

УДК 532.516

ИЛЬИНСКИЙ А. Н., ПОТАШЕВ А. В.

## РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ АЭРОГИДРОДИНАМИКИ С УЧЕТОМ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

В приближении теории пограничного слоя решена задача построения контура крылового профиля, обтекаемого потоком вязкой (несжимаемой и сжимаемой) жидкости, по заданному на нем распределению скорости как функции дуговой абсциссы. Получены условия разрешимости. Проведены численные расчеты. По распределению скорости, обеспечивающим безотрывность обтекания, построены контуры крыловых профилей. Изучено влияние вязкости и сжимаемости на решение рассмотренной задачи.

При проектировании крыловых профилей эффективен метод, основанный на решении обратной краевой задачи аэрогидродинамики (ОКЗА). В [1] решена ОКЗА по заданному годографу скорости с учетом вязкости жидкости или газа в приближении теории пограничного слоя. Идея этого решения основана на следующих известных предположениях (см., например, [2]). При больших, порядка  $10^6$ , числах Рейнольдса влияние вязкости сказывается лишь в сравнительно тонком пограничном слое и в расширяющемся следе за профилем. Распределение давления по поверхности крылового профиля при обтекании его вязкой жидкостью совпадает с распределением давления при обтекании идеальной жидкостью полутела (фиг. 1, а), образованного наращиванием на профиль крыла и по обе стороны от нулевой линии тока в его следе толщины вытеснения  $\delta^*$ .

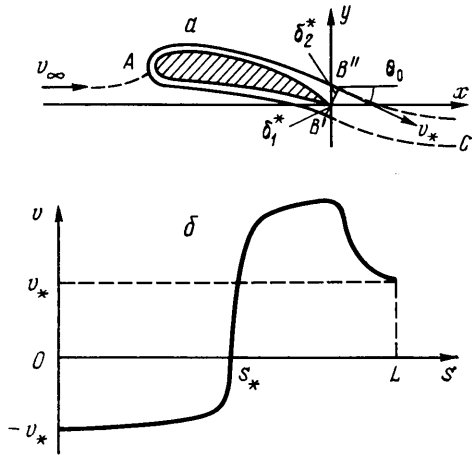
Кроме этих предположений для приближенного решения ОКЗА необходимо еще одно, определяющее форму полутела  $B'CB''$  за профилем. В [1] считается, что линии  $B'C$  и  $B''C$  — линии тока постоянной скорости. В данной работе ОКЗА решается по заданному  $v(s)$  и для определения формы полутела за профилем используется схема Ву струйных течений (см., например, [3]), согласно которой (в предположении безотрывности обтекания) линии  $B'C$  и  $B''C$  считаются конгруэнтными линиями тока. Для построения замкнутого контура профиля применяется аппарат квазирешений (см. [4]).

**Вязкая несжимаемая жидкость.** Постановка задачи такова: требуется найти при указанных предположениях форму крылового профиля, обтекаемого безотрывным плоским установившимся потоком вязкой несжимаемой жидкости, по заданному распределению скорости  $v(s)$  (фиг. 1, б) на части полутела  $B'AB''$  (фиг. 1, а), образованной наращиванием толщины вытеснения  $\delta^*$  на контур профиля. Вектор скорости на бесконечности параллелен оси  $x$ , а ее величина  $v_\infty$  задана. Дуговая абсцисса  $s$  отсчитывается от  $s=0$  в точке  $B'$  до  $s=L$  в точке  $B''$  ( $L$  — периметр  $B'AB''$ ) так, что при возрастании  $s$  вдоль поверхности полутела область течения остается слева. Кусочно-гладкая функция  $v(s)$  обращается в нуль в точке  $A$  разветвления потока ( $s=s_*$ ) и непрерывно дифференцируема в окрестности этой точки. Знак  $v(s)$  связан с направлением обхода:  $v(s) < 0$  при  $0 < s < s_*$ ,  $v(s) > 0$  при  $s_* < s < L$ ;  $v(0) = -v(L) = -v_*$  (фиг. 1, б). Величину  $v_*$ , как указано в [5], следует задавать в пределах от 0,80 до 0,95 в зависимости от толщины профиля.

