МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 · 1989

УДК 532.5.013.4:536.25

БЕРЕЗИН Ю. А., ЖУКОВ В. П.

О ВЛИЯНИИ ВРАЩЕНИЯ НА КОНВЕКТИВНУЮ УСТОЙЧИВОСТЬ КРУПНОМАСШТАБНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ТУРБУЛЕНТНОЙ ЖИДКОСТИ

В рамках феноменологического подхода выведены линейные уравнения конвекции в турбулентной жидкости при наличии вращения. Показано, что усиление крупномасштабных возмущений возможно лишь при рассмотрении существенно неоднородной задачи, когда размер крупномасштабного возмущения превышает характерный размер изменения плотности.

Последнее время интенсивно исследуется вопрос о возможности генерации крупномасштабных структур в жидкости или газе на фоне спиральной турбулентности [1–5]. Под спиральной понимается турбулентность, в которой отличен от нуля коррелятор $\langle \mathbf{u}_T \operatorname{rot} \mathbf{u}_T \rangle$, где $\mathbf{u}_T$ – турбулентное поле скорости. Данный коррелятор является псевдоскаляром и отличие его от нуля может быть связано с существованием в системе псевдовектора угловой скорости Ω.

Учет турбулентных пульсаций при отсутствии вращения ведет к перенормировке коэффициентов вязкости и теплопроводности, но не меняет качественно картины конвекции. Если же среда обладает спиральностью, то турбулентность приводит к существенному увеличению горизонтальных размеров конвективных ячеек по сравнению с вертикальным размером [2]. В этом случае в уравнениях конвекции для средней скорости $\langle \mathbf{v} \rangle$ появляются слагаемые, пропорциональные производным $\partial \langle v_k \rangle / \partial x_i$. Конкретный вид этих членов зависит от сделанных при их выводе предположений [1, 2], поэтому представляет интерес выяснить его, исходя не из механизма их возникновения, а из феноменологических представлений. В разд. 1 данной работы показано, что эти члены, связанные со спиральностью турбулентных пульсаций, могут быть представлены в виде суммы трех слагаемых, которые в приближении уравнений Буссинеска равны нулю. В разд. 2 показано, что для усиления крупномасштабных возмущений необходимо, чтобы характерный масштаб этого возмущения был больше либо порядка масштаба неоднородности системы по высоте, и предложены уравнения, учитывающие эту неоднородность.

1. Во вращающейся жидкости, подвергаемой мелкомасштабному случайному воздействию, уравнения Буссинеска имеют вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho_0} + \beta g \mathbf{e}\theta + \nu\Delta\mathbf{v} - 2[\boldsymbol{\Omega}\mathbf{v}] + \frac{\mathbf{F}}{\rho_0}$$
$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\theta = A(\mathbf{e}\mathbf{v}) + \chi\Delta\theta, \qquad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \qquad \mathbf{e} = (0, 0, 1) \tag{1.1}$$

Здесь все обозначения стандартные [6], $\mathbf{F}$ – случайная сила, относительно которой будем предполагать, что она не вносит в систему дополнительных векторов или псевдоскаляров, т. е. что ее корреляторы обладают свойствами однородности, изотропности, отражательной инвариантности и стационарности.

Усреднив (1.1) по мелкомасштабным пульсациям, получим

$$\frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial t} = -\frac{\nabla_i \langle p \rangle}{\rho_0} + \beta g e_i \langle \theta \rangle + \nu\Delta\langle v_i \rangle - 2[\boldsymbol{\Omega}\langle \mathbf{v} \rangle]_i + \frac{\partial \pi_{ij}}{\partial x_j}$$
$$\frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial t} = A(\mathbf{e}\langle \mathbf{v} \rangle) + \chi\Delta\langle \theta \rangle + \operatorname{div}\mathbf{Q}, \qquad \operatorname{div}\langle \mathbf{v} \rangle = 0 \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{Q}$ и π_{ij} — связанные с турбулентностью поток тепла и тензор напряжений. Считая амплитуды крупномасштабных возмущений скорости $\langle\mathbf{v}\rangle$ и температуры $\langle\theta\rangle$ малыми, предположим, что π_{ij} линейно связан со средней скоростью, а $\mathbf{Q}$ — с температурой. Для простоты предположим, что $\mathbf{Q}=\chi_T\nabla\langle\theta\rangle$. Для π_{ij} в общем случае имеем

