

УДК 532.516.5

ЛИФШИЦ А. М., РАХМАТУЛЛАЕВ Р. Д., ШТЕРН В. Н.
ПОРОГ РАЗВИТИЯ ТРЕХМЕРНЫХ СТРУКТУР
В ТЕЧЕНИИ БЛАЗИУСА

Проводится численный анализ устойчивости течения Блазиуса и вторичного течения. Рассчитаны возникающие при этом развитые автоколебательные режимы. Полученные пороговые характеристики возникновения трехмерных структур удовлетворительно согласуются с опытными данными.

Известно, что переход к турбулентности в пограничном слое на плоской пластине начинается с появления и роста двумерных волн Толлмина – Шлихтинга (ВТШ). Далее вниз по потоку возникают и усиливаются трехмерные возмущения, что в итоге приводит к быстрому увеличению пульсационной энергии и турбулизации [1, 2]. При визуализации течения на втором этапе наблюдаются лямбдаобразные структуры, которые располагаются либо в шахматном порядке (*s*-режим), либо строго друг за другом (*K*-режим). Судя по опытному данным [2, 3], *s*-режим реализуется при меньших амплитудах ВТШ и сопровождается появлением в частотном спектре острого максимума на частоте, половинной по отношению к исходной ВТШ. *K*-режим наблюдается при больших амплитудах ВТШ и возникновение трехмерности в этом случае не сопровождается качественной перестройкой спектра частот.

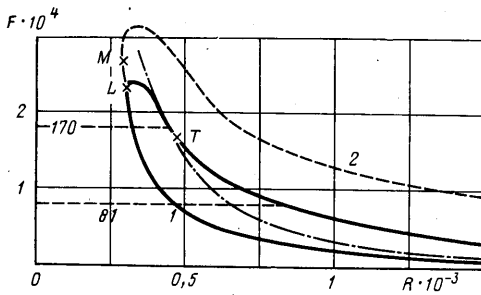
В обоих случаях ответственным за развитие трехмерности является механизм параметрического резонанса, но в *s*-режиме он связан с первой гармоникой ВТШ, а в *K*-режиме – со второй. Роль резонансного взаимодействия волновых возмущений в быстром росте энергии пульсаций на нелинейной стадии перехода в пограничном слое была осознана давно [4, 5]. Затем было показано, что это связано со вторичной неустойчивостью [6, 7]. Каждая неустойчивость связана с бифуркацией решений со все более сложной пространственно-временной структурой. В результате первой неустойчивости возникают автоколебательные режимы, которые можно назвать установившимися волнами Толлмина – Шлихтинга (УВТШ).

Вторичная неустойчивость связана с появлением существенно трехмерных автоколебаний. Изучение возникновения и свойств этих установившихся режимов представляет самостоятельный интерес [8] и важно для проблемы управления пограничным слоем. Автоколебательные режимы весьма чувствительны к внешним воздействиям и поэтому, зная их параметры, можно подобрать управляющий сигнал так, чтобы стабилизировать колебания и затянуть переход к турбулентности. В данной работе определяются пороговые значения амплитуды УВТШ, при которых происходит бифуркация трехмерных автоколебаний (*s*- и *K*-режимов) и находятся характеристики последних, удовлетворительно согласующиеся с опытными данными. Последовательность изложения материала такова. Сначала приводятся результаты расчета первичных автоколебаний (УВТШ), а затем бифуркация от них *s*-режимов и далее *K*-режимов.

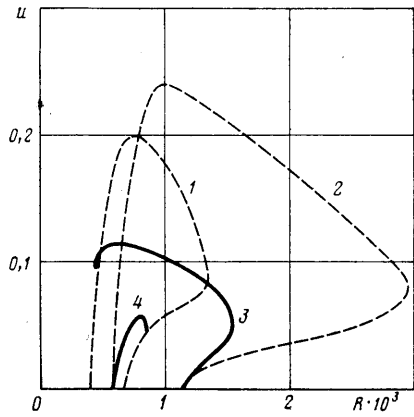
1. Анализ проводится в плоскопараллельном приближении. Считается, что на интервале порядка длины волны характеристики пограничного слоя заметно не изменяются. В качестве масштаба длины принимается величина x/R , где x – расстояние от кромки пластины, а число Рейнольдса $R = \sqrt{u_\infty x / \nu}$, где u_∞ – скорость набегающего потока, а ν – коэффициент кинематической вязкости. Согласно общей теории [9], первичные автоколебания ищутся в виде бегущей волны

$$(u_x, u_y, u_z) = \sum_{n=0}^N \{ [u_n(y), v_n(y), w_n(y)] \exp[in(\alpha x + \beta z - \alpha C t)] + \text{к. с.} \} \quad (1.1)$$

