

УДК 532.516.011:536.2

БОРИСЕВИЧ В. Д., ЛЕВИН Е. В., НАУМОЧКИН В. В.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВТОРИЧНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОГО ГАЗА ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ЦИЛИНДРЕ ПРИ НАЛИЧИИ ИСТОЧНИКОВ И СТОКОВ

Вторичные течения газа во вращающемся цилиндре могут вызываться различными причинами. При механическом возбуждении — различием в угловых скоростях вращения боковой поверхности и торцов или специальным циркулятором — диском, помещенным в промежуточном сечении. При тепловом возбуждении циркуляции течение обеспечивается градиентами температуры на поверхности цилиндра и его торцах. Возможно внешнее возбуждение течения за счет втекающих в систему потоков, а также различные комбинации указанных способов. Во всех перечисленных случаях возмущающее действие на вращающийся газ носит осесимметричный характер, что значительно облегчает расчет вторичных течений газа и дает возможность получить различные аналитические и численные решения [1–4].

Задача значительно усложняется, если вторичные течения газа обусловлены неосесимметричными граничными условиями, например установленной в радиальном направлении неподвижной тонкой трубкой, служащей для подачи или забора проб газа из системы. В этом случае требуется рассматривать трехмерность течения, а при сверхзвуковом обтекании трубки учитывать влияние ударных волн [5], что вызывает существенные трудности при попытке найти не только аналитические, но и численные решения. Однако для широкого класса задач интерес представляет исследование интегрального возмущающего действия циркулятора на газ. В этом случае допустимо предположение, что с увеличением скорости вращения цилиндра возмущения, вносимые неподвижной трубкой, будут приобретать характер, приближающийся к осесимметричному, и модель циркулятора также может быть представлена в осесимметричном виде. В то же время оценочные расчеты и экспериментальные исследования [6] показывают, что использование для таких задач вращающегося диска в качестве осесимметричной модели циркулятора неприемлемо.

В [7] в рамках линеаризованных уравнений Навье — Стокса предложен подход, при котором взаимодействие неосесимметричного механического циркулятора с вращающимся газом моделируется осесимметричной областью, включающей систему стоков по массе, количеству движения и источников по энергии. С увеличением скорости вращения цилиндра влияние нелинейных эффектов на течение возрастает [4] и ценность линейной теории существенно снижается.

В настоящей работе для нелинейной системы уравнений Навье — Стокса предложена модель источников-стоков возбуждения вторичных течений во вращающемся цилиндре, описывающая взаимодействие циркулятора с вращающимся газом, и приведены результаты численных расчетов возникающих циркуляционных течений. Для численного решения использована модификация метода Ньютона, обеспечивающая за счет регуляризирующих возмущений его устойчивость и сходимость при малых числах Экмана и высоких скоростях вращения цилиндра. Рассмотрено совместное действие механического и теплового способов возбуждения течения, а также влияние вязкой диссипации энергии.

1. Постановка задачи и метод расчета. При математическом моделировании используется система уравнений Навье — Стокса для сжимаемого вязкого и теплопроводного газа. Течение предполагается осесимметричным и установившимся. Консервативная форма исходной системы безразмерных дифференциальных уравнений в цилиндрической системе координат (r, z) при наличии источников или стоков массы и количества движения газа, распределенных в объеме, имеет вид

$$\operatorname{div}(\rho\rho_0\mathbf{V})=m$$

$$\operatorname{div}(\rho\rho_0\mathbf{V}V_r) - \frac{\rho\rho_0V_\varphi^2}{r} + \frac{1}{M^2}\frac{\partial}{\partial r}(\rho\rho_0T) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{rr}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{rz}) - \frac{\tau_{\varphi\varphi}}{r} = V_r m + I_r \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div}(\rho\rho_0\mathbf{V}V_\varphi r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\tau_{r\varphi}) + \frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{z\varphi}) = V_\varphi r m + I_\varphi r$$

$$\operatorname{div}(\rho\rho_0\mathbf{V}V_z) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau_{rz}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zz}) = V_z m + I_z$$

