляющей вектора скорости в рассматриваемой области течения с учетом требования $v \ll u$ положим, следуя работе [4]

$$rv = r^\lambda \gamma_1(\eta) \quad (3.4)$$

где λ — постоянная, подлежащая определению. Подстановкой (3.1), (3.4) во второе из уравнений (2.7) получаем дифференциальное уравнение для $\gamma_1(\eta)$

$$\gamma_1'' + \psi_0 \gamma_1' - \lambda \psi_0 \gamma_1 = 0 \quad (3.5)$$

с граничным условием $\gamma_1(0) = 0$ и требованием не экспоненциального, но алгебраического роста γ_1 при $\eta \rightarrow \infty$. Это приводит к задаче о собственных значениях, подробно рассмотренной в [4]. Здесь приводится первое из соб-



Фиг. 1

ственных значений $\lambda=0,6797$ и асимптотическое представление γ_1 при больших η

$$\gamma_1(\eta) = B\gamma_1'(0) (\eta - \alpha)^\lambda [1 + \lambda(3 - \alpha^2 - \lambda)/2(\eta - \alpha)^2 + O(\eta^{-4})] \quad (3.6)$$

Первому собственному числу λ соответствуют значения $B=1,6518$ и $\gamma_1'(0)=0,5939$.

Вне области $\eta=O(1)$ расположена основная часть пограничного слоя, где $z=O(1)$. Поведение функций течения при $r \rightarrow 0$ определяется здесь разложениями вида (см. [4])

$$\begin{aligned} ru &= F_0(z) + rF_1(z) + r^2 \ln r F_2(z) + r^2 F_3(z) + O(r^3 \ln r) \\ rv &= G_0(z) + rG_1(z) + r^2 \ln r G_2(z) + r^2 G_3(z) + O(r^3 \ln r) \\ rw &= H_1(z) + r \ln r H_2(z) + rH_3(z) + O(r^2 \ln r) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Функции z , входящие в эти разложения, удовлетворяют следующим уравнениям:

$$F_0^2 + G_0^2 = 1 \quad (3.8)$$

$$-F_0 F_1 + F_0' H_1 - 2G_0 G_1 = 0, \quad F_0 G_1 + G_0' H_1 = 0, \quad F_1 + H_1' = 0 \quad (3.9)$$

$$F_0' H_2 - 2G_0 G_2 = 0, \quad 2F_0 G_2 + G_0' H_2 = 0, \quad 2F_2 + H_2' = 0 \quad (3.10)$$

$$F_0 F_2 + F_0' H_3 + F_1' H_1 - G_1^2 - 2G_0 G_3 = 1/2 z F_0' + F_0'' \quad (3.11)$$

$$F_0 G_2 + 2F_0 G_3 + F_1 G_1 + G_0' H_3 + H_1 G_1' = 1/2 z G_0' - G_0''$$

$$F_2 + 2F_3 + H_3' = 0$$

Сравнение с соответствующими разложениями работы [4] показывает, что уравнения для $F_n(z)$, $G_n(z)$, $H_n(z)$ совпадают при $n \leq 2$. Различия за счет появления нестационарных членов впервые возникают лишь в системе (3.11) для функций F_3 , G_3 , H_3 . На основании граничных условий (2.8) при $z \rightarrow \infty$ имеем

$$G_0(\infty) = 1; \quad G_n(\infty) = 0, \quad n \geq 1; \quad F_n(\infty) = 0, \quad n \geq 0 \quad (3.12)$$

Условия при $z \rightarrow 0$ получаются при помощи сращивания с решением для вязкого подслоя при $\eta \rightarrow \infty$. Используя асимптотические представления (3.3) и (3.6) для $\psi_0(\eta)$ и $\gamma_1(\eta)$, а также соотношения (3.1) и (3.4), получим

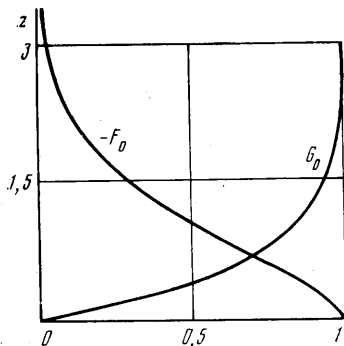
$$F_0(0) = -1, \quad H_1(0) = -\alpha; \quad G_0(z) z^{-\lambda} \rightarrow B\gamma_1'(0), \quad z \rightarrow 0 \quad (3.13)$$

Из системы уравнений (3.9) с учетом (3.8) могут быть определены функции

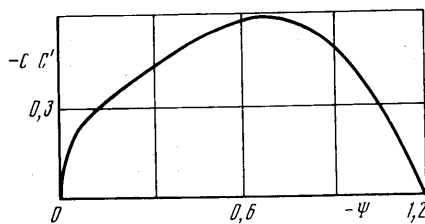
$$F_1 = -\alpha F_0', \quad G_1 = -\alpha G_0', \quad H_1 = \alpha F_0$$

Не занимаясь анализом решений для следующих членов разложений, отметим, что включение логарифмических членов в эти разложения необходимо для устранения противоречия, возникающего в системе уравнений (3.11), если предположить, что $F_2 = G_2 = H_2 = 0$.