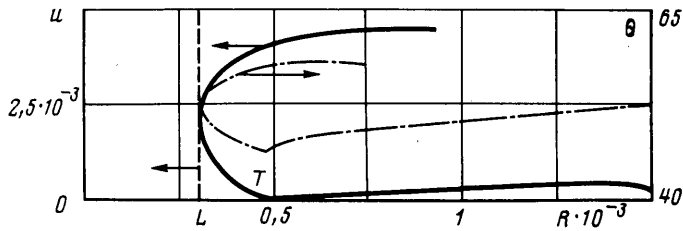
где \mathbf{u} – добавочное поле скорости к течению Блазиуса, $u_0(y)$ характери-



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

зует деформацию среднего поля скорости, $v_0 = w_0 = 0$. В представлении (1.1) и далее переменные безразмерны, $2\pi/\alpha$ и $2\pi/\beta$ — длина волны в продольном и трансверсальном направлениях, C — фазовая скорость, к. с. — означает комплексно-сопряженные члены.

После подстановки (1.1) в уравнения Навье — Стокса получается система обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд u_n, v_n, w_n . Дополнив ее условиями прилипания на стенке и затухания на бесконечности, получим краевую задачу на собственные значения. Всегда существует тривиальное решение, отвечающее течению Блазиуса, но в определенном диапазоне чисел Рейнольдса существуют и нетривиальные решения. Для их характеристики удобно использовать параметры, которые хорошо измеряются экспериментально. Это максимальное среднеквадратичное значение пульсации продольной скорости, отнесенное к u_∞ , которое будет обозначаться u , и частота $F = v\omega/u_\infty^2 = \alpha C/R$, где ω — размерная частота основного тона. Каждому двумерному решению ($\beta = 0$) отвечает точка на некоторой поверхности в пространстве параметров $\{R, F, u\}$. Ее пересечение с плоскостью $u = 0$ является нейтральной кривой линейной теории устойчивости (кривая 1 на фиг. 1).

Численный расчет УВТШ является сложной задачей в силу нелинейности и малого параметра при старшей производной. Здесь расчет ограничивается приближениями, когда в представлении (1.1) $N=1$ (моногоармоническое) и $N=2$ (двухгармоническое). Как будет показано, этого достаточно для определения порога возникновения s - и K -режимов.

В моногоармоническом приближении поверхность решений в пространстве $\{R, F, u\}$ является гладкой. Ее проекция на плоскость $\{R, F\}$ ограничена нижней ветвью нейтральной кривой и штриховой линией 2 на фиг. 1. Сечения поверхности плоскостями $F = \text{const}$ показаны на фиг. 2 ($1-F = 106 \cdot 10^{-6}$; $2-F = 53 \cdot 10^{-6}$).

В двухгармоническом приближении ($N=2$) происходит качественное изменение поверхности решений: существенно уменьшаются максималь-

ные значения u , а поверхность становится разрывной. На фиг. 2 частоте $F=53 \cdot 10^{-6}$ теперь соответствуют кривые 3 и 4. В отличие от моногармонического случая (кривая 2) непрерывным образом пройти от нижней ветви нейтральной кривой до верхней в сечении $F=\text{const}$ нельзя. В конечных точках кривых 3 и 4 при $u \neq 0$ амплитуда первой гармоники обращается в нуль и решение вырождается в моногармоническое с частотой $2F$ (кривая 1).

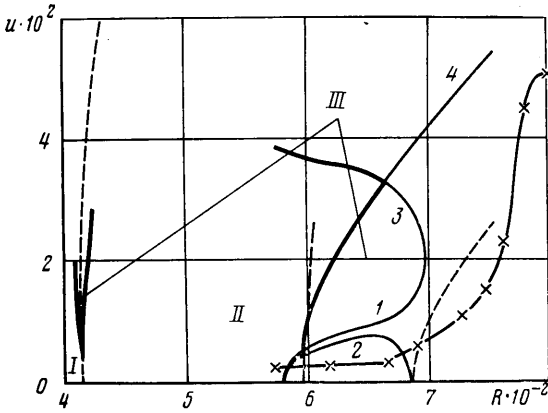
Таким образом, линии разрыва поверхности в пространстве $\{R, F, u\}$ соответствуют бифуркации удвоения периода автоколебаний. Эта бифуркация, обязанная параметрическому резонансу, как свидетельствуют результаты, возможна и для чисто двумерных режимов течения. Однако она происходит при достаточно высоких значениях u . Как будет показано далее, пороговые величины u существенно меньше. Минимальные значения u , при которых происходит вторичная бифуркация, отвечают трехмерным возмущениям.