$$\operatorname{div}\left(\rho\rho_0\mathbf{V}\left(\gamma T + \frac{M^2}{2}(\gamma-1)V^2\right)\right) - M^2(\gamma-1)\operatorname{div}(\mathbf{V}\boldsymbol{\tau} + \mathbf{q}) = \left(\gamma T + \frac{M^2}{2}(\gamma-1)V^2\right)m + \mathbf{IV}$$

$$V^2 = V_r^2 + V_\varphi^2 + V_z^2, \quad \rho_0 = \exp\left(\frac{\gamma M^2}{2}(r^2-1)\right)$$

$$\tau_{rr} = -\frac{2}{3}E\left(r\frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{V_r}{r} - \frac{\partial V_z}{\partial z}\right), \quad \tau_{rz} = -E\left(\frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial r}\right)$$

$$\tau_{r\varphi} = -Er\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{V_\varphi}{r}\right), \quad \tau_{z\varphi} = -E\frac{\partial V_\varphi}{\partial z}, \quad \tau_{\varphi\varphi} = -\frac{2}{3}E\left(2\frac{V_r}{r} - \frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{\partial V_z}{\partial z}\right),$$

$$\tau_{zz} = -\frac{2}{3}E\left(2\frac{\partial V_z}{\partial z} - \frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{V_r}{r}\right)$$

$$q_r = -\gamma\frac{E}{\operatorname{Pr}}\frac{\partial T}{\partial r}, \quad q_z = -\gamma\frac{E}{\operatorname{Pr}}\frac{\partial T}{\partial z}, \quad E = \frac{\mu}{\rho_0\omega a^2}, \quad \operatorname{Pr} = c_p\frac{\mu}{\kappa}, \quad M = \frac{\omega a}{\sqrt{RT_x}}$$

Здесь E , Pr , M — безразмерные числа Экмана, Прандтля и изотермическое число Маха соответственно. Для обезразмеривания переменных использовались следующие характерные величины: a , ω — радиус и угловая скорость вращения цилиндра; ρ_0 — плотность газа на стенке цилиндра; T_x — характерная температура газа; μ , κ — коэффициенты динамической вязкости и теплопроводности, R — универсальная газовая постоянная, c_p — теплоемкость при постоянном давлении; γ — показатель адиабаты, m , I_r , I_φ , $I_z(r, z)$ — объемная плотность стоков или источников массы и составляющих количества движения газа соответственно. В стационарном случае источники и стоки по массе должны компенсировать друг друга соответствующим пространственным распределением величины m либо дополнительными источниками и стоками на границах цилиндра.

Граничные условия для системы уравнений (1.1) в соответствии со схемой, приведенной на фиг. 1, формируются следующим образом:

$$r=0: \quad V_r = V_\varphi = 0, \quad \frac{\partial V_z}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0$$

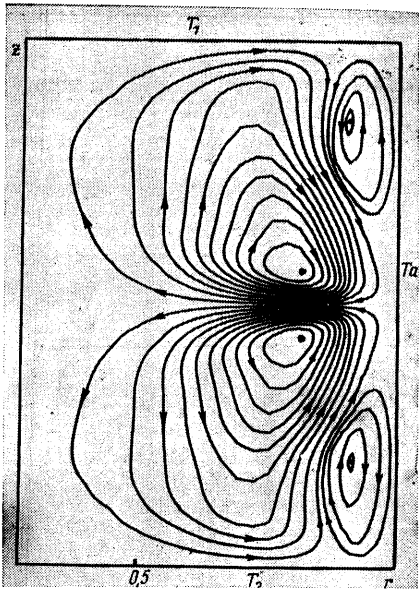
$$r=1: \quad V_r = V_z = 0, \quad V_\varphi = 1, \quad T = T_a(z)$$

$$z=0, h: \quad V_r = V_z = 0, \quad V_\varphi = r, \quad T = T_{1,2}$$

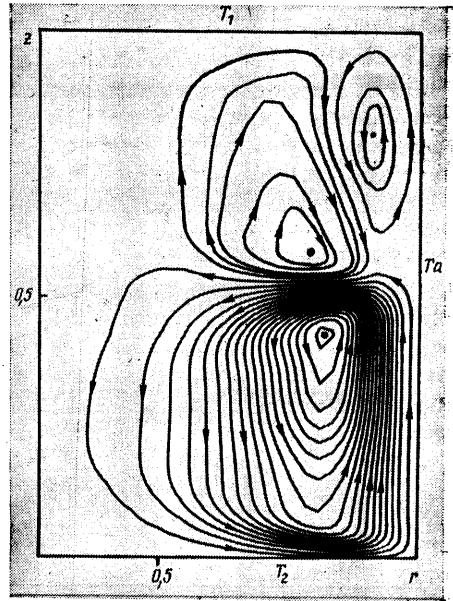
(1.2)

где $h = H/a$, H — высота цилиндра.