Уравнение (3.8) для функций F_0 и G_0 , представляющих предельные значения ru и rv при $r \rightarrow 0$, эквивалентно уравнению Бернулли и оставляет одну из этих функций произвольной (если не считать требования удовлетворения краевым условиям (3.12) и (3.13)). Поэтому определение F_0 и G_0 возможно лишь в результате анализа численного решения системы (2.7) при $r \rightarrow 0$ и $z = O(1)$. Соответствующие предельные значения ru и rv , вообще говоря, определяются историей развития пограничного слоя и поэтому зависят от начальных условий (при $r \rightarrow \infty$). Однако если предположить, что эта зависимость «забывается» при $r \rightarrow 0$, то можно воспользоваться функциями $F_0(z)$ и $G_0(z)$, найденными в [4], что и будет сделано в дальнейшем. Вид этих функций показан на фиг. 2.



Фиг. 2



Фиг. 3

4. Течение вблизи оси. Невязкое ядро. Исследуем теперь течение в области $r^0 = O(\sqrt{\nu t})$, которая требует отдельного рассмотрения, поскольку течение вне пограничного слоя уже не описывается здесь уравнениями (2.3). С этой целью введем независимые переменные

$$R = r^0 / \sqrt{\nu t} = r/\epsilon, \quad Z = z^0 / \sqrt{\nu t} = z \quad (4.1)$$

и воспользуемся асимптотическими разложениями (3.7) для установления порядков величин составляющих вектора скорости при $(R, Z) = O(1)$. На основании двух первых разложений (3.7) получаем, что радиальная и окружная составляющие (v_r и v_θ) здесь будут порядка $\Gamma/\sqrt{\nu t}$. Третье разложение для осевой составляющей дает оценку $v_z = O(\sqrt{\Gamma/t})$, которая, однако, не соответствует действительности. В самом деле, на основании уравнения неразрывности для избежания физически нереального тривиального решения необходимо положить, что в рассматриваемой области $v_z = O(\Gamma/\sqrt{\nu t})$. Противоречие между оценками для v_z объясняется тем, что при выходе из внутренней области (при $R \rightarrow \infty$) $v_z/(\Gamma/\sqrt{\nu t})$ убывает экспоненциально, так что прямое сращивание решений для этой функции в главных членах невозможно [7].

На основании полученных оценок введем наряду с нормированными переменными (4.1) искомые функции порядка единицы U, V, W, P , положив

$$v_r = \frac{\Gamma}{\sqrt{\nu t}} U(R, Z), \quad v_\theta = \frac{\Gamma}{\sqrt{\nu t}} V(R, Z), \quad v_z = \frac{\Gamma}{\sqrt{\nu t}} W(R, Z), \quad \frac{p^0 - p_\infty}{\rho} = \frac{\Gamma^2}{\nu t} P(R, Z) \quad (4.2)$$

Подставляя (4.1), (4.2) в исходную систему уравнений Навье – Стокса [5], получим

$$\begin{aligned} U \frac{\partial U}{\partial R} + W \frac{\partial U}{\partial Z} - \frac{V^2}{R} + \frac{\partial P}{\partial R} &= 0, & U \frac{\partial V}{\partial R} + W \frac{\partial V}{\partial Z} + \frac{UV}{R} &= 0 \\ U \frac{\partial W}{\partial R} + W \frac{\partial W}{\partial Z} + \frac{\partial P}{\partial Z} &= 0, & \frac{\partial RU}{\partial R} + \frac{\partial RW}{\partial Z} &= 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Таким образом, вблизи оси симметрии существует область квазистационарного вязкого вихревого течения с размерами порядка толщины пограничного слоя $(\sqrt{\nu t})$. Если ввести в рассмотрение функцию тока Ψ , то можно получить два известных интеграла системы (4.3) и уравнение для функции тока [8]:

$$UR = \frac{\partial \Psi}{\partial Z}, \quad WR = -\frac{\partial \Psi}{\partial R} \quad (4.4)$$

$$\frac{1}{2}(U^2+V^2+W^2)+P=H(\Psi), \quad RV=C(\Psi) \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial Z^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R} = R^2 H'(\Psi) - C(\Psi) C'(\Psi) \quad (4.6)$$