$$\pi_{ij}(\mathbf{r},t)=\tau^{-1}\int d^3r'\int_0^\infty dt'\,L_{ijk}(\mathbf{r}',t')\langle v_k(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t')\rangle$$

$$\frac{\partial\pi_{ij}}{\partial x_j}=-\tau^{-1}\int d^3t'\int_0^\infty dt'\,\frac{\partial L_{ijk}(\mathbf{r}',t')}{\partial x_j'}\langle v_k(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t')\rangle \tag{1.3}$$

где $\tau\sim l/u_T$ — временно́й, l — пространственный масштабы турбулентности.

Если вращение слабо влияет на турбулентное поле скорости, задаваемое силой $\mathbf{F}$, т. е. $|[\mathbf{\Omega u}_T]\tau|\ll|\mathbf{u}_T|$ или $\Omega\tau\ll 1$, то тензор L_{ijk} можно разложить по параметру $\Omega\tau$

$$L_{ijk}=\sum_{\mu=0}\tau^\mu\Omega_{\beta1}\Omega_{\beta2}\ldots\Omega_{\beta\mu}L^{(\mu)}_{\beta1,\beta2,\ldots,\beta\mu,i,j,k}$$

Считая, что масштаб корреляций турбулентных пульсаций порядка l (функция $L_{ijk}(\mathbf{r},t)$ существенно отлична от нуля при $|\mathbf{r}|\leqslant l$) много меньше масштаба изменения средних величин L, разложим выражение (1.3) по малому параметру l/L. Тогда для $\partial\pi_{ij}/\partial x_j$ будем иметь выражение

$$\frac{\partial\pi_{ij}}{\partial x_j}=\sum_{\mu=0}^\infty\sum_{\sigma=1}^\infty\tau^{\mu-1}l^\sigma\Omega_{\beta1}\Omega_{\beta2}\ldots\Omega_{\beta\mu}\int_0^\infty dt'\,L^{(\mu,\sigma)}_{\beta1,\beta2,\ldots,\beta\mu,i,k,\alpha1,\alpha2,\ldots,\alpha\sigma}(t')\times$$
$$\times\frac{\partial^\sigma\langle v_k(\mathbf{r},t-t')\rangle}{\partial x_{\alpha1}\partial x_{\alpha2}\ldots\partial x_{\alpha\sigma}} \tag{1.4}$$

Как было отмечено выше, в отсутствие вращения турбулентность приводит к перенормировке коэффициента вязкости: $\nu\to\nu_T\sim l^2/\tau$. Поэтому первые члены разложения (1.4) имеют вид (считаем, что время изменения крупномасштабных величин много больше τ)

$$\frac{\partial\pi_{ij}}{\partial x_j}=\nu_T\Delta\langle v_i\rangle+l\Omega_\beta\int_0^\infty L^{(1,1)}_{\beta ik\alpha}(t')\,dt'\,\frac{\partial\langle v_k(r,t)\rangle}{\partial x_\alpha}$$