Решение строится следующим образом. Первоначально определяется форма полутела. В силу принятых предположений задача построения полутела эквивалентна решению ОКЗА для идеальной жидкости [6]. Обозначим через  $w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$  комплексный потенциал течения, где  $z = x + iy$ . Потенциал скорости на контуре полутела имеет вид

$$\varphi(s) = \int_s^s v(s) ds$$

Циркуляция  $\Gamma$  определяется по формуле  $\Gamma = \varphi(L) - \varphi(0) \equiv \varphi_1 - \varphi_0$ . Пусть при конформном отображении  $z = z(\zeta)$  внешности искомого полутела соответствует во вспомогательной плоскости  $\zeta$  внешность единичного круга  $\zeta = e^{i\gamma}$  с разрезом по линии тока от точки  $\zeta = 1$  на бесконечность. При этом  $z(\infty) = \infty$ ,  $z(1) = 0$ . Потенциал скорости потока, обтекающего окружность, имеет вид  $\varphi(\gamma) = \Gamma \{ [\cos(\gamma - \alpha) - \cos \alpha] / \sin \alpha - \gamma \} / (2\pi) + \varphi_1$ , где  $\alpha$  — однозначно определяется из уравнения  $\alpha + \text{ctg} \alpha = \pi(\varphi_1 / \Gamma - 0,5)$ . Интегральное представление  $z(\zeta)$  строится по функции  $S_*(\gamma) = S(\gamma) - \ln |2 \cos(\gamma/2 - \alpha)|$ ,  $S(\gamma) = \ln |v(\gamma)|$ , где соответствие  $v(\gamma)$  определяется из известного  $v(s)$  и зависимости  $s(\gamma)$ , получаемой сравнением  $\varphi(s)$  и  $\varphi(\gamma)$ .



Фиг. 1

Далее по  $v(s)$  одним из известных методов рассчитывается пограничный слой и, в частности, определяется толщина вытеснения  $\delta^*(s)$ . Зная  $\delta^*(s)$ , можно построить форму крылового профиля, для чего надо отступить от границы полутела по нормали к профилю на величину  $\delta^*$  внутрь полутела. Но так как пограничный слой считается достаточно тонким, то  $\delta^*$  откладывается по нормали к полутелу.

Чтобы искомым крыловой профиль получился замкнутым, полутело  $B'AB''$  в силу предположения о безотрывности обтекания должно быть разомкнутым на величину  $\Delta z = i\delta_0^* e^{i\theta_0}$ , где  $\theta_0$  — аргумент вектора скорости в точках  $B'$  и  $B''$ ,  $\delta_0^* = \delta_1^* + \delta_2^*$ ,  $\delta_1^*$ ,  $\delta_2^*$  — значения  $\delta^*$  в точках  $B'$  и  $B''$  соответственно. При этом условия замкнутости в ОКЗА для идеальной жидкости преобразуются в условия разомкнутости на величину  $\Delta z$

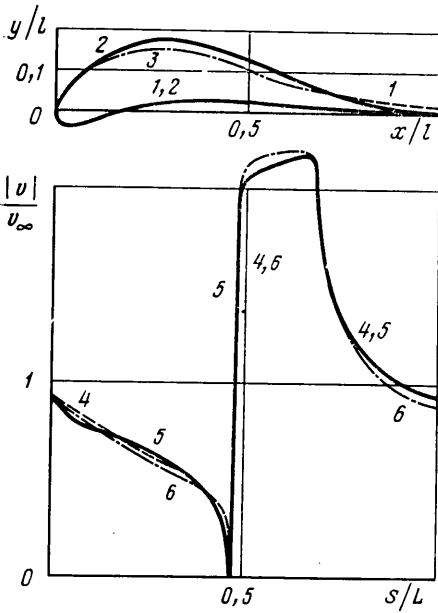
$$\int_0^{2\pi} S_*(\gamma) e^{i\gamma} d\gamma = -\pi + \frac{2\pi v_\infty \delta_0^* \sin \alpha}{\Gamma} e^{i(\alpha + \theta_0)} \quad (1)$$

Условие совпадения скорости на бесконечности с заданной не изменяется по сравнению с таким же условием в ОКЗА для идеальной жидкости

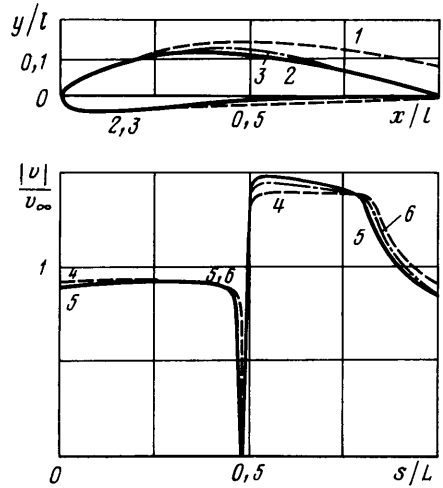
$$\int_0^{2\pi} S_*(\gamma) d\gamma = 2\pi \ln v_\infty \quad (2)$$