Для определения функций $H(\Psi)$ и $C(\Psi)$ необходимо воспользоваться условиями сращивания (4.5), при $R \rightarrow \infty$ с соответствующими соотношениями для пограничного слоя при $r \rightarrow 0$. Для этого выпишем значения U и V при $R \rightarrow \infty$

$$RU = \frac{\partial \Psi}{\partial Z} = F_0(Z), \quad RV = C(\Psi) = G_0(Z) \quad (4.7)$$

которые после интегрирования первого из этих уравнений по z определяют функцию $C(\Psi)$ в параметрической форме.

Используя (3.7), (3.8), найдем, что $H(\Psi) = 0$. Заметим теперь, что (4.7) вместе с (3.13) приводят к следующему важному выражению:

$$C(\Psi) \sim B\gamma_1'(0) (-\Psi)^\lambda, \quad \Psi \rightarrow 0- \quad (4.8)$$

из которого следует, что окружная составляющая вектора скорости рассматриваемого невязкого течения обращается в нуль на всей нулевой поверхности тока. Ниже будет показано, что это обстоятельство объясняет одну из наиболее примечательных особенностей течения типа торнадо — образование зоны покоя в окрестности оси симметрии — «глаза» торнадо.

Итак, задача об определении течения в невязком вихревом ядре потока сводится к решению уравнения (4.6) с известной функцией $C(\Psi)$ и $H(\Psi) = 0$ в его правой части. На фиг. 3 показан вид правой части уравнения (4.6), определенной на основании результатов численного расчета функций $F_0(z)$ и $G_0(z)$ работы [4]. Приведем выражение, которое использовано ниже при ее аппроксимации в численных расчетах

$$\begin{aligned} -C(\Psi)C'(\Psi) = & 0,6541(-\Psi)^{0,3594} \frac{(1,2+\Psi)^4}{1,2^4} + \\ & + 2,56 \left(\frac{-\Psi}{1,2} \right)^{1,5} (1,2+\Psi); \quad -1,2 \leq \Psi \leq 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

При выводе этого аппроксимационного выражения учитывались не только асимптотика (4.8) для $C(\Psi)$ при $\Psi \rightarrow 0$, но и указанное в [4] асимптотическое поведение функции $F_0(z)$ при $z \rightarrow \infty$ (т. е. при $\Psi \rightarrow -1,2$), которая убывает пропорционально $e^{-1,6z}$.

Граничными условиями для уравнения (4.6) будут следующие:

$$\begin{aligned} R \rightarrow \infty: \quad \Psi & \sim \int_0^z F_0(Z) dZ \\ Z \rightarrow \infty: \quad \frac{\partial \Psi}{\partial Z} & \rightarrow 0; \quad Z=0: \quad \Psi=0 \end{aligned}$$

Первое условие следует из (4.7).

Что касается внутреннего (по R) граничного условия, то оно должно учитывать отрыв потока от твердой поверхности при $R > 0$ и поэтому выполняться не при $R = 0$, а на некоторой свободной поверхности $R = R_s(Z)$, где $\Psi = 0$. Это обстоятельство будет более подробно рассмотрено ниже.

Решение невязкой задачи для вихревого ядра приводит к некоторому ненулевому распределению радиальной составляющей скорости $U(R, 0)$ на стенке. Окружная составляющая скорости невязкого течения в отличие от радиальной, вследствие (4.8), на стенке обращается в нуль. Однако ее производная $\partial V / \partial Z$ (радиальная составляющая завихренности) обращается здесь в бесконечность. Для удовлетворения условию прилипания в

устранения особенности в завихренности необходимо поэтому ввести в рассмотрение вязкий подслой.

5. Течение вблизи оси. Вязкий подслой. Исследование течения в вязком подслое начнем с оценок порядков величин переменных для этой области. С этой целью воспользуемся условиями срачивания с автомодельным решением разд. 3 для вязкой области $\eta=O(1)$, т. е. рассмотрим (3.1), (3.4) при $r=O(\varepsilon)$. В результате получим, что безразмерные независимые переменные и искомые функции порядка единицы в подслое соответственно будут

$$r^* = \frac{r^0}{\sqrt{\nu t}} = R, \quad z^* = \frac{z^0}{\varepsilon \sqrt{\nu t}} = \frac{Z}{\varepsilon} \quad (5.1)$$

$$u^* = v_r \left(\frac{\Gamma}{\sqrt{\nu t}} \right)^{-1}, \quad v^* = v_\theta \left(\varepsilon^\lambda \frac{\Gamma}{\sqrt{\nu t}} \right)^{-1}, \quad w^* = v_z \left(\sqrt{\frac{\Gamma}{t}} \right)^{-1},$$

$$p^* = \frac{p^0 - p_\infty}{\rho} \left(\frac{\Gamma^2}{\nu t} \right)^{-1} \quad (5.2)$$