Изучим структуру величины $L^{(1,1)}_{\beta ik\alpha}$. Так как π_{ij} является истинным тензором, а $\mathbf{\Omega}$ — псевдовектор, то $L^{(1,1)}_{\beta ik\alpha}$ — псевдотензор. Для его построения можно использовать все параметры задачи, кроме $\mathbf{\Omega}$. Среди этих параметров псевдотензоров нет, поэтому $L^{(1,1)}_{\beta ik\alpha}$ должен содержать в качестве сомножителей нечетное число абсолютно антисимметричных псевдотензоров ε_{ijk}. В случае изотронной среды $L^{(1,1)}_{\beta ik\alpha}$ может содержать также тензор δ_{ij}. Но из сверток δ_{ij} и нечетного числа ε_{ijk} построить псевдотензор с четным числом индексов невозможно. Поэтому интересующие нас члены в изотронной среде отсутствуют. В случае уравнений Буссинеска среда имеет выделенное направление, связанное с силой тяжести и градиентом температуры. Легко видеть, что псевдотензор $L^{(1,1)}_{\beta ik\alpha}$ может быть представлен в виде линейной комбинации следующих псевдотензоров: $e_\beta\varepsilon_{ik\alpha}$, $e_\beta e_i e_m \varepsilon_{mk\alpha}$, $\delta_{\beta i} e_m \varepsilon_{mk\alpha}$ и всех псевдотензоров, получаемых из них перестановкой индексов.

Используя тождество $e_i e_\beta \varepsilon_{k\alpha\beta} - e_\alpha e_\beta \varepsilon_{ki\beta} = \varepsilon_{ik\alpha} + e_k e_\beta \varepsilon_{i\alpha\beta}$, при $\mathbf{\Omega}$, параллельном $\mathbf{e}$, для $\partial\pi_{ij}/\partial x_j$ получим следующее выражение в векторном виде:

$$\nu_T \Delta\langle\mathbf{v}\rangle + (\mathbf{\Omega e})\{\xi, \operatorname{rot}\langle\mathbf{v}\rangle + \xi_2(\mathbf{e}(\mathbf{e}\operatorname{rot}\langle\mathbf{v}\rangle) - (\mathbf{e}\nabla)[\mathbf{e}\langle\mathbf{v}\rangle]) + \xi_3[\mathbf{e}\nabla](\mathbf{e}\langle\mathbf{v}\rangle)\} \quad (1.5)$$

где ξ_1, ξ_2, ξ_3 — некоторые коэффициенты.

Таким образом, уравнения (1.2) для средних с учетом (1.5) примут вид

$$\frac{\partial\langle\mathbf{v}\rangle}{\partial t} = -\frac{\nabla\langle p\rangle}{\rho_0} - \beta g\mathbf{e}\langle\theta\rangle + \nu_T\Delta\langle\mathbf{v}\rangle - 2[\mathbf{\Omega}\langle\mathbf{v}\rangle] + \Omega\{\xi_1 \operatorname{rot}\langle\mathbf{v}\rangle +$$
$$+ \xi_2(\mathbf{e}(\mathbf{e}\operatorname{rot}\langle\mathbf{v}\rangle) - (\mathbf{e}\nabla)[\mathbf{e}\langle\mathbf{v}\rangle]) + \xi_3[\mathbf{e}\nabla](\mathbf{e}\langle\mathbf{v}\rangle)\}, \qquad \Omega \equiv (\mathbf{\Omega e})$$
$$\frac{\partial\langle\theta\rangle}{\partial t} = A(\mathbf{e}\langle\mathbf{v}\rangle) + \chi_T\Delta\langle\theta\rangle, \qquad \operatorname{div}\langle\mathbf{v}\rangle = 0$$

Так как $\nu_T \sim \chi_T \sim l u_T$, то в дальнейшем будем считать $\chi_T = \nu_T$.

Перепишем эту систему в безразмерном виде. Для этого введем масштабы: длину L, время $t_0 = L^2/\nu_T$, скорость $u_0 = \nu_T/L$, температуру $T_0 = AL$, давление $p_0 = \rho_0\nu_T^2/L^2$, угловую скорость $\Omega_0 = -2L^2/\nu_T$. Тогда

