

УДК 532.517.4

БОРИСОВ А. Г., КУЗНЕЦОВ В. Р., ШЕДОГУБОВ Ю. М.

ВЛИЯНИЕ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ ЭФФЕКТОВ НА КРУПНОМАСШТАБНУЮ СТРУКТУРУ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ТЕЧЕНИЯХ СТРУЙНОГО ТИПА

При замыкании уравнений, описывающих турбулентное течение жидкости, используется ряд феноменологических соображений, например, предположения о градиентном типе процессов переноса, автомодельности спектра, о малости отклонений от изотропии и т. д. Эти предположения справедливы, если масштаб турбулентности много меньше характерного масштаба осредненного течения l . Однако возмущения с размером порядка l обладают значительной энергией, зависят от граничных условий, долго сохраняются и существенно влияют на процессы переноса [1, 2]. Поэтому модели турбулентности, использующие приведенные соображения, приводят к значительным ошибкам (доходящим в отдельных случаях до 100% и больше). Следовательно, изучение динамики крупномасштабных возмущений необходимо для создания более точных методов расчета различных течений.

Крупномасштабные возмущения часто отождествляются с так называемыми когерентными структурами, т. е. неслучайными или не вполне случайными колебаниями скорости [2], исследованию которых посвящена обширная литература. Вопрос о существовании в развитом турбулентном потоке неслучайных колебаний является дискуссионным, поскольку все корреляционные функции затухают на бесконечности. Поэтому далее будут употребляться термины структура или возмущение. Почти все методы экспериментального исследования структур основаны либо на визуализации течения, что дает лишь качественные сведения, либо на условном осреднении данных измерений скорости, что предполагает наличие априорной информации о распределении скорости внутри структуры [2]. Поэтому первая цель работы заключалась в поиске метода экспериментального выделения структур, дающего количественную информацию. Все исследования проведены в четырех в среднем плоских течениях: следе, слое смешения, свободной и пристеночной струе.

Вторая цель возникла при анализе ряда литературных данных, косвенно свидетельствующих о том, что в развитом турбулентном потоке многие особенности структур описываются уравнениями Эйлера, линеаризованными относительно возмущений. Так, исследование моногармонических колебаний, искусственно возбуждаемых в слое смешения, следа и круглой струе, показало, что распределение их амплитуд и фаз хорошо описывается линейной теорией [3–5]. В [6, 7] установлено, что уменьшение интенсивности роста толщины слоя смешения dl/dx (x — направление течения), наблюдающееся с ростом числа Маха, удается хорошо описать, если эмпирические постоянные, входящие в уравнение для турбулентной вязкости, определенным образом связать с инкрементом нарастания малых возмущений.

В следе за цилиндром и в следе за двумя близко поставленными цилиндрами с тем же суммарным коэффициентом сопротивления интенсивность турбулентности отличается на 30–40% и на расстояниях вплоть до 700 калибров не было замечено тенденции к уменьшению этой разницы [4]. В слое смешения двух ламинарных потоков, в зависимости от состояния пограничного слоя на разделяющей эти потоки пластине (ламинарный или турбулентный), скорость расширения слоя смешения различается на 20–30% и эта разница сохраняется на расстояниях до 2000 δ , где δ — начальная толщина пограничного слоя [8]. Эти данные указывают на сильное влияние начальных условий, что характерно для линейных или почти линейных задач.

1. Для выделения структур использовалось разложение случайного поля пульсаций скорости в ряд (интеграл) по системе ортогональных функций со случайными коэффициентами, которые подбирались так, чтобы ряд наиболее компактно описывал все реализации поля пульсаций в разных течениях [9]. Такая система функций должна каждый раз

подбираться заново. Для пояснения рассмотрим в каком-либо из упомянутых выше течений распределение продольной компоненты скорости u в зависимости от поперечной координаты y . Здесь ось x направлена вдоль направления течения, а вдоль оси z турбулентность однородна; компоненты пульсаций скорости u, v, w соответствуют направлениям x, y, z . Таким образом, рассматриваемое распределение $u(y)$ эквивалентно «срезу» течения в плоскости $x-z$. Пусть

$$u(y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n f_n(y), \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_n^2 dy = 1 \quad (1.1)$$

Требование наилучшей аппроксимации случайного процесса u системой функций f_n заключается в том, чтобы функционал J

$$J = \left\langle \left(\int_{-\infty}^{\infty} u f dy \right)^2 \right\rangle$$

имел локальный максимум при $f=f_n$. Чтобы найти такую систему, следует решить однородное интегральное уравнение Фредгольма второго рода [10]

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(y, y_1) f_n(y_1) dy_1 = E_n f_n(y), \quad R = \langle u(y) u(y_1) \rangle \quad (1.2)$$