Важным следствием расчетов является установление того, что при $u \leq 0,02$ результаты моно- и двухгармонических приближений практически совпадают (см. фиг. 2). Поэтому в случае малых пороговых значений u для возникновения трехмерности основной автоколебательный режим удовлетворительно описывается приближениями с $N=1,2$. Судя по опытным данным [2, 10], пороговые величины u достаточно малы, особенно для s -режима. Поэтому при расчете порога s -режима УВТШ рассчитывается в приближении $N=1$, а K -режима — $N=2$, что оправдано и результатами расчета.

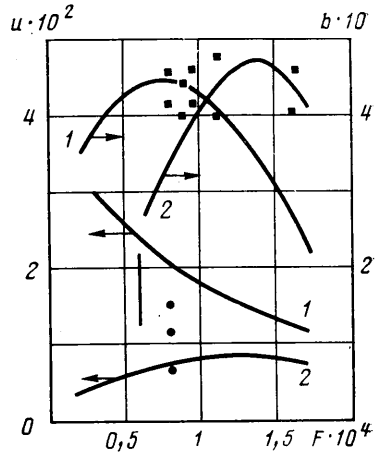
2. При анализе бифуркаций трехмерных вторичных автоколебаний уравнения Навье — Стокса линеаризуются около решения, соответствующего УВТШ. Поле скорости ищется в виде $\mathbf{u} = \mathbf{u}_b + \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$, где \mathbf{u}_b отвечает течению Блазиуса, \mathbf{u}_1 — добавка, связанная с первичными автоколебаниями (1.1), а \mathbf{u}_2 — возмущение, по которому производится линеаризация. Наиболее опасными оказываются возмущения, которые связаны параметрическим резонансным взаимодействием с гармониками УВТШ. Для первой гармоники, которая дает главный вклад в УВТШ при малых u , резонансные возмущения состоят из двух косых волн с параметрами $(\alpha/2, \pm\beta, F/2)$. При малых u резонансное взаимодействие приводит к линейной зависимости линеаризованного оператора от u , в то время как другие взаимодействия являются слабонелинейными и дают вклад порядка u^2 и выше. Поэтому при определении порогового значения u достаточно учесть взаимодействие косых волн с первой гармоникой УВТШ в разложении (1).

Результаты расчета пороговых значений представлены на фиг. 3. Штрихпунктирной кривой нанесена зависимость от R величины $\theta = \arctg(\beta/\alpha)$ — угла между направлением набегающего потока и направлением распространения косой волны, 2θ — угол при вершине вихревой лямбда-структуры. Нижние ветви зависимостей $u(R)$, $\theta(R)$ соответствуют окрестности верхней ветви нейтральной кривой (значения α и F не отличаются от значений при $u=0$ с точностью до тысячных долей), а верхние — нижней ветви. Бифуркация s -режима происходит всегда при $u < 0,0045$, но пороговые значения на нижней ветви на порядок и более выше, чем на верхней ветви нейтральной кривой. Поэтому следует ожидать, что при малых u рост трехмерных возмущений начинается вблизи верхней ветви нейтральной кривой. Это согласуется с экспериментальными данными [2]. Величина β наиболее растущих трехмерных возмущений в широком диапазоне чисел Рейнольдса (и соответственно частот) на верхней ветви остается величиной практически постоянной, $\beta \approx 0,11$ для $300 < R < 3000$, и по порядку величины согласуется с размерами наблюдаемых в s -режиме лямбда-структур [2].

Наряду с определением порога для s -режима были проведены расчеты ветвящихся трехмерных вторичных автоколебаний в трехгармоническом приближении. Колебания были представлены гармониками с параметра-