$$\frac{\partial\langle\mathbf{v}\rangle}{\partial t} = -\nabla\langle p\rangle + R\mathbf{e}\langle\theta\rangle + \Omega[\mathbf{e}\langle v\rangle] + \Delta\langle\mathbf{v}\rangle + \Omega\{S_1 \operatorname{rot}\langle\mathbf{v}\rangle +$$
$$+ S_2(\mathbf{e}(\mathbf{e}\operatorname{rot}\langle v\rangle) - (\mathbf{e}\nabla)[\mathbf{e}\langle\mathbf{v}\rangle]) + S_3[\mathbf{e}\nabla](\mathbf{e}\langle\mathbf{v}\rangle)\}$$
$$\frac{\partial\langle\theta\rangle}{\partial t} = (\mathbf{e}\langle\mathbf{v}\rangle) + \Delta\langle\theta\rangle, \qquad \operatorname{div}\langle\mathbf{v}\rangle = 0$$

Здесь $R = \beta g A L^4/\nu_T^2$ — число Рэлея, $S_{1,2,3} = -2L^3\xi_{1,2,3}/\nu_T^2$.

Ищем решение этой системы в стандартной форме $\langle\mathbf{v}\rangle = \mathbf{v}_0 \exp(\gamma t + iqx + i\pi z]$, $\langle\theta\rangle = \theta_0 \exp(\gamma t + iqx + i\pi z)$ и получаем для инкремента γ следующее дисперсионное уравнение:

$$(\gamma + K^2)\{(\gamma + K^2)^2 - K^{-2}[Rq^2 + \Omega^2(i\pi + S_1K^2 +$$
$$+ S_2\pi^2 + S_3q^2)(i\pi + S_1K^2 + S_2(\pi^2 - q^2))]\}^{1/2}, \qquad K^2 = q^2 + \pi^2$$

Одно из решений этого уравнения имеет вид

$$\gamma = -K^2 + \{K^{-2}[Rq^2 + \Omega^2(i\pi + S_1K^2 + S_2\pi^2 + S_3q^2)(i\pi + S_1K^2 + S_2(\pi^2 - q^2))]\}^{1/2}$$

Остальные два решения имеют отрицательную вещественную часть и интереса в смысле развития неустойчивости не представляют.

В обычной конвекции ($S_1 = S_2 = S_3 = 0$) наиболее неустойчивы возмущения с волновыми числами $q \sim \pi$. Длинноволновые ($q \ll \pi$) возмущения оказываются устойчивыми ($\operatorname{Re}\gamma < 0$). Наличие силы Кориолиса приводит к увеличению запаса устойчивости длинных волн [6].

Рассмотрим, как влияет на инкремент каждый из коэффициентов S_1, S_2, S_3. При $S_1 \neq 0$, $S_2 = S_3 = 0$ имеем

$$\gamma = -K^2 + \sqrt{K^{-2}(Rq^2 + \Omega^2(i\pi + S_1K^2)^2}$$

Разложим это выражение по степеням $q^2 \ll \pi^2$ (учтем, что $S_1\pi \ll 1$)

$$\operatorname{Re}\gamma \approx \pi(\Omega S_1 - \pi) - \left[\pi^2 - \frac{\Omega S_1 \pi}{2}\left(1 + \frac{R}{\Omega^2}\right)\right]\frac{q^2}{\pi^2}$$

$$\operatorname{Im}\gamma \approx \Omega\left(1 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{R}{\Omega^2}\right)\frac{q^2}{\pi^2}\right)$$

Возмущения с максимальной длиной волны будут наиболее неустойчивыми, если $\mathrm{Re}\,\gamma|_{q=0}>0$ и $d\,\mathrm{Re}\,\gamma/dq^2|_{q=0}<0$. В данном случае эти условия имеют вид $\Omega S_1>\pi$, $R<\Omega^2(2\pi^2/\Omega S_1\pi-1)$.

Критическое число Рэлея R_*, при котором $\mathrm{Re}\,\gamma=0$, в данном случае равно

$$R_*=\frac{K^6+\Omega^2\pi^2}{q^2}\left(1-\frac{S_1^2\pi^2\Omega^2}{K^2\pi^2}\right)$$

На фигуре приведена качественная зависимость R_* от q при $S_1=0$ (кривая *1*) и $S_1\neq 0$ (кривая *2*) при большой угловой скорости $\Omega\gtrsim\pi/S_1$.

