

УДК 532.527

ГУРЖИЙ А. А., КОНСТАНТИНОВ М. Ю.

О СТОЛКНОВЕНИИ ДВУХ КОАКСИАЛЬНЫХ ВИХРЕВЫХ КОЛЕЦ В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

В настоящее время концепция вихревой динамики плодотворно используется для описания различных движений жидкости. В ряде работ [1, 2] эволюция осесимметричных течений представлялась в виде взаимодействия системы коаксиальных вихревых колец в идеальной жидкости. Кроме того, исследование такого взаимодействия представляет самостоятельный интерес и содержит множество интересных случаев. Особенно подробно рассматривались задачи о взаимном движении коаксиальных колец в одном направлении. Привлекательность таких задач состоит в возможности образования так называемой чехарды колец [3–5], которую можно наблюдать при помощи самых простых устройств [5].

Менее изучена задача о взаимодействии движущихся навстречу друг другу коаксиальных колец. В случае полностью симметричных колец одинаковой по величине в противоположной по знаку циркуляции процесс взаимодействия будет состоять в безграничном увеличении их радиусов при бесконечном асимптотическом приближении колец к их плоскости симметрии [3, 6]. В других случаях возможно либо проникновение одного кольца внутрь другого, либо явление взаимного захвата, сопровождающееся чехардой колец. Несмотря на кажущуюся простоту явления, в современной литературе отсутствует детальный анализ задачи о столкновении двух коаксиальных вихревых колец.

В данной работе классифицировано встречное движение двух коаксиальных вихревых колец в зависимости от их начальных параметров.

1. Пусть в безграничной идеальной жидкости, покоящейся на бесконечности, имеется на расстоянии $Z_{12} = |Z_1 - Z_2|$ два тонких круговых кольца радиусов R_1 и R_2 . Кольца имеют поперечные круговые сечения радиусов a_1 и a_2 и противоположные по знаку циркуляции κ_1 и κ_2 . Предполагается, что на всем протяжении движения сохраняется условие малости поперечного сечения колец $a_i \ll R_i$ ($i=1, 2$). Требуется определить в любой момент времени положение в пространстве каждого вихревого кольца.

Рассмотрим осесимметричное движение несжимаемой жидкости в стационарной системе координат, движущейся вместе с вихревыми кольцами. Тогда уравнения относительно функции тока Ψ в цилиндрических координатах (r, φ, z) имеют вид

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} - r^2 f_i(\Psi) = 0 \quad (i=1, 2) \quad (1.1)$$

где для областей, занятых кольцами, $f_i(\Psi) \neq 0$, а везде вне области колец $f_i(\Psi) = 0$. Функция Ψ и ее производные непрерывны на поверхности колец.

Для частного случая постоянного распределения завихренности внутри поперечных сечений вихревых колец $f_i(\Psi) = \text{const}$ решение системы (1.1) при условии сохранения кольцами в процессе движения постоянного объема

$$a_i^2 R_i = \text{const} \quad (1.2)$$

можно представить в виде обыкновенных дифференциальных уравнений [7]

$$\begin{aligned} Z_i &= \frac{\kappa_i}{4\pi R_i} \left(\ln \frac{8R_i}{a_i} - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{\kappa_i R_i} \frac{\partial U}{\partial R_i} \\ R_i &= - \frac{1}{\kappa_i R_i} \frac{\partial U}{\partial Z_i} \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} U &= \frac{\kappa_1 \kappa_2}{2\pi} \sqrt{R_1 R_2} \left[\left(\frac{2}{k} - k \right) \mathbf{K}(k) - \frac{2}{k} \mathbf{E}(k) \right] \\ k^2 &= \frac{4R_1 R_2}{(Z_1 - Z_2)^2 + (R_1 + R_2)^2} \end{aligned}$$

где $\mathbf{K}(k)$ и $\mathbf{E}(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода, а точка над символами означает дифференцирование по времени.