Подстановка этих выражений в исходную систему уравнений Навье — Стокса приводит к следующей системе уравнений пограничного слоя:

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial r^*} + w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \frac{\partial p^*}{\partial r^*} = \frac{\partial^2 u^*}{\partial r^{*2}}, \quad \frac{\partial p^*}{\partial z^*} = 0$$

$$u^* \frac{\partial v^*}{\partial r^*} + w^* \frac{\partial v^*}{\partial z^*} + \frac{u^* v^*}{r^*} = \frac{\partial^2 v^*}{\partial r^{*2}} \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial r^* u^*}{\partial r^*} + \frac{\partial r^* w^*}{\partial z^*} = 0$$

Граничными условиями для этой системы будут условия прилипания на стенке и условия срачивания с внешним невязким решением

$$u^* = v^* = w^* = 0, \quad z^* = 0 \quad (5.4)$$

$$u^* \sim f^*(r^*) = U(r^*, 0), \quad v^* \sim z^{*\lambda} g^*(r^*), \quad w^* \sim z^* h^*(r^*) \quad (5.5)$$

С учетом уравнения Бернулли и (4.8) имеем

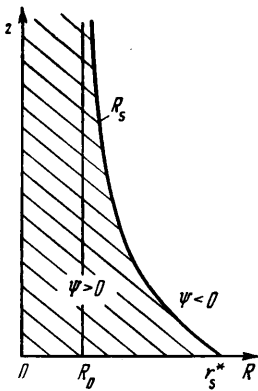
$$p^*(r^*) = -1/2 f^{*2}(r^*), \quad g^*(r^*) = B \gamma_1'(0) (-f^*)^\lambda (r^*)^{\lambda-1} \quad (5.6)$$

Начальные условия на основании (3.1) и (3.4) можно записать в виде

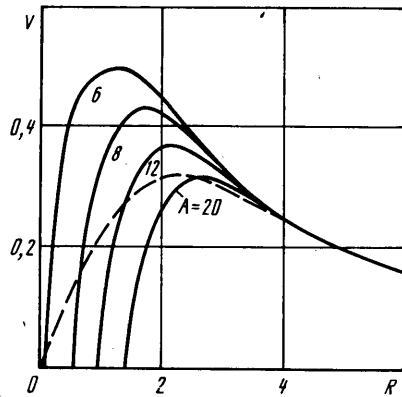
$$r^* u^* \sim \psi_0'(z^*/r^*), \quad r^* v^* \sim r^{*\lambda} \gamma_1(z^*/r^*), \quad r^* \rightarrow \infty \quad (5.7)$$

Покажем, что безотрывное развитие вязкого подслоя вполоть до оси $r^*=0$ невозможно из-за уменьшения радиальной составляющей вектора скорости внешнего потока $f^*(r^*)=U(r^*, 0)$ при $r^* \rightarrow 0$. В самом деле, при $r^* \rightarrow 0$ функция $h^*(r^*)$ в предположении безотрывности течения будет стремиться к некоторому конечному пределу $h^*(0)$, определяющему градиент осевой скорости на внешней границе подслоя. Тогда из предельной формы уравнения неразрывности (5.3) при $z^* \rightarrow \infty$, $f^* + 1/r^* f^* + h^* \cong 0$ получим, что $f^*(r^*)$ должна убывать пропорционально r^* , т. е. можно положить $f^*(r^*) \sim -k r^*$ при $r^* \rightarrow 0$. При этом $p^* = -f^* f^{* \prime}$ будет убывать пропорционально $-k^2 r^*$. Если теперь ввести функцию тока ψ^* и представить ее при $r^* \rightarrow 0$ в форме $\psi^* = r^{*\alpha} \psi_0^*(\eta^*)$, где $\eta^* = z^*/r^{*\beta}$, то из условия баланса сил инерции, трения и градиента давления нетрудно установить, что $\alpha=2$, $\beta=0$ и соответствующее уравнение для ψ_0^* будет иметь вид