При $S_2\neq 0$, $S_1=S_3=0$ имеем

$$\gamma=-K^2+\sqrt{\frac{Rq^2+\Omega^2(S_2\pi^2+i\pi)\,(S_2(\pi^2-q^2)+i\pi)}{K^2}}$$

При малых q имеем

$$\mathrm{Re}\,\gamma\approx\pi(\Omega S_2-\pi)-\left[\pi^2-\frac{\Omega S_2\pi}{2}\left(\frac{R}{\Omega^2}-1\right)\right]\frac{q^2}{\pi^2}$$

$$\mathrm{Im}\,\gamma\approx\Omega\left[1-\frac{1}{2}\left(1+\frac{R}{\Omega^2}\right)\frac{q^2}{\pi^2}\right]$$

$$\mathrm{Re}\,\gamma>0,\quad \frac{d\,\mathrm{Re}\,\gamma}{dq^2}<0,\quad \Omega S_2>\pi,\quad R<\Omega^2\left(1+\frac{2\pi^2}{\Omega S_2\pi}\right)$$

Выражение для критического числа Рэлея имеет вид

$$R_*=\frac{K^6+\Omega^2\pi^2}{q^2}\left(1-S_2^2\pi^2\frac{\Omega^2(\pi^2-q^2)}{K^6}\right)-\frac{\Omega^4S_2^2\pi^2q^2}{4K^6}$$

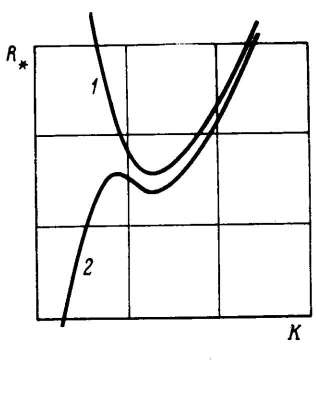
Типичная зависимость R_* от q аналогична зависимости, изображенной на фигуре.

При $S_3\neq 0$, $S_1=S_2=0$ имеем

$$\gamma=-K^2+\sqrt{\frac{Rq^2-\Omega^2\pi^2+i\Omega^2S_3\pi q^2}{K^2}}$$

В этом случае наличие спиральности ($S_3\neq 0$) не приводит к усилению возмущений с $q^2\ll\pi^2$.

Однако коэффициенты ξ_1, ξ_2, ξ_3 оказываются равными нулю в силу свойств симметрии уравнения Буссинеска. Действительно, при замене $\mathbf{e}\to-\mathbf{e}$, $\theta\to-\theta$ в уравнениях (1.1) поле скорости $\mathbf{v}$ не меняется. Уравнения для средней скорости получаются усреднением уравнений (1.1), поэтому они должны обладать теми же свойствами. Однако легко видеть, что выражение (1.5) меняет знак при замене $\mathbf{e}\to-\mathbf{e}$. Поэтому $\xi_1=\xi_2=\xi_3=0$.



Отметим, что по этой же причине равны нулю и все остальные величины

$$L^{(\mu,\,\sigma)}_{\beta_1,\,\beta_2,\dots,\,\beta\mu,\,i,\,k,\,\alpha 1,\,\alpha 2,\dots,\,\alpha\sigma}$$

в выражении (1.4) при нечетном σ, так как они содержат нечетное число векторов $\mathbf{e}$. Слагаемые с четным σ и четным μ в (1.4) влияют на инкремент γ как малые поправки к силе вязкости, а с четным σ и нечетным μ — к силе Кориолиса.

Подчеркнем, что равенство нулю членов с ξ_1 и ξ_3 в (1.5) вытекает также из того, что тензор π_{ij} (см. (1.3)) в несжимаемой жидкости должен быть симметричным: $\pi_{ij}=\pi_{ji}$. Член же с ξ_2 удовлетворяет этому условию и равен нулю только в силу инвариантности поля скорости относительно замены $\mathbf{e}\to-\mathbf{e}$, $\theta\to-\theta$.