Вследствие консервативности системы (1.1.) уравнения движения содержат члены, учитывающие сток (источник) массы и сток импульса газа. Явный вид членов в правой части уравнений зависит от геометрических особенностей циркулятора и величины потока отбора газа. Для случая, когда циркулятором является неподвижная трубка, расположенная в ра-



Фиг. 1



Фиг. 2

диальном направлении и служащая для отбора (подачи) газа, воздействие ее на вращающийся газ рассматривается как осесимметричная тороидальная система стоков (источников) массы и дисковая система стоков азимутальной составляющей импульса ($I_r = I_z = 0$). Для отбираемого через трубку потока газа P объемная плотность стоков массы вычисляется как $m = P/v$, где $v = \pi^2 l d^2 / 2$ — тороидальный объем, образованный при вращении циркулятора, l, d — длина и диаметр циркулятора. Поток азимутальной составляющей импульса газа через элемент поверхности циркулятора, обращенной к вращающемуся газу, вычисляется как $\rho r_0 V_\phi^2 \Delta r \Delta z$. Объемная плотность стоков количества движения газа определяется из соотношения

$$\int_v I_\phi 2\pi r dr dz = \int_s \rho r_0 V_\phi^2 dr dz \quad (1.3)$$

где S — площадь поверхности циркулятора.

Краевая задача (1.1)–(1.2) решалась методом конечных разностей. Для реализации модели источников-стоков использована консервативная конечно-разностная схема 2-го порядка точности, полученная интегрированием системы (1.1) по ячейке смещенной разностной сетки в соответствии с методом контрольного объема [9]. Аналогично [4] значения компонент скоростей и потоков рассматривались на границах ячейки, а значения термодинамических параметров ρ и T — в ее центре. Для аппроксимации частных производных использованы центральные разности. Для расчета пограничных слоев Экмана на торцах цилиндра и Стюартсона на его стенке бралась неравномерная разностная сетка со сгущением узлов в области торцов и стенки цилиндра.

Конечно-разностная система нелинейных алгебраических уравнений, соответствующих исходным дифференциальным уравнениям (1.1), записывалась в виде

$$F(x) = 0 \quad (1.4)$$

где x — вектор размерности $5 \times i_m \times j_m$; i_m, j_m — число узлов разностной сетки по радиусу и высоте соответственно. Для решения системы (1.4) применен итерационный метод Ньютона. Численные исследования показали, что при больших скоростях вращения цилиндра и малых числах Экмана наблюдается неустойчивость и расходимость итерационного процесса, связанные с плохой обусловленностью матрицы Якоби вследствие неточности ее вычисления при конечно-разностной аппроксимации исходной системы уравнений. Для сохранения устойчивости метода Ньютона при малых числах Экмана использован метод регуляризации [10].

Модификация метода Ньютона для системы (1.4) в этом случае выглядит следующим образом:

$$(F'(x^n) + I/\lambda)(x^{n+1} - x^n) = -F(x^n) \quad (1.5)$$

где $F'(x^n) = (\partial F_i / \partial x_j^n)$ — матрица Якоби, I — единичная матрица, n — номер итерации. Параметр λ использован для внесения регуляризирующих возмущений в задачу в том случае, когда матрица Якоби вырождена или плохо обусловлена. Устойчивость разностной схемы (1.5) может быть доказана на основании аналогии между (1.5) и абсолютно неявной разностной схемой для решения нестационарной системы уравнений Навье — Стокса методом установления, устойчивой в линейном приближении [8]. Параметр λ может рассматриваться в этом случае как аналог времени.