где R — корреляционная функция, E_n — собственные числа. Так как ядро этого уравнения R симметрично, то собственные функции f_n ортогональны и

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} E_n f_n(y) f_n(y_1), \quad \int_{-\infty}^{\infty} R(y, y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \langle u^2(y) \rangle dy = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \quad (1.3)$$

С другой стороны, из (1.1) имеем

$$R = \sum_{n,m=1}^{\infty} \langle A_n A_m \rangle f_n(y) f_m(y_1) \quad (1.4)$$

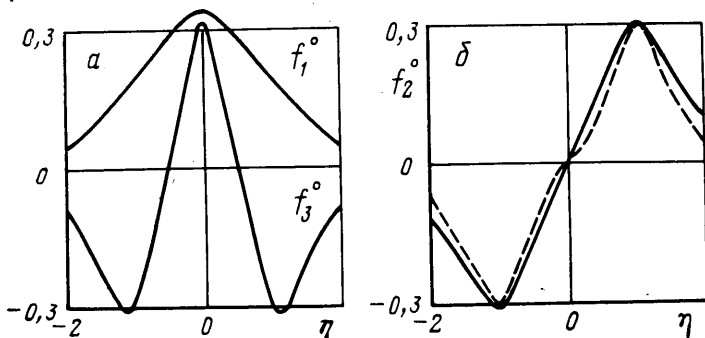
Эта формула согласуется с (1.3) только, если $\langle A_n A_m \rangle = 0$, при $n \neq m$, и $\langle A_n^2 \rangle = E_n$, т. е. A_n — некоррелированные функции времени t и координат x, z , что также является очевидным требованием наилучшей аппроксимации процесса $u(y)$ рядом (1.1). При этом условии система базисных функций в (1.1) является единственной [10]. Таким образом, (1.1) есть обобщение представления, известного из теории однородной турбулентности. В последнем случае $R(y, y_1) = R(y - y_1)$, и тогда решение уравнения (1.2) есть

$$f_n(y) = \exp(iny), \quad E_n = \int_{-\infty}^{\infty} R(r) \exp(-inr) dr, \quad r = y - y_1$$

где параметр n меняется непрерывно, т. е. $u(y)$ разлагается в интеграл Фурье.

В рассматриваемых течениях $\langle u^2 \rangle \sim y^{-4}$ при $|y| \rightarrow \infty$ [1], поэтому корреляционная функция R интегрируема с квадратом

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R^2(y, y_1) dy_1 dy < \infty$$



Фиг. 1

Интегральные уравнения, ядра которых удовлетворяют такому условию, имеют дискретный спектр (последовательность E_n), следовательно, поперечные спектры струйных течений всегда дискретны [11], и справедливо представление $u(y)$ в виде ряда.

Для упорядочивания функций f_n , называемых далее модами, удобно ввести величину

$$k_n = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{df_n}{dy} \right)^2 dy \right]^{-0,5}$$

которая совпадает с волновым числом, если $f = \exp(iky)$. Таким образом, турбулентное движение представимо в виде суперпозиции отдельных «элементарных» движений, описываемых модами f_n . Характерный масштаб каждой моды есть $1/k_n$, а энергия — E_n (последнее вытекает из второй формулы в (1.3)).

2. В отличие от однородной турбулентности, в неоднородном потоке моды заранее не известны, и поэтому исследование связано с измерениями корреляционной функции, что затрудняет использование обобщения разложения (1.1) для трехмерных векторных полей [9] (необходимо измерять зависимость всех компонент корреляционного тензора от всех координат). Далее исследовался одномерный спектр распределения $u(y)$.

Корреляция $R(y, y_1)$ измерялась с помощью термоанемометрической аппаратуры в отдельных точках, интегрирование в (1.2) заменялось суммированием, а получающаяся при этом система линейных однородных уравнений решалась численно. Более подробно методика измерений и обработки полученных данных описана в [11]. Там же показано, что при увеличении размерности матрицы системы с 9×9 до 17×17 первые три собственных числа меняются не более чем на 10% (форма первых трех мод также меняется слабо). В данной работе при расчетах использовались матрицы размерности 15×15 или 33×33 .

На фиг. 1 приведены результаты расчета собственных функций в следе за цилиндром диаметра $d=4$ мм при скорости набегающего потока $U_0=7,8$ м/с ($Re=U_0 d/\nu=2300$) в сечении $x/d=132$ (сплошные кривые). Результаты расчета E_n и n представлены ниже. Здесь вместо значений E_n , k_n , f_n , y используются безразмерные величины $E_n^0 = E_n/U_m^2 l$, $k_n^0 = k_n l$, $f_n^0 = f_n/\sqrt{l}$, $\eta = y/l$, где U_m — максимальный дефект скорости в данном сечении, l — расстояние от плоскости симметрии следа до точки, в которой дефект скорости равен $0,5 U_m$.