Если исходному распределению  $v(s)$  соответствует разомкнутый профиль, то условия (1), (2) не удовлетворяются. Поэтому естественно подправить  $v(s)$  так, чтобы добиться выполнения (1), (2) и чтобы при этом новое  $v(s)$  возможно меньше отличалось от исходного. Вид условий (1), (2) позволяет добиться этого с помощью аппарата квазиразрешений, разработанного для случая идеальной жидкости. Отличительной особенностью применения данного аппарата к ОКЗА с учетом вязкости является то, что в правую часть (1) входят величины  $\delta_0^*$  и  $\theta_0$ , зависящие от  $v(s)$ ; это приводит к необходимости итерационного уточнения решения.

Одно из основных требований, которым должно удовлетворять задаваемое распределение скорости, это соответствие его используемой модели. При построении решения ОКЗА существенно использовано предположение о малости  $\delta^*$ . Требование малости  $\delta^*$  выполняется только в том слу-



Фиг. 2



Фиг. 3

чае, если профиль обтекается безотрывно. Поэтому задаваемое  $v(s)$  должно быть таким, чтобы рассчитанный по нему пограничный слой оставался безотрывным по всему контуру профиля. Известны различные способы задания таких распределений скорости (см., например, [1]), основанные на использовании критериев отрыва. В настоящей работе при построении  $v(s)$  применялся критерий, используемый в методе Кочина — Лойцянского [2]

$$f = \frac{v'(s)}{|v(s)|^b} \left[ a \left| \int_{s_*}^s |v(s)|^{b-1} ds \right| + C \right] \geq f_0$$

где  $f_0$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $C$  — известные постоянные, зависящие от вида пограничного слоя (ламинарный или турбулентный).

Для численной реализации изложенного решения составлена программа, в которой для расчета пограничного слоя использован однопараметрический метод Кочина — Лойцянского и эмпирические формулы Каменецкого [2]. Расчет коэффициента профильного сопротивления проводился по формуле Сквайра — Юнга [2]  $C_x = 2(v_*/v_\infty)^{3,2} \delta_0^{**l^{-1}}$ , где  $\delta_0^{**}$  — толщина потери импульса в задней кромке,  $l$  — хорда профиля. Исходное распределение скорости задавалось безотрывным (штриховая кривая 4 на фиг. 2). На диффузорном участке оно строилось из условия  $f = -5$  в предположении турбулентности пограничного слоя; на нижней поверхности задавалось неубывающее распределение скорости. Построенный по этому  $v(s)$  при числе  $Re_\infty = v_\infty L / \nu = 10^6$  профиль оказался разомкнутым (штриховая кривая 1). Для замыкания контура применялся аппарат квазирешений, причем варьирование скорости допускалось лишь на участке  $0 < s < 0,55L$  (сплошная кривая 5), чтобы сохранить безотрывность распределения по верхней поверхности. Замкнутый контур (сплошная кривая 2) получен после одной итерации. При угле атаки  $\beta = 14,9^\circ$  он имеет коэффициент подъемной силы  $C_y = 2,19$ , коэффициент сопротивления  $C_x = 0,03$ , аэродинамическое качество  $K = C_y / C_x = 72,6$ . Для сравнения по этому же исходному  $v(s)$  (кривая 4) построен замкнутый профиль в идеальной жидкости (штрихпунктирная кривая 3), имеющий  $C_y = 2,22$  при  $\beta = 13,8^\circ$ . Соответ-

ствующее профилю  $v(s)$  (штрихпунктирная кривая 6) найдено в результате применения аппарата квазирешения с варьированием скорости по всему контуру. Профиль в идеальной жидкости тоньше профиля, построенного с учетом вязкости, на 1,5% хорды.

**Дозвуковой поток вязкого газа.** Для учета сжимаемости при решении рассмотренной в разд. 1 ОКЗА необходимо ввести дополнительные предположения. Следуя [1], будем считать, что при дозвуковых скоростях сжимаемостью пограничного слоя можно пренебречь, а распределение скорости на внешней границе несжимаемого пограничного слоя совпадает с распределением скорости на границе полутела, обтекаемого идеальным газом. При этом в силу дозвукового характера обтекания учет сжимаемости внешнего потока можно проводить, используя модель газа Чаплыгина (см., например, [7]), как это сделано в [8] для случая невязкого газа.