Уравнения (1.3) отражают не просто кинематику процесса, а являются следствием динамических уравнений Эйлера. Они получены путем определения суммарного значения функции тока на поверхности каждого из колец, обусловленного распределением завихренности от R_1 и R_2 . Скорость каждого кольца, согласно (1.3), состоит из самоиндуктивной и наведенной со стороны другого кольца скоростей. При вычислении компоненты наведенной скорости в выражении для функции U отсутствуют в явном виде параметры сечения кольца. Здесь вихревое кольцо рассматривается как круговая вихревая нить интенсивности κ . При этом, так как

$$\kappa = \int_s \omega dS$$

элементы площади кругового сечения кольца входят в величину интенсивности завихренности. Единственным предположением предлагаемой модели является требование о сохранении кольцами кругового сечения на всем протяжении движения. Для модельных оценок явления такое предположение может быть приемлемым [1, 6].

Система нелинейных уравнений (1.3) обладает двумя независимыми инвариантами, выражающими законы сохранения импульса и кинетической энергии

$$\kappa_1 R_1^2 + \kappa_2 R_2^2 = P = \text{const} \quad (1.4)$$

$$\frac{\kappa_1^2 R_1}{4\pi} \left(\ln \frac{8R_1}{a_1} - \frac{7}{4} \right) + \frac{\kappa_2^2 R_2}{4\pi} \left(\ln \frac{8R_2}{a_2} - \frac{7}{4} \right) + U = W = \text{const} \quad (1.5)$$

При исследовании процесса взаимодействия вихревых колец указанные инварианты (вывод которых см., например, в [7]) играют чрезвычайно важную роль, что и будет показано ниже.

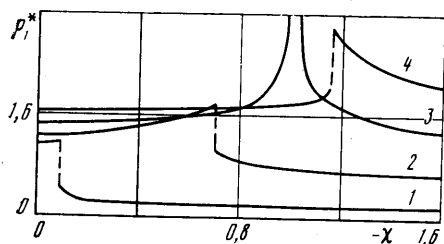
2. В качестве начальных определяющих параметров задачи будем рассматривать следующие величины

$$\chi = \kappa_1 / \kappa_2; \quad \rho_0 = R_1^\circ / R_2^\circ; \quad \xi_0 = |Z_1^\circ - Z_2^\circ| / R_2^\circ$$

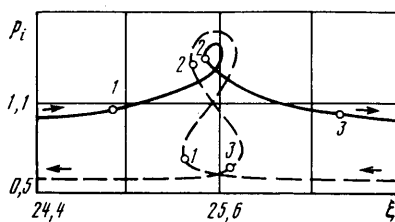
Знак градус означает значение параметра в момент времени $t=0$.

Система уравнений (1.2) — (1.3) решалась численно. Использовалась программа решения задачи Коши, основанная на формулах Рунге — Кутты — Фельберга четвертого порядка. Точность вычислений контролировалась соблюдением законов сохранения (1.4) и (1.5). Все линейные параметры были отнесены к R_2° , а в качестве масштаба времени использовалось выражение $\tau = t \kappa_2 / R_2^{\circ 2} \pi$.

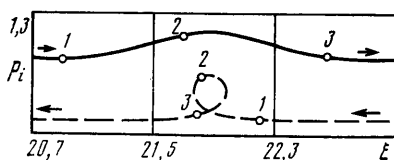
Анализ проблемы проведем для ситуации, когда кольца в начальный момент времени независимо от своих радиусов имеют равные отношения



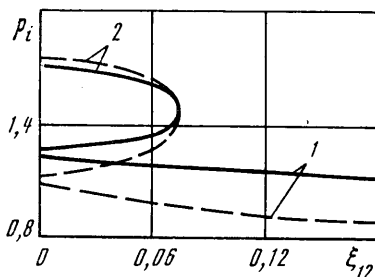
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

$R_1^\circ/a_1^\circ = R_2^\circ/a_2^\circ = 100$. Изменения начальных отношений R_i°/a_i° в широких пределах от 10 до 1000 слабо сказываются на относительном характере поведения системы. Кроме того, условимся, что, исследуя характер движения для всевозможных комбинаций $\chi < 0$ и ρ_0 , будем удерживать постоянным значение величины ξ_0 . В рассматриваемом случае было выбрано значение $\xi_0 = 50$, с тем чтобы в начальный момент времени кольца слабо влияли друг на друга.