Отметим, что в приближении уравнений Буссинеска спиральность $\langle \mathbf{u}_T \operatorname{rot} \mathbf{u}_T \rangle$ равна нулю, так как этот псевдоскаляр пропорционален $(\mathbf{\Omega e})$ и отличие его от нуля противоречит инвариантности поля скорости относительно замены $\mathbf{e}\to-\mathbf{e}$, $\theta\to-\theta$.

2. Появление членов с $\mu=\sigma=1$ в разложении (1.4) становится возможным, если учесть сжимаемость жидкости.

В этом случае, используя уравнения непрерывности, теплопроводности и состояния $\rho=\rho_0(1+\beta(\theta-Az))$, получим уравнение $\operatorname{div}\mathbf{v}=-\beta\chi\Delta\theta$, которое неинвариантно относительно замены $\mathbf{e}\to-\mathbf{e}$, $\theta\to-\theta$. Составляющая скорости, связанная с отличной от нуля сжимаемостью, при достаточно большом $\chi(\chi\gtrsim\chi_T)$ будет иметь порядок $u'\sim l\beta A u_T=(l/\lambda)u_T$, где $\lambda=(\beta A)^{-1}$ — масштаб изменения плотности, связанный с градиентом температуры. Отметим, что в газе u' будет иметь тот же порядок, но изменение объема газа будет описываться адиабатой и не связано с изменением его температуры за счет теплопроводности. Таким образом, член с $\mu=\sigma=1$ в разложении (1.4) будет иметь порядок не $\Omega(l/L)\langle v\rangle$, а $\Omega(l^2/\lambda L)\langle v\rangle$. Из анализа инкрементов γ, данного в разд. 1, видно, что возмущения с большими горизонтальными размерами наиболее неустойчивы в том случае, если усиление возмущения за счет спиральности превышает вязкую диссипацию, т. е. $\Omega(l^2/\lambda L_\parallel)\langle v\rangle\gtrsim\nu_T\langle v\rangle/L_\parallel^2\sim(l^2/L^2)\langle v\rangle/\tau$ или $\Omega\tau\gtrsim\lambda/L_\parallel$, где $L_\parallel$ — вертикальный масштаб возмущения. (Отметим, что в это условие масштаб турбулентных пульсаций l не входит.) Использованное при исследовании тензора π_{ij} условие $\Omega\tau\ll1$ непринципиально и связано с тем, что при больших Ω надо учитывать частотную дисперсию, так как характерное время изменения средних величин порядка Ω^{-1}, и неизотропию коэффициента турбулентной вязкости. Но и при $\Omega\tau\sim1$ усиление крупномасштабных возмущений возможно только в неоднородной среде ($L\gg\lambda$).

В неоднородном случае тензор L_{ijk} (см. (1.3)) будет зависеть от высоты z. Так как зависимость от z связана с неоднородностью задачи, то z будет входить в виде отношения z/λ. Кроме того, L_{ijk} будет зависеть от параметра l/λ. При $\lambda\to\infty$ этот тензор должен переходить в тензор, вычисленный в приближении уравнений Буссинеска. Тензор L_{ijk} описывает влияние течения в точках $\mathbf{r}+\mathbf{r}'$ на изменение средней скорости в точке $\mathbf{r}$, причем это влияние существенно только при $|\mathbf{r}'|\lesssim l$. Но при $l\ll\lambda$ на расстояниях порядка l среда хорошо описывается уравнениями Буссинеска, поэтому структура L_{ijk} при $l/\lambda\to0$ должна приближаться к структуре этого тензора, вычисленного в рамках этих уравнений. При этом величина z/λ может не быть малой. Тогда для L_{ijk} можно приближенно записать

$$L_{ijk}\approx L_{ijk}\big|_{l/\lambda=0}+\frac{l}{\lambda}\left(\frac{\partial L_{ijk}}{\partial(l/\lambda)}\right)_{l/\lambda=0}$$

Первое слагаемое в этом выражении вычисляется по уравнениям Буссинеска и дает турбулентную вязкость, зависящую от z, а второе дает члены, связанные со спиральностью.