Аналогичные результаты получены для слоя смещения и плоской струи, а также для следа за цилиндром при $Re=2 \cdot 10^2 - 10^4$ и $x/d=10-130$. Во всех случаях первая мода не имеет нулей и обладает одним экстремумом (или тремя близко расположенными экстремумами), вторая мода имеет один нуль и два экстремума, третья — два нуля и три экстремума

(эти данные частично опубликованы в [6, 11]), т. е. во всех течениях качественный вид первых трех мод и соотношение между их энергиями примерно такие же, как и в следе. Энергия этих трех мод превышает 60% суммарной энергии возмущений, а иногда достигает и 90%.

Таким образом, основная часть энергии возмущений сосредоточена в небольшом числе мод, имеющих простую структуру, т. е. распределение скорости во всем сечении хорошо «организовано». Поэтому под крупномасштабными структурами естественно понимать несколько первых собственных функций уравнения (1.2).

Особая роль первых трех мод выявилась при измерении корреляции $\langle u(x, y, z)u(x, y, z + \Delta z) \rangle$ в следе ($Re=2300$, $x/d=132$). Смещение датчиков термоанемометров в направлении z служило «фильтром» мелкомасштабных пульсаций и в каждом опыте оно поддерживалось постоянным. Полученные таким образом корреляции использовались в качестве ядер уравнения (1.2). В этом случае, при $\Delta z \neq 0$, величины E_n , вообще говоря, не имеют смысла энергии (в частности, они могут принимать отрицательные значения). Несмотря на это установлено, что при вариации Δz , как параметра, форма первых трех мод и величины E_2/E_1 , E_3/E_1 меняются крайне слабо и $(E_1 + E_2 + E_3) / \sum_n E_n > 0,95$ при $\Delta z = 0,4l$, т. е. крупномасштабная структура возмущений скорости описывается только тремя модами.

3. Дальнейшие эксперименты направлены на проверку возможности описания крупномасштабных структур с помощью линеаризованных уравнений Эйлера. Оценки показывают, что рассматриваемые в данной работе течения в первом приближении можно считать медленно расширяющимися, что существенно упрощает анализ. Действительно, пусть масштаб l в струях определяется так же как и в следе, а в слое смешения $l = \Delta U |\partial U / \partial y|_m$, где $|\partial U / \partial y|_m$ есть максимальный градиент средней скорости U , и ΔU — разность скоростей смешивающихся потоков. Безразмерная скорость расширения в слое смешения и в струях вводилась в виде $s = dl/dx$, а в следе, за цилиндром $s = (U_0/U_m)(dl/dx)$. Тогда анализ известных экспериментальных данных, приведенных например в [1], показывает, что $s = 0,05 - 0,2$.

Поэтому в первом приближении можно использовать известные результаты теории устойчивости медленно расширяющихся течений [12], из которой известно, что влиянием вязкости на растущие возмущения можно пренебречь, а возмущения считать двумерными, так как описание трехмерных возмущений сводится к описанию двумерных, если перейти к переменным Сквайра [13]. Для простоты рассмотрим нестационарные аналоги исследуемых течений, т. е. течения, однородные в направлении x и расширяющиеся во времени. Такой подход обусловлен тем, что, во-первых, главный интерес представляет качественный анализ задачи и, во-вторых, как будет видно дальше, основную роль играют нейтрально устойчивые возмущения, одинаковые для течений, расширяющихся как в пространстве, так и во времени. В последнем случае малый параметр s вводится в виде

$$\frac{dl}{dt} = sU_m \quad (3.1)$$

Двумерные уравнения Эйлера сводятся к уравнению для функции тока ψ возмущенного движения

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + U \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} = 0 \quad (3.2)$$

в котором удержаны все нелинейные слагаемые (они потребуются позже для анализа нелинейных эффектов). Здесь U — среднее значение продольной компоненты скорости, а поперечная скорость равна нулю. Сделав пре-

образование Фурье по координате x , из (3.2) получим

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + i\alpha \left(U\omega - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \Psi \right) = T \quad (3.3)$$

$$\Psi = \int \psi \exp(i\alpha x) dx, \quad \omega = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \alpha^2 \Psi$$

$$T = -i \int \alpha_1 \left[\omega(y, \alpha_1) \frac{\partial \Psi(y, \alpha - \alpha_1)}{\partial y} - \Psi(y, \alpha_1) \frac{\partial \omega(y, \alpha - \alpha_1)}{\partial y} \right] d\alpha_1 \quad (3.4)$$

В данном разделе будет рассматриваться линеаризованное уравнение ($T=0$). При $s \rightarrow 0$ первый член асимптотического разложения решения уравнения (3.3) описывается соотношениями [12]

$$\Psi = \varphi(y) \exp\left(-i\alpha \int_0^t c dt\right), \quad (U-c)(\varphi'' - \alpha^2 \varphi) - U''\varphi = 0 \quad (3.5)$$