Все многообразие столкновений двух вихревых колец при указанных параметрах ξ_0 и R_i/a_i можно классифицировать при помощи диаграммы, приведенной на фиг. 1. Координатами здесь приняты параметры χ и ρ_1^* . Параметр ρ_1^* означает максимальное значение безразмерного радиуса первого кольца ρ_1 в момент столкновения колец. Каждой кривой соответствует конкретное значение начального отношения ρ_0 . (На фиг. 1 цифрами 1—4 показаны зависимости $\rho_1^*(\chi)$ для $\rho_0 = 0,2; 0,6; 1,0; 1,4$)

Совместное исследование форм кривых на фиг. 1 и конкретных траекторий движения позволяет выделить четыре возможных случая столкновения движущихся навстречу друг другу вихревых колец.

Первым случаем столкновения является хорошо известный и изученный случай встречного движения двух совершенно симметричных относительно плоскости вихревых колец. Начальные параметры колец имеют значения $\chi = -1$, $\rho_0 = 1$. При сближении колец их радиусы бесконечно увеличиваются, а расстояние между ними непрерывно уменьшается. Но кольца никогда не проходят одно через другое. Малейшее отклонение одного из параметров от предельной ситуации $\chi = -1$, $\rho_0 = 1$ приводит к взаимному проникновению колец.

Второй случай столкновения происходит при начальных параметрах χ и ρ_0 , соответствующих участку кривой $\rho_1^*(\chi)$, расположенному слева от линий разрыва на фиг. 1. При этом кольцо 1 пропускает внутрь себя кольцо 2. На фиг. 2 в качестве иллюстрации приведены изменения во времени радиусов $\rho_2(t)$ (сплошная линия) и $\rho_1(t)$ (пунктирная линия) для случая столкновения колец $\chi = -0,6$, $\rho_0 = 0,6$. Для того чтобы можно было оценить скорости движения колец, на траекториях цифрами 1—3 обозначены безразмерные моменты времени $\tau = 15,5; 16,0; 16,5$.

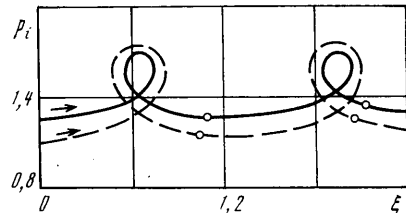
Третий случай столкновения отличается тем, что теперь кольцо 1 про-

никает внутрь кольца 2. Область начальных параметров, определяющих данный тип взаимодействия, лежит на кривой $\rho_1^*(\chi)$ справа от линии разрыва. На фиг. 3 приведена картина взаимодействия колец при $\chi = -0,8$, $\rho_0 = 0,6$, характерная для этого случая. Цифрами 1-3 здесь обозначены моменты времени $\tau = 13,0; 13,5; 14,0$.

Как во втором, так и в третьем случае столкновения кольцо с большой самоиндуцированной начальной энергией всегда проникает внутрь более слабого кольца.

При значениях χ и ρ_0 , близких к точкам разрыва на кривых $\rho_1^*(\chi)$, кольца вычерчивают при сближении спиралевидные траектории. Это объясняется тем, что начальные величины самоиндуцированных энергий обоих колец примерно равны и проблемы взаимного проникновения происходят сложно. В ситуациях, когда начальные энергии колец существенно различаются, взаимное проникновение колец происходит плавно и траекторий в виде спиралей не наблюдается.