Выражение (1.5) тогда перепишется в виде

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\nu_T(z)\rho_0(z)\frac{\partial\langle\mathbf{v}\rangle}{\partial x_k}\right)+\frac{\Omega}{\rho_0}\{\operatorname{rot}\rho_0\xi_1\langle\mathbf{v}\rangle+(\mathbf{e}(\mathbf{e}\operatorname{rot}(\rho_0\xi_2\langle\mathbf{v}\rangle)-$$
$$-(\mathbf{e}\nabla)(\rho_0\xi_2[\mathbf{e}\langle\mathbf{v}\rangle])+[\mathbf{e}\nabla](\rho_0\xi_3(\mathbf{e}\langle\mathbf{v}\rangle)))\} \quad (2.1)$$

где $\rho_0(z)$ — начальная равновесная плотность.

При $L\gg\lambda$ вид уравнений в отсутствие турбулентных пульсаций также должен быть изменен. Рассмотрим случай газа с уравнением состояния $p=\rho T$. Уравнения Навье — Стокса в этом случае имеют вид [7]

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}=\frac{1}{\rho_0+\rho}\left(-\nabla_i p-e_i g\rho+\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}\right)-2[\Omega v]_i$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}=-\{(\mathbf{v}\nabla)(p+p_0)+\varkappa(p+p_0)\operatorname{div}\mathbf{v}-\chi(\rho+\rho_0)\Delta(T+T_0)\}+\sigma_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \qquad (2.2)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\operatorname{div}(\rho+\rho_0)\mathbf{v},\qquad T+T_0=\frac{p+p_0}{\rho+\rho_0}$$

$$\sigma_{ik}=\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)+\left(\xi-\frac{2}{3}\eta\right)\delta_{ik}\operatorname{div}\mathbf{v}$$

Здесь $\varkappa$ — показатель адиабаты, $p_0(z)$, $\rho_0(z)$, $T_0(z)$ — начальные равновесные давление, плотность и температура

$$p_0=\rho_0T_0,\qquad \chi\Delta T_0=0,\qquad \nabla p_0=-\mathbf{e}\rho_0 g$$

Выберем в качестве масштабов давления, плотности, температуры характерные значения величин p_0, ρ_0, T_0, длины — L, времени — t_0, скорости — характерную скорость звука $c_s\sim\sqrt{\varkappa p_0/\rho_0}$. Предполагая, что скорость (в размерных переменных) $|\mathbf{v}|\leqslant L/t_0\ll c_s$, ищем решение (2.2) в виде разложения

$$\mathbf{v}=\left(\frac{L}{c_st_0}\right)\mathbf{v}^{(1)}+\left(\frac{L}{c_st_0}\right)^2\mathbf{v}^{(2)}+\ldots$$

$$p_0+p=p_0+p^{(0)}+\left(\frac{L}{c_st_0}\right)p^{(1)}+\left(\frac{L}{c_st_0}\right)^2p^{(2)}$$

и т. д.

Тогда для $p^{(0)}$ и $p^{(1)}$ имеем уравнения

$$\nabla p^{(0)}=\nabla p^{(1)}=0$$

т. е. $p^{(0)}$ и $p^{(1)}$ являются функциями времени и не зависят от пространственных переменных. Обозначим $p^{(0)}$ через $C(t)$. Тогда для $\rho^{(0)}$, $\mathbf{v}^{(1)}$, $p\equiv p^{(2)}-(\xi+\eta/3)\operatorname{div}\mathbf{v}$ имеем уравнение (уже в размерных величинах, индексы вверху опущены)