где величина c находится из решения краевой задачи ($\varphi \rightarrow 0$ при $|y| \rightarrow \infty$) для уравнения Рэлея (3.5). Для нерасширяющегося течения c не зависит от времени и (3.5) есть классическая задача об устойчивости плоскопараллельных течений [13]. Несмотря на такое сходство, нерасширяющиеся и слабо расширяющиеся течения принципиально различаются, что можно показать, анализируя автомодельный случай. Пусть $U = U_m F(y/l)$, где безразмерная функция F зависит только от y/l . Тогда из (3.5) следует, что $c = U_m g(\alpha l)$, где безразмерная функция g зависит только от αl . Используя последнюю формулу и соотношение (3.1), имеем

$$I = -i\alpha \int_0^t c dt = -i\alpha \int_0^l U_m g \frac{dt}{dl} dl = -\frac{i}{s} \int_0^a g(a) da \quad (3.6)$$

где $a = \alpha l$.

Для рассматриваемых течений всегда выполняются условия $\text{Im}(g) > 0$ при $a < a_n$, $\text{Im}(g) < 0$ при $a > a_n$, где a_n — безразмерное волновое число нейтральных возмущений. Поэтому амплитуда возмущений пропорциональная, как следует из (3.5), (3.6), $\exp[\text{Im}(I)]$, ограничена и достигает максимума, если $\text{Im}(g) = 0$, т. е. наибольшей амплитудой обладают возмущения, которые в классической линейной теории устойчивости называются нейтральными. Так как l растет со временем, то моногармонические возмущения сначала усиливаются (при $\alpha < \alpha_n = a_n/l$), а затем затухают (при $\alpha > \alpha_n$). Следовательно, все расширяющиеся течения устойчивы по отношению к возмущениям с фиксированным волновым числом α .

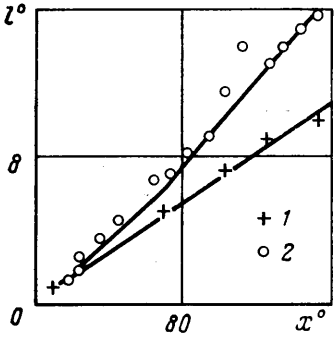
Из (3.6) ясен возможный механизм авторегуляции скорости расширения течений: если по каким-либо причинам скорость расширения s уменьшилась, то возрастет амплитуда возмущений, что приведет к увеличению смещения и, следовательно, скорости расширения. Наоборот, увеличение s ведет к уменьшению смещения, и, следовательно, скорости расширения должна уменьшиться [6].

Из (3.5), (3.6) ясно также, что при $s \ll 1$ амплитуда нейтральных возмущений существенно больше амплитуды любых других возмущений. Поэтому один из возможных способов проверки правильности линейной теории состоит в сравнении наиболее энергосодержащих мод уравнения (1.2) с нейтральными решениями уравнения Рэлея (3.5). При этом следует учесть, во-первых, что нейтральные решения уравнения Рэлея с точностью до произвольного множителя являются действительными функциями. Во-вторых, поскольку Ψ есть преобразование Фурье от функции тока, то с точностью до множителей, не зависящих от y , продольная ком-

понента скорости u пропорциональна $d\varphi/dy$. Таким образом, необходимо сравнивать форму f_n и $d\varphi/dy$.

В следе и в струе имеется две ветви $c(\alpha)$ решений уравнения Рэлея, соответствующие антисимметричным и симметричным распределениям

$$d\varphi/dy \sim u(y).$$



Фиг. 2

Для первой ветви максимальное значение $\text{Im}(I)$ в 3–4 раза больше, чем для второй, т. е. при малых s энергия антисимметричных возмущений продольной скорости много больше, чем энергия симметричных. Следовательно, другой способ проверки правильности линейной теории может основываться на сравнении возмущений в свободной и пристеночной струях. Очевидно, что пристеночная струя получается путем установки непроницаемого экрана в плоскости симметрии свободной струи. В невязком приближении это эквивалентно дополнительному граничному условию $v=0$ в плоскости симметрии. Это условие выполняется только для второй ветви решений уравнения (3.5),

для которой распределение $\varphi \sim v$ антисимметрично. Так как первая ветвь решений (с большими значениями $\text{Im}(I)$) в пристеночной струе не существует, то можно ожидать, что энергия возмущений и скорость расширения для нее меньше, чем для свободной струи.

4. Последний вывод подтверждают данные опытов, обобщенные в [14]. Поскольку эти опыты проводились на разных установках, то оказалось необходимым провести эксперименты в сопоставимых начальных условиях, которые, как уже отмечалось, заметно влияют на характеристики турбулентности в рассматриваемых течениях.