2. Результаты расчетов. Численные расчеты проводились на неравномерной разностной сетке $j_m=56$, $i_m=20$ при следующих значениях безразмерных параметров:

$$M=3,5, \quad h=1, \quad E=5 \cdot 10^{-5}, \quad Pr=0,7, \quad \gamma=1,4$$

Для разрешения пограничных слоев Экмана на торцах цилиндра и Стюартсона на его боковой поверхности на шаг разностной сетки в этих областях накладывались ограничения: $\Delta r < E^{1/2}$, $\Delta z < E^{1/3}$.

На боковой поверхности цилиндра рассматривались два типа граничных условий для температуры:

$$T_a(z) = 1 + \theta \left(1 - \frac{z}{2h} \right), \quad 0 < z \leq \frac{h}{2} \quad (2.1)$$

$$T_a(z) = 1 - \theta \left(1 - \frac{z}{2h} \right), \quad \frac{h}{2} < z \leq h$$

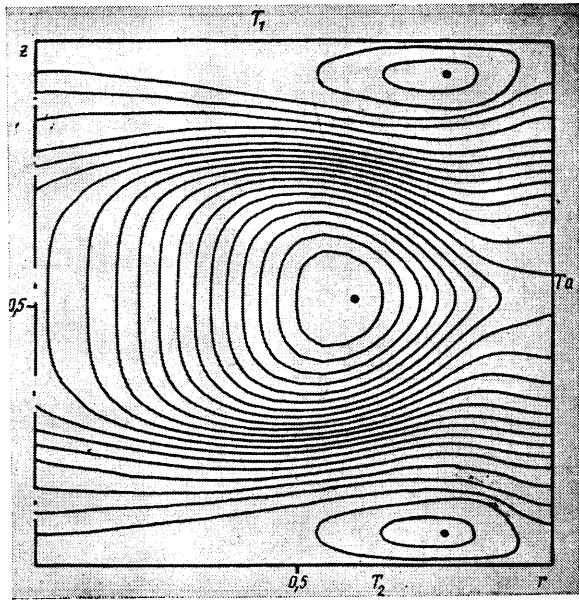
$$\theta = \frac{\Delta T}{T_x}$$

$$T_a(z) = 1 + \theta \frac{z}{h}, \quad T_1 = T_a(0), \quad T_2 = T_a(h) \quad (2.2)$$

На фиг. 1 приведены результаты расчетов в виде линий тока при параметрах циркулятора $d/a=0,2$, $l/a=0,92$ и граничных условий для температуры, соответствующих случаю (2.1) при $\theta=0,35$, в отсутствие источников (стоков) по массе ($m=0$). Симметричный характер граничных условий обуславливает симметричную относительно средней плоскости цилиндра картину течения. Интенсивность циркуляционных течений в безразмерных значениях функции тока $\psi_{1 \max}=2,8$, $\psi_{2 \max}=0,2$. Линии тока построены с шагом $\Delta\psi=0,1$. Торможение циркулятором газа, моделируемое стоком азимутальной составляющей импульса, приводит к возникновению радиального течения газа к оси цилиндра и образованию симметричных тороидальных вихрей. Радиальное течение газа происходит в основном в торцевых пограничных слоях Экмана и в окрестности циркулятора. С увеличением геометрических параметров циркулятора происходит увеличение интенсивности радиального течения и влияния нелинейных эффектов в этой области. Вследствие экспоненциального изменения плотности газа в радиальном направлении наиболее сильное возмущающее действие на газ оказывает продольный размер циркулятора.

Граничные условия (2.1) также приводят к образованию тороидальных вихрей вблизи стенки цилиндров за счет тепловой конвекции, но существенно меньшей интенсивности. С увеличением параметра θ возрастает интенсивность в «тепловом» тороидальном вихре и уменьшается интенсивность основного течения.

Картина линий тока для граничных условий (2.2) при тех же значениях параметров l , d , θ представлена на фиг. 2. Течение в этом случае имеет несимметричную трехвихревую структуру. Интенсивность цирку-



Фиг. 3

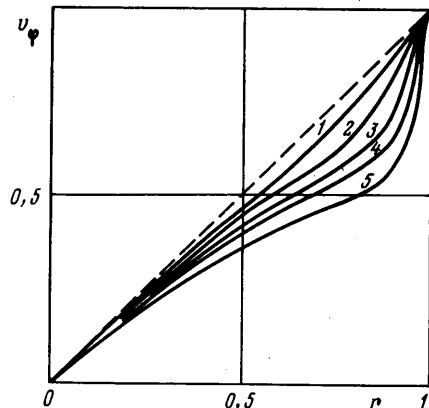
ляционных течений $\psi_{1 \max}=5,4$, $\psi_{2 \max}=1,1$, $\psi_{\min}=-0,25$. Влияние тепловой конвекции проявляется в уменьшении интенсивности основного циркуляционного течения в верхней половине цилиндра и в увеличении в нижней, при этом образуется вихрь в угловой области цилиндра.