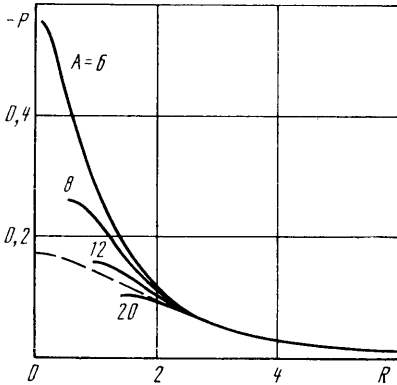
$$\psi_0^{*'''} + 2\psi_0^* \psi_0^{* \prime} - \psi_0^{*2} = -k^2$$



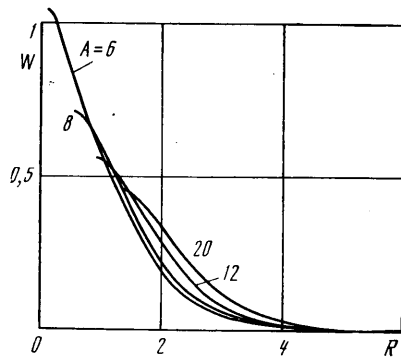
Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

Решения этого уравнения с граничными условиями $\psi_0^*(0) = \psi_0^{*'}(0) = 0$ и алгебраической асимптотикой при $z^* \rightarrow \infty$ не существует. Отсюда следует неизбежность отрыва вязкого подслоя при некотором значении $r^* = r_s^*$.

6. Течение вблизи оси. Невязкая асимптотика при $Z \rightarrow \infty$. Отрыв потока от твердой поверхности при конечном значении $R = r_s^*$ приводит к сложной структуре течения в области невязкого ядра $(R, Z) = O(1)$, схематически изображенной на фиг. 4. Решение соответствующей задачи потребовало бы совместного рассмотрения течений вне ($\Psi < 0$) и внутри ($\Psi > 0$) отрывной области с учетом их взаимодействия. Такая задача представляет большие математические трудности. Поэтому ограничимся рассмотрением асимптотического поведения соответствующего решения при $Z \rightarrow \infty$. Полученные при этом результаты, как мы увидим, будут справедливы не только на периферии пограничного слоя, но и на расстояниях порядка $\sqrt{\Gamma t}$ от твердой поверхности.

Существует две возможности: либо зона отрыва смыкается, либо остается открытой, образуя при $Z \rightarrow \infty$ двухъячеистую структуру течения (фиг. 4).

Начнем с рассмотрения первой из этих возможностей, т. е. рассмотрим функцию тока течения Ψ при $Z \rightarrow \infty$ и $R \rightarrow 0$. Уравнение (4.6) при $Z \rightarrow \infty$ с учетом $H(\Psi) = 0$ принимает вид обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 \Psi}{dR^2} - \frac{1}{R} \frac{d\Psi}{dR} = -C(\Psi)C'(\Psi) \quad (6.1)$$

Правая часть этого уравнения на основании (4.8) будет

$$-C(\Psi)C'(\Psi) \sim \lambda B^2 \gamma_1'^2(0) (-\Psi)^{2\lambda-1}, \quad \Psi \rightarrow 0- \quad (6.2)$$

Учитывая, что осевая скорость течения $W = -R^{-1}(\partial\Psi/\partial R)$ при $R \rightarrow 0$ должна оставаться величиной порядка единицы, нетрудно установить, используя (6.1) и (6.2), что функция тока Ψ при $R \rightarrow 0$ может быть представлена в виде следующего разложения:

$$\Psi = -aR^2 + \frac{B^2 \gamma_1'^2(0) a^{2\lambda-1}}{8(2\lambda-1)} R^{4\lambda} + o(R^3), \quad a = \text{const}, \quad a > 0$$

Окружная и осевая составляющие скорости при $R \rightarrow 0$ на основании (4.7), (4.8) и (6.3) соответственно будут

$$V \sim B \gamma_1'(0) a^\lambda R^{2\lambda-1}, \quad W \sim a - \frac{\lambda B^2 \gamma_1'^2(0) a^{2\lambda-1}}{2(2\lambda-1)} R^{4\lambda-2}$$

Но тогда

$$\frac{\partial W}{\partial R} \sim \frac{\partial P}{\partial R} \sim \frac{V^2}{R} = O(R^{4\lambda-3}), \quad R \rightarrow 0$$

т. е. радиальные градиенты давления и осевой скорости неограниченно растут при $R \rightarrow 0$ (так как $\lambda = 0,6797 < 3/4$). Это указывает на необходимость учета вязкости вблизи оси. Вторая возможность — течение с открытой зоной отрыва, радиус которой стремится к некоторому значению $R_0 = O(1)$ при $Z \rightarrow \infty$.