Приближение газа Чаплыгина приводит к следующей формуле перехода из плоскости  $w$  в плоскость  $z$ :

$$dz = e^{-\chi} dw - \sigma e^{\bar{\chi}} d\bar{w}, \quad \sigma = [2(\kappa + 1)(1 - \lambda_{\infty}^2)]^{-1}$$

Здесь  $\sigma$  — положительная константа, выбираемая из условия наилучшей аппроксимации адиабатической зависимости  $\rho = \rho(\lambda)$  [1],  $\lambda_{\infty}$  — безразмерная скорость набегающего потока, которая считается заданной,  $\kappa$  — показатель адиабаты,  $\rho$  — плотность. Функция  $\chi = S - i\theta$  является при этом аналитической функцией  $w$  ( $\theta$  — аргумент вектора скорости,  $S = S(\lambda) = \ln [2|\lambda| / (1 + \sqrt{1 + 4\sigma\lambda^2})]$  — известная функция безразмерной скорости  $\lambda = v/a_*$ ,  $a_*$  — критическая скорость).

Свойство аналитичности  $\chi(w)$  позволяет построить решение задачи по схеме, изложенной в разд. 1. Различие в формуле перехода из плоскости  $w$  в плоскость  $z$  приводит к изменению условий разрешимости. Теперь

$$\int_0^{2\pi} S_*(\gamma) e^{i\gamma} d\gamma = -\pi - \frac{4\pi i e^{i\alpha} \Lambda_{\infty}^2 \sigma}{1 + \Lambda_{\infty}^2 \sigma} + \frac{2\pi \Lambda_{\infty} \delta_0^* \sin \alpha}{\Gamma(1 - \Lambda_{\infty}^4 \sigma^2)} [e^{i(\alpha + \theta_0)} + \sigma \Lambda_{\infty}^2 e^{i(\alpha - \theta_0)}]$$

$$\int_0^{2\pi} S_*(\gamma) d\gamma = 2\pi \ln \Lambda_{\infty}, \quad \Lambda_{\infty} = \exp[S(\lambda_{\infty})]$$

Для построения замкнутого контура профиля также применяется итерационный процесс.

Исходное безотрывное распределение скорости (штриховая кривая 4 на фиг. 3) строилось на диффузорном участке из условия  $f = -2,4$  в предположении турбулентности пограничного слоя. Построенный по этому  $v(s)$  при числах  $Re_{\infty} = 10^5$  и  $M_{\infty} = 0,5$  профиль разомкнут (штриховая кривая 1). Для замыкания контура применялся аппарат квазирешений с варьированием скорости по всему контуру профиля (сплошная кривая 5). Замкнутый контур (сплошная кривая 2) получен после четырех итераций. При угле атаки  $\beta = 3,63^\circ$  он имеет  $C_y = 0,862$ ,  $C_x = 0,017$ ,  $K = 50,7$ . Для сравнения по этому же исходному  $v(x)$  (кривая 4) построен замкнутый профиль в вязкой несжимаемой жидкости (штрихпунктирная кривая 3), имеющий  $C_y = 0,859$ ,  $C_x = 0,017$ ,  $K = 50,5$  при  $\beta = 4,05^\circ$ . Соответствующее профилю  $v(s)$  (штрихпунктирная кривая 6) найдено в результате применения аппарата квазирешений с варьированием скорости по всему контуру после трех итераций. Профиль в вязком газе тоньше профиля, построенного в вязкой несжимаемой жидкости на 0,9% хорды.

Авторы благодарят Г. Ю. Степанова за полезные обсуждения работы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Степанов Г. Ю. Гидродинамика решеток турбомашин. М.: Физматгиз, 1962. 512 с.
2. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.
3. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979. 536 с.
4. Елизаров А. М., Ильинский Н. Б., Поташев А. В. Квазирешения обратной краевой задачи аэрогидродинамики // Докл. АН СССР. 1985. Т. 284. № 2. С. 319–322.
5. Liebeck R. H. Design of subsonic airfoils for high lift // J. Aircraft. 1978. V. 15. № 9. P. 547–561. (Рус. перев.: Либек Р. Х. Аэродинамическое проектирование профилей с высоким значением коэффициента подъемной силы // Ракет. техника и космонавтика. 1978. 16. № 12. С. 122–143.
6. Елизаров А. М., Ильинский Н. Б., Поташев А. В. Построение крыловых профилей на основе теории обратных краевых задач методом квазирешений // Изв. вузов. Авиац. техника. 1986. № 3. С. 18–22.
7. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1980. 448 с.
8. Фокин Д. А. Построение профиля в газе Чаплыгина методом квазирешений обратных краевых задач // Механика машиностроения: Тез. докл. секции механики жидкости, газа и плазмы. Брежнев: КамПИ, 1987. С. 61.

Казань

Поступила в редакцию  
14.VI.1988