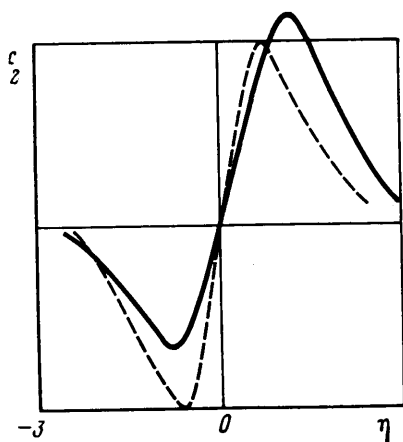
Изучалась затопленная струя воздуха, вытекавшая со скоростью 30 м/с из сопла шириной $d=1$ см и длиной 1 м. Для снижения роли трехмерных эффектов, связанных со смещением, к меньшим стенкам сопла прикреплялись экраны. При исследовании пристеночной струи к одной из больших стенок сопла прикреплялся дополнительный экран. В начальном сечении на срезе сопла профиль скорости был равномерным, а во всех исследованных сечениях его неравномерность в направлении z не превышала 7% (за исключением пограничных слоев на экранах). На основных участках обеих струй форма профиля средней скорости $U(y)$ была одинакова (за исключением узкой пристеночной области толщиной примерно $0,2 l$, где l — расстояние от стенки до точки, в которой значение средней скорости равно половине максимального для данного сечения).

Как и ожидалось, пристеночная струя расширяется в 1,8 раза медленнее свободной, что видно из фиг. 2, на которой по осям отложены $l^\circ = l/d$, $x^\circ = x/d$, а точки соответствуют: 1 — свободной струе, 2 — пристеночной. Приведенные здесь данные практически совпадают с данными, обобщенными в [14]. Установлено также, что энергия турбулентности в пристеночной струе меньше, чем в свободной: величина $\sqrt{\langle u^2 \rangle} / U_m$ равна соответственно 0,2 и 0,3. Этот результат также согласуется с выводами линейной теории.

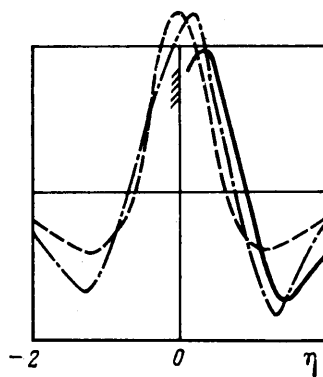
5. Сравним теперь собственные функции уравнения (1.2) с нейтральными решениями уравнения Рэлея. Для двумерных возмущений имеем $u \sim d\varphi/dy$, следовательно, интеграл от u по всем $-\infty < y < \infty$ равен нулю. (Здесь учтено, что $\varphi \sim v \rightarrow 0$ при $y \rightarrow \pm\infty$.) Это условие не выполняется для наиболее крупномасштабной моды f_1 , которая, как указывалось, во всех исследованных течениях имеет наибольшую энергию и не имеет нулей (фиг. 1, а, данные п. 2). Существует ряд данных, косвенно указываю-

n	1	2	3	4	5	6	7
E°	0,089	0,053	0,032	0,022	0,017	0,014	0,012
k°	0,9	1,77	2,66	3,65	4,7	5,15	5,8

щих, что $v=0$ для этой моды. Они получены в [15] на основе измерений всех диагональных компонент двухточечного корреляционного тензора в



Фиг. 3



Фиг. 4

следе и эмпирического подбора таких полей скорости, с помощью которых можно наилучшим образом аппроксимировать экспериментальные данные. Аналогичные результаты получены в [16] на основе измерений мгновенных реализаций скорости в слое смешения и в следе.

Таким образом, появление моды f_1 обусловлено трехмерными нелинейными эффектами. Поскольку $\nu=0$ для этой моды, то она непосредственно не влияет на процессы поперечного переноса, т. е. основной вклад в перенос должны вносить моды с меньшей энергией.

Численные расчеты, проведенные с целью анализа этих мод, показали, что собственные функции уравнения (3.5) слабо зависят от деталей распределения средней скорости U . В то же время формула $U=U_m/ch^2\xi$, где $\xi=0,876y/l$, хорошо аппроксимирует профиль средней скорости в следе и в струе. Нейтральные решения для такого профиля имеют вид [13]

$$u_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \sim \frac{\text{sh } \xi}{\text{ch}^2 \xi}, \quad u_2 = \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \sim \frac{1 - \text{sh}^2 \xi}{\text{ch}^2 \xi} \quad (5.1)$$

Здесь для простоты опущены все множители, не зависящие от y , а индексы 1, 2 относятся к первой и второй ветви решений уравнения (3.5).