Если ввести переменную $X = R - R_0$ и вновь воспользоваться асимптотическим представлением (6.2), то соответствующее решение уравнения (6.1) при $X \rightarrow 0$ и выражения для окружной и осевой составляющих скорости (с учетом (4.8)) будут

$$\Psi = -aX - \frac{a}{2R_0} X^2 + \frac{B^2 \gamma_1'^2(0) a^{2\lambda-1}}{2(2\lambda+1)} X^{2\lambda+1} + o(X^3)$$

$$V = \frac{B \gamma_1'(0) a^\lambda}{R_0} X^\lambda + o(X), \quad W = \frac{a}{R_0} - \frac{B^2 \gamma_1'^2(0) a^{2\lambda-1}}{2R_0} X^{2\lambda} + o(X^2), \quad a = \text{const} > 0$$

Таким образом, при $X \rightarrow 0$ градиенты давления $dP/dX = V^2/R_0$ и осевой скорости dW/dX будут порядка $X^{2\lambda-1}$, т. е. на свободной поверхности тока $\Psi = 0$ они обращаются в нуль.

Полученные выражения содержат две постоянные: a и R_0 , одна из которых остается произвольной.

Имея в виду численное интегрирование уравнения (6.1), рассмотрим поведение его решения при $R \rightarrow \infty$. Используя представление правой части этого уравнения в виде (4.9), находим, что при $R \rightarrow \infty$, т. е. при $\Psi \rightarrow -1,2$, оно принимает вид

$$\frac{d^2\Psi}{dR^2} - \frac{1}{R} \frac{d\Psi}{dR} \cong 2,56(\Psi + 1,2) + O(\Psi + 1,2)^2$$

Тогда нетрудно найти, что

$$\Psi + 1,2 \cong A e^{-1,6R} (R^{1/2} + 0,2344R^{-1/2} + O(R^{-3/2})), \quad R \rightarrow \infty$$

где A — произвольная постоянная.

Численное интегрирование (6.1) удобно вести, задаваясь A , от некоторого достаточно большого значения R . При этом каждому значению A будет соответствовать значение R_0 , определяемое условием $\Psi(R_0) = 0$. Таким образом, получается однопараметрическое семейство решений, соответствующих различным значениям радиуса зоны отрыва или «глаза» вихря.

К сожалению, какого-либо простого правила отбора одного из решений этого семейства указать нельзя. Для этого было бы необходимо обратиться к анализу вязкой структуры слоев смешения, отделяющих зону отрыва от внешнего вихревого потока, и исследованию течения в области их смыкания при $Z=O(\sqrt{\nu t}/\varepsilon^2)$. Поэтому ниже приведены результаты расчетов функций течения V , W и P для ряда значений A . Наиболее примечательной особенностью полученных решений является поведение окружной составляющей вектора скорости (фиг. 5). Взаимодействие вихря с пограничным слоем приводит к ее уменьшению до нуля в «глазу» вихря и увеличению в некотором диапазоне изменения $R>R_0$ (тем большему, чем меньше R_0) по сравнению со слоем бесконечной вихревой нити (штриховая линия). Физической причиной этого является конвективный перенос завихренности в пограничном слое в радиальном направлении, препятствующий процессу ее распространения за счет диффузии. Такое перераспределение $V(R)$ приводит, как показано на фиг. 6, к существенному уменьшению давления в ядре вихря по сравнению со значением $P\cong-0,17$ на оси бесконечной диффундирующей вихревой нити. Распределение осевой составляющей вектора скорости показано на фиг. 7. Как видно, ее значения вблизи границы ядра даже превосходят значения окружной скорости.

Все эти эффекты наблюдаются в течениях типа торнадо [1, 9, 10]. Более подробно о сопоставлении полученных результатов с имеющимися наблюдениями сказано в заключительном разделе работы.

7. Течение вблизи оси. Дальняя асимптотика. Течение в области с радиальным размером порядка $\sqrt{\nu t}$ остается невязким вплоть до очень больших расстояний от твердой поверхности. Простая оценка показывает, что, например, осевая составляющая вектора скорости $v_z=O(\Gamma/\sqrt{\nu t})$ может измениться на свой порядок лишь на расстоянии $z^0=O(\sqrt{\nu t}/\varepsilon^2)=O(\Gamma/\sqrt{t}/\nu)$, когда сравниваются по порядку величины инерционный ($v_z\partial v_z/\partial z^0$) и вязкий ($\nu\partial^2 v_z/\partial z^{02}$) члены уравнения количества движения. На этих расстояниях слои смешения, отделяющие область отрыва радиуса $r^0=\sqrt{\nu t}R_0$ от области внешнего вихревого течения и расширяющиеся с ростом z^0 , приобретут толщину порядка $\sqrt{\nu t}$. На этих же расстояниях течение перестает быть квазистационарным. Таким образом, следующей областью течения, подлежащей рассмотрению, является область, где независимые переменные

$$R^*=R=r^0/\sqrt{\nu t}, \quad Z^*=\varepsilon^2 Z=z^0\sqrt{\nu}/(\Gamma\sqrt{t}) \quad (7.1)$$