На фиг. 3 представлена картина изотерм для течения, изображенного на фиг. 1. Линии уровня построены с интервалом $2 \cdot 10^{-2}$. $T_{\max}/T_x=1,43$, $T_{\min}/T_x=0,90$. В окрестности циркулятора происходит охлаждение газа в результате его ускорения в направлении оси.

Исследование влияния вязкой диссипации показали, что при рассматриваемых условиях пренебрежение диссипативным членом в уравнении энергии существенно снижает точность результатов. Влияние вязкой диссипации на интегральные характеристики течения проявляется в уменьшении интенсивности «теплого» вихря на 50% и увеличении интенсивности основного течения на 10%.

Вклад вязкой диссипации в общий баланс энергии наиболее существен в окрестности циркулятора. Картина линий тока, построенная с учетом диссипативного члена, качественно слабо отличается от изображенной на фиг. 3 и поэтому здесь не приведена. Численные исследования показали, что влияние вязкой диссипации энергии увеличивается с ростом числа Маха и параметров l и d .

На фиг. 4 показана зависимость азимутальной составляющей скорости газа от радиуса при различных значениях координаты z . Цифры 1–5 соответствуют $z=0,1$; 0,25; 0,35; 0,4; 0,5. Зависимость существенно отличается от линейной, имеющей место при моделировании тонкой трубки вращающимся диском [3, 4]. Наибольшее возмущение



Фиг. 4

угловой скорости газа относительно квазитвердого вращения наблюдается в окрестности циркулятора ($z=0,5$).

Анализ результатов позволяет заключить, что моделирование воздействия на вращающийся газ механического циркулятора осесимметричной системой стоков азимутальной составляющей импульса в сочетании с тепловым возбуждением обуславливает вихревую структуру течения с сильным влиянием нелинейных эффектов, включая вязкую диссипацию энергии. Вследствие нелинейности задачи сильное отклонение решения от начального приближения может приводить к нарушению сходимости метода Ньютона. В этом случае решение достигалось за счет использования метода продолжения по параметрам d и θ .

ЛИТЕРАТУРА

1. *Toren M., Solan A.* Laminar compressible flow over a stationary disk in a rotating cylinder // *Trans. ASME, J. Fluid Engng.* 1979. V. 101. № 2. P. 173–180.
2. *Ungarish M., Israeli M.* Axisymmetric compressible flow in a rotating cylinder with axial convection // *J. Fluid Mech.* 1985. V. 154. P. 121–144.
3. *Hashimoto K., Matsuda T.* Meridional flow of compressible fluid in a rapidly rotating short cylinder // *J. Phys. Soc. Japan.* 1980. V. 49. № 2. P. 779–786.
4. *Борисевич В. Д., Наумочкин В. В., Смаков Б. М.* Механическое и тепловое возбуждение течения вязкого газа во вращающемся цилиндре // *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1987. № 4. С. 24–28.
5. *Форни, Макгрегор, Ван Дайк.* Расчет поля течения газа в сверхзвуковом пробозаборнике // *Теорет. основы инж. расчетов.* 1986. № 1. С. 249–258.
6. *Suzuki M., Amano K., Mikami H.* Measurement of flow behing stationary cylinder placed in rotating gas // *J. Nucl. Sci. and Technol.* 1980. V. 17. № 5. P. 377–384.
7. *Wood H. G., Sanders G.* Rotating compressible flows with internal sources and sinks // *J. Fluid Mech.* 1983. V. 127. P. 299–313.
8. *Ковеня В. М., Яненко Н. Н.* Метод расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1981. 304 с.
9. *Роуч П.* Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 616 с.
10. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 287 с.

Москва

Поступила в редакцию
10.V.1988