Фиг. 4



Фиг. 5

ми (α, F) , $(\alpha/2, \pm\beta, F/2)$, амплитуды которых в зависимости от поперечной координаты y находились в результате решения нелинейной задачи на собственные значения [11]. Некоторые результаты расчетов для значения $F=F_0=106 \cdot 10^{-6}$ приведены на фиг. 4. Штриховые линии соответствуют сечениям $F=F_0$, $F_0/2$ моногармонической поверхности (т. е. кривым 1, 2 на фиг. 2). Жирные сплошные линии являются границей проекции на плоскость (u, R) поверхности решений для трехгармонического приближения в пространстве параметров (u, R, β) . Эта поверхность имеет сложную форму и содержит складки. Тонкие линии на фиг. 4 это проекции границ складок, причем линии 2, 3 отвечают локальным максимумам $u(\beta)$ при $R=\text{const}$, а линия 1 — минимумам. В области I возмущения частоты F_0 затухают, в области II растут двумерные возмущения ($\beta=0$), в области III — растут трехмерные. Вблизи нижней ветви нейтральной кривой область III имеет при малых и умеренных u очень малую протяженность по R (и, следовательно, по x). Поэтому даже для возмущений, амплитуда которых превышает пороговое значение 0,0035, трехмерность не успевает заметно развиться за то время, пока сносимое вниз по потоку возмущение пересекает зону неустойчивости.

Совсем иная ситуация вблизи верхней ветви. С приближением к ней трехмерные возмущения половинной частоты (а с ними порождаемая кратная гармоника частоты F_0) начинают расти в силу линейной неустойчивости (см. точку пересечения линии 1 с осью $u=0$). Граница начала роста трехмерных возмущений частоты $F/2$ показана штрихпунктирной линией на фиг. 1. Она определяется получаемым при помощи преобразования Сквайра уравнением $F=2a/R^2$, где $a=18$ — минимальное значение комплекса FR^2 для двумерных нейтральных возмущений. Далее (за точкой пересечения линии 4 с осью $u=0$) начинают расти двумерные возмущения половинной частоты. Этот рост также связан с линейной неустойчивостью. Как известно, инкременты нарастания очень малы, поэтому амплитуде возмущений половинной частоты растет медленно и субгармонические колебания не выделяются заметно среди других возмущений. Резкий минимум кривой 2 вблизи $R \approx 690$ связан с параметрическим резонансом. За этой точкой гармоники основной и половинной частоты вступают в резонансное взаимодействие, в результате которого их амплитуды начинают резко увеличиваться. На фиг. 4 крестами нанесены результаты экспериментальной работы [2], где измерялось развитие возмущения частоты $F=106 \cdot 10^{-6}$ вниз по течению. Они вполне согласуются выводами теоретического расчета.

3. Задача об определении порога для K -режима значительно сложнее. Это связано с тем, что следует учитывать взаимодействие значительно

большого числа гармоник. Прежде всего, поскольку K -режим связан с параметрическим резонансом трехмерных возмущений и кратной гармоникой УВТШ, последнюю следует рассчитывать, принимая $N \geq 2$ в представлении (1). Линеаризованный на возмущениях оператор зависит от амплитуды кратной гармоникой УВТШ линейным образом. При малых u эта амплитуда имеет порядок u^2 . Но такого же порядка и слабо нелинейное взаимодействие возмущений с параметрами (α, β, F) , $(2\alpha, \beta, 2F)$, $(0, \beta, 0)$ через основную гармонику УВТШ $(\alpha, 0, F)$. В результате получаем линеаризованную систему, которую схематично можно представить в виде

$$L_1 \mathbf{u}_{\alpha\beta} = B_{11}(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_{\alpha\beta}) + B_{12}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_\beta) + B_{13}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_{2\alpha\beta})$$

$$L_2 \mathbf{u}_\beta = B_{21}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_{\alpha\beta}), \quad L_3 \mathbf{u}_{2\alpha\beta} = B_{31}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_{\alpha\beta})$$

где L — линейные, а B — билинейные операторы, $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ отвечают первой и второй гармонике УВТШ, а \mathbf{u} с индексами, зависящими от α и β , соответствуют трехмерным возмущениям, связанным взаимодействием порядка u^2 . Взаимодействие их через другие гармоники имеет порядок не менее u^3 . Трудность решения этой системы связана с высоким порядком. Система обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд имеет 36-й порядок. Попытка использовать простую итерацию по u^2 не увенчалась успехом. Для представляющих интерес значений u итерации расходились. Задача решена методом прогонки со стыковкой [8]. Суть его в том, что граничные условия со стенки и с бесконечности сносятся во внутреннюю точку, расположенную вблизи максимума скорости возмущений. Это обеспечивает устойчивость численного алгоритма, несмотря на наличие малого параметра при старшей производной и критической точки, где он меняет знак. Совокупность условий в точке стыковки составляют систему линейных однородных алгебраических уравнений. Для нетривиальной разрешимости необходимо, чтобы определитель этой системы Φ обратился в ноль. При малых значениях u величина Φ монотонно увеличивается с ростом β . При больших u зависимость $\Phi(\beta)$ становится немонотонной. Когда u достигает порогового значения, график $\Phi(\beta)$ касается оси $\Phi=0$, а при больших $\Phi(\beta)$ пересекает ее.