имеют порядок единицы. Искомые функции течения представляются здесь в виде

$$v_r = \sqrt{\frac{\nu}{t}} U^*, \quad v_\theta = \frac{\Gamma}{\sqrt{\nu t}} V^*, \quad v_z = \frac{\Gamma}{\sqrt{\nu t}} W^*, \quad \frac{p-p_\infty}{\rho} = \frac{\Gamma^2}{\nu t} P^* \quad (7.2)$$

где безразмерные переменные, отмеченные звездочкой, будут также порядка единицы.

Подставляя (7.1) и (7.2) в исходные уравнения Навье – Стокса, получим следующую систему:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P^*}{\partial R^*} &= \frac{V^{*2}}{R^*} \\ \left(U^* - \frac{1}{2} R^* \right) \frac{\partial V^*}{\partial R^*} + \left(W^* - \frac{1}{2} Z^* \right) \frac{\partial V^*}{\partial Z^*} + \frac{U^* V^*}{R^*} - \frac{1}{2} V^* &= \frac{\partial^2 V^*}{\partial R^{*2}} + \frac{1}{R^*} \frac{\partial V^*}{\partial R^*} - \frac{V^*}{R^{*2}} \\ \left(U^* - \frac{1}{2} R^* \right) \frac{\partial W^*}{\partial R^*} + \left(W^* - \frac{1}{2} Z^* \right) \frac{\partial W^*}{\partial Z^*} - \frac{1}{2} W^* + \frac{\partial P^*}{\partial Z^*} &= \frac{\partial^2 W^*}{\partial R^{*2}} + \frac{1}{R^*} \frac{\partial W^*}{\partial R^*} \\ \frac{\partial R^* U^*}{\partial R^*} + \frac{\partial R^* W^*}{\partial Z^*} &= 0 \end{aligned} \quad (7.3)$$

Начальными и граничными условиями для этой системы будут условия на оси $R^*=0$, где

$$U^* = V^* = \partial W^* / \partial R^* = \partial P^* / \partial R^* = 0$$

а также условия срачивания с окружающими областями, при $R^* \rightarrow \infty$ и $Z^* \rightarrow 0$. Здесь не будут выписываться эти условия, так же как и решаться система (7.3). Заметим только, что именно на протяжении рассматриваемой области с размерами, определяемыми (7.1), будут выработываться терминальные профили $V_0^*(R)$ и $W_0^*(R)$ окружной и осевой составляющих скорости. Для их получения достаточно рассмотреть решение (7.3) при $Z^* \rightarrow \infty$. Соответствующие уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} V_0^{**} + \left(\frac{1}{R^*} + \frac{1}{2} R^* \right) V_0^{*'} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{R^{*2}} \right) V_0^* &= 0 \\ W_0^{**} + \left(\frac{1}{R^*} + \frac{1}{2} R^* \right) W_0^{*'} + \frac{1}{2} W_0^* &= 0 \end{aligned} \quad (7.4)$$

а их решениями будут

$$V_0^* = \frac{1}{R^*} (1 - e^{-R^{*2}/4}), \quad W_0^* = \text{const} e^{-R^{*2}/8} I_0\left(\frac{R^{*2}}{8}\right)$$

Здесь $I_0(x)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода.

Решение для окружной скорости, как и следовало ожидать, соответствует (2.4). Осевая скорость имеет терминальный профиль, для которого уменьшение W^* при $R^* \rightarrow \infty$ происходит по закону $1/R^*$ (так как $I_0(x) \sim e^x/\sqrt{2\pi x}$ при $x \rightarrow \infty$). Таким образом, затухание осевой составляющей вектора скорости на предельно больших расстояниях от твердой поверхности, так же как и окружной скорости, происходит лишь за счет процесса вязкой диффузии.

Более подробное обсуждение свойств решений системы (7.3) вряд ли представляет какой-либо практический интерес из-за слишком больших расстояний, на которых они реализуются. Так, если иметь в виду атмосферные вихри типа торнадо, то эти расстояния будут порядка 10^2 км. В действительности уже на высотах порядка 1 км становится необходимым учет влияния силы тяжести и течение перестает быть автомодельным.