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}=\frac{1}{\rho_0+\rho}(-\nabla p-\mathbf{e}g\rho+\eta\Delta\mathbf{v})-2[\mathbf{\Omega v}]$$

$$\frac{dC}{dt}=-\{(\mathbf{v}\nabla)p_0+\varkappa(p_0+C)\operatorname{div}\mathbf{v}\}+\chi(\rho_0+\rho)\Delta\left(\frac{C\rho_0-p_0\rho}{\rho_0(\rho_0+\rho)}\right) \qquad (2.3)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho_0+\rho)\mathbf{v}=0$$

Величина dC/dt находится из условия разрешимости второго уравнения. Например, если газ заключен в объем V, то это условие имеет вид $\int\operatorname{div}\mathbf{v}d^3r=0$. Можно показать, что если $\chi=0$, то $dC/dt=0$. Если масштаб задачи много меньше масштаба изменения p_0, ρ_0, то из (2.3) можно получить уравнение Буссинеска (1.1) с точностью до переобозначений, поэтому к газу применимы результаты разд. 1.

Так как крупномасштабные возмущения предполагаются малыми, а турбулентные пульсации плотности много меньше ρ_0 в силу условия $l/\lambda\ll1$, то в качестве модельных уравнений, описывающих линейный этап развития крупномасштабных возмущений, можно предложить следующую систему уравнений (для краткости пренебрегая χ и ν):

$$\frac{\partial\langle \mathbf{v}\rangle}{\partial t}=-\frac{\nabla\langle p\rangle}{\rho_0}-\mathbf{e}g\frac{\langle\rho\rangle}{\rho_0}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\rho_0\nu_T(z)\frac{\partial\langle \mathbf{v}\rangle}{\partial x_k}\right)-2[\Omega\langle \mathbf{v}\rangle]+$$

$$+\frac{\Omega}{\rho_0}\{\mathrm{rot}(\rho_0\xi_1(z)\langle \mathbf{v}\rangle+(\mathbf{e}(\mathbf{e}\,\mathrm{rot}(\rho_0\xi_2\langle \mathbf{v}\rangle))-(\mathbf{e}\nabla)(\rho_0\xi_2[\mathbf{e}\langle \mathbf{v}\rangle]))+$$

$$+[\mathbf{e}\nabla](\rho_0\xi_3(\mathbf{e}\langle \mathbf{v}\rangle))\},\qquad \mathrm{div}\langle \mathbf{v}\rangle=-\frac{(\langle \mathbf{v}\rangle\nabla)p_0}{\varkappa p_0}$$

$$\frac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial t}+\mathrm{div}\langle \mathbf{v}\rangle\rho_0=\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\chi_T(z)\frac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial x_k}\right)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Моисеев С. С., Сагдеев Р. З., Тур А. В. и др.* Теория возникновения крупномасштабных структур в гидродинамической турбулентности // ЖЭТФ. 1983. Т. 85. Вып. 6. С. 1979–1987.
2. *Моисеев С. С., Руткевич П. Б., Тур А. В., Яновский В. В.* Крупномасштабные структуры в конвективной турбулентности: Препринт № 1151. М.: ИКИ АН СССР, 1986.
3. *Моисеев С. С., Сагдеев Р. З., Тур А. В. и др.* Физический механизм усиления вихревых возмущений в атмосфере // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273. № 3. С. 549–553.
4. *Сагдеев Р. З., Моисеев С. С., Руткевич П. Б. и др.* О возможном механизме возбуждения крупномасштабных вихрей в атмосфере // Тр. 3-го Междунар. симпоз. «Тропическая метеорология», Ялта, март, 1985. Л., 1987. С. 18–28.
5. *Березин Ю. А., Жуков В. П., Левина Г. В. и др.* Конвекция, спиральная турбулентность и генерация крупномасштабных вихревых структур // Математические модели, аналитические и численные методы в теории переноса. Матер. Междунар. школы-семинара, Минск, 15–23 окт., 1986. Ч. 2. Минск, 1986. С. 3–11.
6. *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
7. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию
4.IV.1988