В следе и в свободной струе качественный вид f_2 соответствует первой ветви решений уравнения Рэлея. В качестве примера на фиг. 3 сопоставлены результаты расчета второй моды уравнения (1.2) в свободной струе (сплошная линия) и форма u_1 из (5.1) (штриховая линия). Единицы измерений по оси ординат произвольны. Небольшая несимметрия f_2 связана со слабой асимметрией характеристик течения в сечении измерений ($x/d=53$).

Чтобы еще раз убедиться, что появление моды f_2 обусловлено линейными эффектами, были проведены опыты при малом числе Рейнольдса, когда турбулентность не развита, и можно ожидать, что в спектре течения доминирует одна антисимметричная мода, описываемая линейной теорией. Результаты такого исследования приведены на фиг. 1, б штриховой линией ($Re=97$, $x/d=46$). Энергия этой моды составляет 70% энергии пульсаций. Результаты исследований течений при $Re=2300$ и $Re=97$ почти одинаковы, поэтому можно заключить, что появление моды f_2 обусловлено линейными эффектами.

Как уже отмечалось, первое семейство решений уравнения Рэлея в пристеночной струе отсутствует. Следовательно, вторая по энергосодержанию и масштабу мода должна качественно описываться вторым семейством решений уравнения (3.5). Действительно, расчет по второй формуле в (5.1) (штриховая линия на фиг. 4) хорошо согласуется с формой второй

моды в пристеночной струе (сплошная линия — расчет согласно уравнению (1.2)). Единицы измерения по оси ординат произвольны. Заметим, что в свободной струе f_3 (штрихпунктирная линия на фиг. 4) также соответствует распределению u_2 . Аналогичный вывод справедлив для возмущений в следе, что ясно при сравнении фиг. 4 и фиг. 1, б.

Проведенный анализ показывает, что с помощью линейной теории можно описать часть крупномасштабных мод. В то же время ряд экспериментальных результатов противоречит линейной теории (наличие в спектре моды f_1 и малые различия между энергиями E_2 и E_3). Однако самый главный недостаток такого подхода состоит в том, что рассматриваемые течения вследствие их расширения являются линейно устойчивыми, и нет механизма поддержания крупномасштабных возмущений.

6. Частичный ответ на вопрос, как учитывать нелинейное взаимодействие, можно получить, если для оценки нелинейных слагаемых в (3.3) воспользоваться решениями, полученными из линейной теории. Ниже будет показано, что такой подход корректен при $s \ll 1$, но в реальных течениях значения параметра s не столь малы, чтобы с помощью указанной процедуры построить количественную теорию, поэтому сделанные ниже выводы носят качественный характер. Для простоты рассмотрим двумерные автомодельные течения, а затем покажем, что учет трехмерности принципиально не меняет выводов. Из (3.4), (3.6) видно, что при $s \ll 1$ решение пропорционально множителю, сильно зависящему от волнового числа. Поэтому при качественном анализе членов, обозначенных в (3.3) символом T и играющих роль источника, полезно выделить такой множитель в явном виде и следить только за особенностями, обусловленными его поведением. Тогда из (3.4) — (3.6) получим

$$T = \int G(\alpha, \alpha_1, y) \exp \left[-\frac{i}{s} \left(\int_0^{\alpha_1} g \, da + \int_0^{\alpha - \alpha_1} g \, da \right) \right] d\alpha_1 \quad (6.1)$$

где символом G обозначены все функции, которые не зависят от s при $s \rightarrow 0$, $a = \alpha l$ и $a_1 = \alpha_1 l$ — безразмерные волновые числа, $g = c/U_m$ — безразмерное собственное число уравнения Рэлея.

Как и в одномерной турбулентности, интеграл (6.1) описывает передачу энергии к возмущению с волновым числом α от всех остальных возмущений. Поскольку экспонента в подынтегральном выражении в (6.1) имеет острые максимумы, энергообмен существен только в узких областях волнового пространства, вне которых развитие возмущений описывается линеаризованными уравнениями.

Рассмотрим сначала наиболее простое течение в слое смешения, для которого имеется только одна ветвь решения уравнения Рэлея, и для этой ветви $\text{Re}(g) = 0$, $d \text{Im}(g)/da < 0$ при $a > 0$, причем $\text{Im}(g) > 0$ при $0 < a < a_n$ [13]. При $a < 0$ функцию $g(a)$ следует продолжить в виде $g(a) = -g(-a)$, чтобы выполнялось условие $a \text{Im}(g) > 0$, соответствующее растущим возмущениям, так как уравнение Рэлея, наряду с растущими решениями c , φ , для которых $\alpha \text{Im}(c) > 0$, имеет затухающие решения c^* , φ^* , для которых $\alpha \text{Im}(c^*) < 0$, что легко видеть, если применить операцию комплексного сопряжения к (3.5). Заметим также, что в области $|a| > a_n$ необходимо учитывать вязкость, однако используемые далее методы применимы и при анализе вязких течений, $g(a)$ считается определенной при всех a .