Последний, четвертый случай столкновения состоит в явлении взаимного захвата. При этом кольца, несмотря на противоположные знаки циркуляций,



Фиг. 5

будут двигаться в одном направлении. Необходимо подчеркнуть, что взаимный захват возможен только при очень малых значениях ξ_0 . Области параметров χ и ρ_0 , соответствующие такому явлению, можно также определить из фиг. 1. Для этого необходимо построить фазовые траектории (зависимости $\rho_1(\xi)$ и $\rho_2(\xi)$ от расстояния между кольцами $\xi_{12} = |\xi_1 - \xi_2|$) для конкретных начальных значений χ и ρ_0 , при которых имеют место разрывы кривых $\rho_1^*(\chi)$ (фиг. 1). Одна из таких ситуаций приведена на фиг. 4 для колец, имеющих $\chi = -0,695$ и $\rho_0 = 0,6$. Для указанной области начальных параметров (отметим, что начальное расстояние ξ_0 все время равно 50) получаем истинные фазовые кривые, обозначенные на фиг. 4, цифрами 1, и замкнутые фазовые кривые, обозначенные цифрами 2. Получение фазовых траекторий в таком виде возможно только непосредственно из законов сохранения (1.4) и (1.5). В данном случае форма кривых 2 свидетельствует о существовании в ограниченных областях неоднозначности P и W по начальным параметрам ρ_0 и ξ_0 . Дифференцируя детерминированную по времени систему (1.3), получим только кривые 1 на фиг. 4. Кривые 1 и 2 соединяются при значениях $\xi_{12} = 0$ в плоскости мнимых значений ρ , ξ . Получение замкнутых кривых в плоскости действительных значений ρ , ξ из уравнений (1.4), (1.5) свидетельствует о том, что их параметрам соответствуют такие же значения импульса и энергии, что и параметрам кривых 1. Однако, согласно фиг. 4, эти кривые определяются совершенно другими значениями ρ_0 и ξ_0 .

Выбрав теперь в качестве начальных параметров ρ_0 , ξ_0 значения, лежащие на кривых 2, получим, решая систему (1.2)–(1.3), траектории движения колец, иллюстрирующие явление взаимного захвата (фиг. 5). В конкретном случае начальными параметрами принимались $\chi = -0,695$; $\rho_1 = 1,13$; $\rho_2 = 1,28$; $\xi_0 = 0$. Точками на кривых обозначены интервалы $\Delta\tau = 0,5$, отсчитываемые с начала движения. Максимальное и минимальное значения ρ_1^* на участках разрыва диаграмм фиг. 1 отвечают максимальным и минимальным значениям радиусов $\rho_1(t)$ для случая взаимного захвата.

Суммируя изложенное, подчеркнем, что в данной работе рассмотрены практически все возможные случаи взаимодействия двух вихревых колец с противоположными знаками циркуляций в идеальной жидкости при одинаковых начальных отношениях $R_i^0/a_i^0 = 100$. Варьирование величины этого отношения не изменит общей картины взаимодействия; различия будут

наблюдаться лишь в конкретных числовых значениях параметров движения.

Авторы выражают благодарность В. В. Мелешко за полезные обсуждения результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Acton E. A.* A modelling of large eddies in an axisymmetric jet // *J. Fluid Mech.* 1980. V. 98. № 1. P. 1–31.
2. *Chung J. N., Trout T. R.* Simulation of particle dispersion in a axisymmetric jet // *J. Fluid Mech.* 1988. V. 189. P. 192–222.
3. *Бэгчелор Дж.* Введение в динамику жидкости: Пер. с англ. М.: Мир. 1973. 758 с.
4. *Бояринцев В. И., Савин А. С., Левченко Е. С.* Численное решение задачи о совместном движении двух соосных вихревых колец // Турбулентные струйные течения: Тез. докл. 5-го Всесоюз. совещ. Таллин: Ин-т термодинамики и электрофизики АН ЭССР, 1985. Ч. 1. С. 222–226.
5. Альбом течений жидкости и газа/Сост. Ван-Дайк М.: Пер. с англ. М.: Мир. 1986. 180 с.
6. *Yamada H., Kohsaka T., Yamabe H., Matsui T.* Flowfield produced by a vortex ring near a plane wall // *J. Phys. Soc. Japan.* 1982. V. 51. № 5. P. 1663–1670.
7. *Гуржий А. А., Константинов М. Ю., Мелешко В. В.* Взаимодействие коаксиальных вихревых колец в идеальной жидкости // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1988. № 2. С. 78–84.

Киев

Поступила в редакцию
30.V.1988