8. Заключительные замечания. Решение задачи о течении, обусловленном взаимодействием нестационарного (диффундирующего) вихря с твердой поверхностью, по-видимому, более всего отражает свойства таких реальных явлений, как торнадо или смерч. Поэтому интересно сопоставить полученные результаты с имеющимися наблюдениями.

Если говорить о качественной стороне явления, то полученные в этой работе результаты объясняют следующие, обычно приводимые в описаниях торнадо особенности (см. [1, 9–11]). Наличие резкой границы, отделяющей зону «покоя», или «глаз» вихря, от окружающей зоны больших окружных и осевых скоростей; весьма низкие значения давления в центре вихря; наличие осевых (вертикальных) скоростей, сравнимых с окружными уже на достаточно малых расстояниях от земной поверхности, и их резкое ниспадение в радиальном направлении; очень большие продольные размеры вихревого образования (особенно надводного смерча) по сравнению с его диаметром.

Для количественного сопоставления результатов теории и наблюдений обратимся к одному из наиболее полных описаний торнадо, приведенному в [9].

Прежде всего сопоставим реально наблюдаемые окружные скорости и их расчетные значения. Согласно проведенным измерениям, максимум окружной скорости составлял 75 м/с на радиусе 40 м. Таким образом, величина циркуляционного параметра составляла не менее 3000 м²/с. Наблюдения проводились в течение 19 мин, так что за характерное время можно принять 1000 с. Эффективное значение коэффициента турбулентной кинематической вязкости для воздуха обычно принимают от 1 до 10 м²/с в зависимости от масштабов вихря [5]. Если принять наименьшее из этих значений, то величина $\Gamma/\nu t$ будет около 100 м/с и безразмерная окружная скорость V составит $\approx 0,75$, что намного превышает ее максимальное значение $\approx 0,32$ для случая диффузии изолированного вихря. Это может рассматриваться как подтверждение реальности описанного выше механизма усиления окружной скорости за счет влияния земли.

Другое важное наблюдение, отмеченное в [9], это значение максимума вертикальной скорости $v_z = 70$ м/с на высоте 40 м, т. е. при $Z = z^0/\sqrt{\nu t}$ немногим больше единицы ($\approx 1,25$), что также соответствует выводам теории. Наконец, в описании [9] указывается на весьма медленное изменение радиуса вихря с высотой: $dr^0/dz^0 < 0,1$.

В [1] приводятся данные о торнадо значительно большей мощности и размеров, с максимальными окружными скоростями до 200 м/с и диаметром до 500 м. Приняв эти данные, а также значения $t = 1$ ч и $\nu = 10$ м²/с (соответствующие столь крупным масштабам явления), получим то же максимальное значение $V \approx 0,75$. В этом описании говорится и об очень большой высоте вихревого столба $H = 3$ км.

Хотя приведенные данные весьма приближены из-за сложности натуральных измерений параметров торнадо, по-видимому, они все же могут рассматриваться как подтверждающие полезность использования описанной теории вязкого взаимодействия нестационарного вихря с твердой поверхностью в математических моделях атмосферных вихрей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lugt H. J.* Vortex flow in nature and technology. N. Y.: J. Wiley, 1983. 297 p.
2. *Гольдштик М. А.* Вихревые потоки. Новосибирск: Наука, 1981. 366 с.
3. *Гольдштик М. А.* Одно парадоксальное решение уравнений Навье – Стокса // ПММ. 1960. Т. 24. В. 4. С. 610–621.
4. *Burggraf O. R., Stewartson K., Belcher R.* Boundary layer induced by a potential vortex // *Phys. Fluids*. 1971. V. 14. № 9. P. 1821–1833.
5. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. Т. 2. М.: Физматгиз, 1963. 727 с.
6. *Rott N., Lewellen W. S.* Boundary layers and their interactions in rotating flows // *Progress in Aero. Sci.* N. Y.: Pergamon Press, 1966. V. 7. P. 111–144.
7. *Van Dyke M. D.* Perturbation methods in fluid mechanics. Stanford Calif.: Parabolic Press, 1975. 271 p.
8. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости: Пер. с англ. М.: Мир, 1973. 758 с.
9. *Morton B. R.* Geophysical vortices // *Progress in Aero. Sci.* N. Y.: Pergamon Press, 1966. V. 7. P. 145–194.
10. *Наливкин Д. В.* Смерчи. М.: Наука, 1984. 112 с.
11. *Penner S. S.* Elementary considerations of the fluid mechanics of tornadoes and hurricanes // *Astronautica Acta*. 1972. V. 17. № 4. P. 351–362.

Москва

Поступила в редакцию
27.X.1988