Зависимость пороговой амплитуды от частоты возмущений вблизи нижней (кривая 1) и верхней (2) ветвей нейтральной кривой отражает фиг. 5. Зависимость частоты F от числа Рейнольдса практически та же, что и на нейтральной кривой (см. фиг. 1). На фиг. 5 приведены также опытные данные [2] для возмущений с частотой $F=81 \cdot 10^{-6}$. Нижняя точка отвечает s -режиму и это соответствует теории, поскольку значение u ниже порога для K -режима, но выше порога для s -режима (см. фиг. 3). Средняя точка — промежуточному, а верхняя — K -режиму. Но и в промежуточном случае трансверсальный размер структур такой же, как и в K -режиме. Вертикальный отрезок на фиг. 5 соответствует опытным данным [1], относящимся к K -режиму.

Там же приведена зависимость величины $b=10^3 \beta/R$, характеризующей расстояние между структурами вдоль оси z , от частоты. Линии 1 и 2 по-прежнему соответствуют нижней и верхней ветвям нейтральной кривой. Темные квадраты нанесены по опытным данным [12]. Совпадение теории и эксперимента можно считать вполне удовлетворительным, тем более что небольшое превышение u над порогом приводит к быстрому увеличению диапазона β для растущих трехмерных возмущений.

Продольный размер лямбда-структур определяется в рамках линейной теорией устойчивости в хорошем согласии с опытом.

При очень высоких частотах ($F > 170 \cdot 10^{-6}$, см. фиг. 1) УВТШ неустойчивы к возмущениям с весьма малыми значениями $\beta \leq 0,02$. В этом случае порог практически отсутствует и рост возмущений происходит при как угодно малых значениях u .

Тот факт, что резонансное и слаболинейное взаимодействия возмущений в k -режиме имеют одинаковый порядок величины, отражается при численном анализе следующим образом. Пренебрежение слабонелинейным взаимодействием приводит к существенному изменению результатов и, в частности, величины порога.

ЛИТЕРАТУРА

1. Klebanoff P. S., Tidstrom K. D., Sargent L. M. The three-dimensional nature of boundary-layer instability // J. Fluid Mech. 1962. V. 12. № 1. P. 1–34.
2. Козлов В. В., Левченко В. Я., Сарик В. С. Образование трехмерных структур при переходе к турбулентности в пограничном слое // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 6. С. 42–50.
3. Kachanov Yu. S., Kozlov V. V., Levchenko V. Ya., Ramazanov M. P. On nature of K-breakdown of a laminar boundary layer. New experimental data // IUTAM. Laminar-Turbulent Transition. Symp., Novosibirsk, USSR, July 9–13, 1984. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1985. P. 61–73.
4. Raetz G. S. A new theory of the cause of transition in fluid flows. «Nor air Rept NOR-59-383», 1959. P. 12.
5. Craik A. D. D. Non-linear resonant instability in boundary layers // J. Fluid Mech. 1971. V. 50. № 2. P. 393–413.
6. Herbert T. Analysis of the subharmonic route to transition in boundary layer. AIAA-84-0009, 1984. P. 9.
7. Herbert T. Three-dimensional phenomena in the transitional flat-plate boundary layer. AIAA-85-0489, 1985. P. 10.
8. Гольдштик М. А., Штерн В. Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука, 1977. 366 с.
9. Юдович В. И. Об автоколебаниях, возникающих при потере устойчивости параллельных течений вязкой жидкости относительно длинноволновых периодических возмущений // Изв. АН СССР. МЖГ. 1973. № 1. С. 32–35.
10. Kachanov Yu. S., Levchenko V. Ya. The resonant interaction of disturbances at laminar-turbulent transition in a boundary layer // J. Fluid Mech. 1984, V. 138. P. 209–247.
11. Ljshits A. M., Shtern V. N. Gauss Method in Nonlinear Stability Problems // Notes Numer. Fluid Mech. Proc. Sixth GAMM-Conf. on Num. Meth. in Fl. Mech, BRD, 1986. № 13. P. 241–247.
12. Козлов В. В., Левченко В. Я., Сарик В. С. Образование трехмерных структур при переходе в пограничном слое: Препринт № 10–83. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1983. 34 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию
21.IV.1988