Экстремумы подынтегральной функции в (6.1) определяются экстремумами резко меняющейся экспоненты и находятся из уравнения

$$g(a_1) - g(a - a_1) = 0 \quad (6.2)$$

которое имеет два семейства корней. Первое есть $a_1 = a/2$. Чтобы найти второе, заметим, что уравнение (6.2) удовлетворяется при $a = 0$, $a_1 = \pm a_n$, так как $g(a_n) = 0$. Чтобы найти зависимость $a_1(a)$, предположим, что за-

дано $a \ll a_n$ и $a \neq 0$, а решение a_1 уравнения (6.2) ищется в виде $a_1 = \pm a_n + \varepsilon$, $\varepsilon \ll a_n$. Раскладывая слагаемые этого уравнения в ряд по степеням ε , легко получить второе семейство решений: $a_1 = \pm a_n + a/2$, которое справедливо только при малых a .

Используя для вычисления интеграла (6.1) метод перевала, получим $T = T_1 + T_2$

$$T_1 \sim \sqrt{s} \exp \left[\frac{2i}{s} \int_0^{a/2} g da \right], \quad T_2 \sim \sqrt{s} \exp \left[\frac{2i}{s} \int_0^{a_n} g da + \frac{i}{4s} \frac{dg(a_n)}{da} a^2 \right] \quad (6.3)$$

Здесь выписаны множители, зависящие только от s , а вторая формула в (6.3) справедлива, если $a \ll a_n$. Слагаемые T_1 и T_2 служат оценкой вклада, который вносят в интеграл (6.1) окрестности максимумов подынтегрального выражения, а индексы 1 и 2 соответствуют первому и второму семейству корней уравнения (6.2).

Поскольку $g(\pm a_n) = 0$ и $g > 0$ при $a < a_n$, то T_1 имеет острый максимум при $a = \pm 2a_n$, и поэтому $a_1 = \pm a_n$, $a - a_1 = \pm a_n$. Следовательно, T_1 описывает взаимодействие нейтральных возмущений, которое приводит к переносу энергии к возмущению с волновым числом вдвое больше нейтрального. Так как $d \operatorname{Im}(g)/da < 0$, то экспоненциальный множитель в формуле для T_2 имеет острый максимум при $a = 0$. Можно показать, что $G = 0$ при $\alpha = 0$, $\alpha_1 = \alpha_n$. Поэтому функция T_2 имеет острый максимум не точно при $a = 0$, а при малых a . Таким образом, снова существенно взаимодействие возмущений с волновыми числами, близкими к нейтральному. Однако оно на этот раз приводит к появлению крупномасштабных возмущений (с волновыми числами, близкими к нулю).

Приведенные рассуждения показывают, что качественно эволюция возмущений с фиксированным волновым числом проходит в два этапа: сначала возмущение усиливается по линейному механизму (при этом безразмерное волновое число $a = cl$ увеличивается). На втором этапе, при достижении значений $a = a_n$, существенными становятся нелинейные эффекты, в результате чего происходит перенос энергии в область малых волновых чисел. Это приводит к появлению источника крупномасштабных возмущений и весь процесс повторяется сначала.

Здесь содержится возможность объяснения, почему при больших числах Рейнольдса в спектре уравнения (1.2) всегда содержится наиболее крупномасштабная мода f_1 , появление которой обусловлено нелинейными трехмерными эффектами. Для учета трехмерности возмущений необходимо найти преобразование Фурье от линеаризованных уравнений Эйлера по переменным x и z и сделать преобразование Сквайра [13]. В конечном счете вновь получается уравнение Рэлея (3.5), в котором волновое число α заменяется величиной $\kappa = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, где волновое число β соответствует направлению z . При этом аналог формулы (3.6) приобретает вид

$$I = \frac{i\alpha}{s\kappa} \int_0^{\kappa^0} g(a) da, \quad \kappa^0 = \kappa l = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad a = \alpha l, \quad b = \beta l$$

а функция $g(a)$ по-прежнему находится из решения уравнения (3.5).

Анализ нелинейных взаимодействий проводится аналогично. Он показывает, что, как и раньше, есть два канала переноса энергии. В первом перенос осуществляется из области $\alpha = \pm \alpha_n$, $\beta = 0$ в область $\alpha = \pm 2\alpha_n$, $\beta = 0$, а во втором — из области $\alpha = \pm \alpha_n$, $\beta = 0$ в область $\alpha \sim \beta \sim 0$. Аналог величины T_2 , характеризующий второй канал переноса, имеет вид

$$T_2 \sim s \exp \left[\frac{2i}{s} \int_0^{a_n} g da + \frac{i}{4s} \frac{dg(a_n)}{da} a^2 + \frac{ib^2}{4sa^2} \int_0^{a_n} g da \right]$$

Поскольку при $s \rightarrow 0$ в показателе экспоненты коэффициенты при a и b имеют один порядок, то нелинейное взаимодействие двумерных нейтральных возмущений ($\alpha = \alpha_n \gg \beta \sim 0$) становится сильным и приводит к появлению трехмерных крупномасштабных возмущений ($\alpha \sim \beta \sim 0$). Этот механизм позволяет качественно объяснить причины появления моды f_1 .

Рассмотрим течение в следе и в свободной струе, для которого решение уравнения (3.5) дает две ветви $c(\alpha)$. Тогда в подынтегральном выражении в (3.4) появятся слагаемые вида $\omega_1 \partial \Psi_1 / \partial y$, $\omega_2 \partial \Psi_2 / \partial y$, $\omega_1 \partial \Psi_2 / \partial y$, $\omega_2 \partial \Psi_1 / \partial y$, где индексы 1, 2 относятся к первой и второй ветви $c(\alpha)$. Первые два слагаемых описывают те же эффекты, что и в слое смещения. Эти слагаемые — антисимметричные функции y , а поскольку коэффициенты в уравнении Рэлея симметричные функции y , то рассматриваемый тип нелинейного взаимодействия приводит к возбуждению антисимметричных колебаний поперечной компоненты скорости v , относящихся ко второй ветви $c(\alpha)$. Остальные два слагаемых симметричны по y и приводят к появлению возмущений, соответствующих первой ветви (симметричных распределений v). Отсюда ясно, что либо антисимметричная мода f_2 распределения продольной скорости u , принадлежащая первому семейству решений уравнения Рэлея, не возбуждается, либо энергии E_2 и E_3 должны быть сопоставимы.

Таким образом, полученные результаты свидетельствуют о перспективности использования линеаризованных уравнений для описания структуры крупномасштабных возмущений, имеющих, как выяснилось, довольно простую структуру.

Авторы благодарят А. Н. Секундова за плодотворные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Таунсенд А. А. Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 399 с.
2. Власов Е. В., Гиневский А. С. Когерентные структуры в турбулентных струях и следах // Итоги науки и техники. Механика жидкости и газа. М.: ВИНТИ, 1986. Т. 20. С. 3–84.
3. Gaster M., Kit E., Wignanski I. Large-scale structures in a forced turbulent mixing layer // J. Fluid Mech. 1985. V. 150. P. 23–39.
4. Wignanski I., Champagne F., Marasli B. On the large-scale structures in two-dimensional, small-deficit, turbulent wakes // J. Fluid Mech. 1986. V. 186. P. 31–71.
5. Cohen J., Wignanski I. The evolution of instabilities in the axisymmetric jet. Pt 1. The linear growth of disturbances near the nozzle. // J. Fluid Mech. 1987. V. 176. P. 191–235.
6. Борисов А. Г., Кузнецов В. Р., Секундов А. Н. Крупномасштабные движения в сдвиговых турбулентных потоках // Турбулентные струйные течения. Ч. 1. Таллин: Ин-т термодинамики и электрофизики АН ЭССР, 1985. С. 63–68.
7. Козлов В. Е., Секундов А. Н., Смирнова И. П. Модели турбулентности для описания течения в струе сжимаемого газа // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 6. С. 38–41.
8. Dziomba B., Fiedler H. E. Effect of initial conditions on two-dimensional free shear layers // J. Fluid Mech. 1985. V. 152. P. 419–442.
9. Lumley J. L. Stochastic tools in turbulence. New York: Acad. Press, 1970. 194 p.
10. Лозэ М. Теория вероятностей. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 719 с.
11. Борисов А. Г., Кузнецов В. Р., Расщупкин В. И. Экспериментальное исследование крупномасштабной структуры неоднородной турбулентности // Изв. АН СССР. МЖГ. 1982. № 5. С. 31–37.
12. Bouthier M. Stabilité linéaire des écoulements presque parallèles // J. Méc. 1972. V. 11. № 4. P. 599–621.
13. Беглов Р., Криминале В. Вопросы гидродинамической устойчивости. Пер. с англ. М.: Мир, 1971. 350 с.
14. Абрамович Г. Н., Гиршович Т. А., Крашенинников С. Ю. и др. Теория турбулентных струй. М.: Наука, 1984. 717 с.
15. Grant H. L. The large eddies of turbulent motion // J. Fluid Mech. 1958. V. 4. Pt 2. P. 149–190.
16. Mumford J. C. The structure of the large eddies in fully developed turbulent shear flows. Pt 1. The plane jet // J. Fluid Mech. 1982. V. 118. P. 241–268 pt 2. The plane wake // J. Fluid Mech. 1983. V. 137. P. 447–456.

Москва

Поступила в редакцию
12.IV.1988