

УДК 532.516

ЕПИХИН В. Е., КОНОН П. Н., ШКАДОВ В. Я.

**О ФОРМЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО СЛОЯ ЖИДКОСТИ  
НА ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ЦИЛИНДРА**

Проведено исследование стационарного осесимметричного движения слоя вязкой жидкости вместе с цилиндром. Форма осесимметричного слоя постоянной массы зависит не только от физических свойств жидкости, скорости вращения и радиуса цилиндра, но и от перепада давлений в жидкости и окружающей среде. Расчетным путем и с помощью качественного исследования первого интеграла основного уравнения показано, что при различных значениях параметров свободная поверхность слоя может быть цилиндрической или волнообразной формы, иметь самопересечения, состоять из периодически расположенных изолированных кольцевых слоев. Результаты расчетов согласуются с экспериментальными данными тем лучше, чем тоньше слой и чем больше его трансверсальная скорость. Это объясняется отсутствием в модели стационарного осесимметричного движения слоя ускорения силы тяжести.

В случае быстрого вращения твердого цилиндра с постоянной угловой скоростью в экспериментах наблюдается стационарное осесимметричное движение слоя вязкой жидкости вместе с цилиндром как целого [1, 2]. Теоретическое исследование нетривиальных форм равновесия жидких струй и слоев выполнено в [3, 4] методом малого параметра, в [5] применен метод продолжения аналитического решения. Ниже показано, что форма осесимметричного слоя постоянной массы зависит не только от физических свойств жидкости, скорости вращения и радиуса цилиндра, но и от перепада давлений в жидкости и окружающей среде.

Введем цилиндрическую систему координат  $O, x, y, \varphi$  так, что ось  $x$  направлена вдоль оси цилиндра. Движение вязкой жидкости со свободной поверхностью описывается уравнениями Навье — Стокса, неразрывности и уравнением неизвестной поверхности. Обезразмеренные по радиусу цилиндра  $R_0$ , угловой скорости  $\omega_0$  и плотности жидкости  $\rho$ , эти уравнения имеют вид

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u}, \quad \nabla \mathbf{u} = 0, \quad Re = \frac{R_0^2 \omega_0}{\nu} \quad (1)$$

$$dh/dt = v, \quad y = h(x, \varphi, t) \quad (2)$$

На свободной поверхности заданы условия на нормальные и касательные напряжения [6], на поверхности цилиндра — условия прилипания. В уравнениях (1), (2) используются обозначения:  $\mathbf{u} = \{u, v, w\}$ , где  $u$  — осевая,  $v$  — радиальная,  $w$  — трансверсальная составляющие вектора скорости;  $p$  — давление в жидкости;  $Re$  — число Рейнольдса. Массовыми силами и вязким взаимодействием с окружающей средой пренебрегаем. Перейдем в систему координат  $\xi, \eta, \theta$ , жестко связанную с цилиндром:  $\xi = x, \eta = y, \theta = \varphi - t$ . Будем разysкивать решения, соответствующие слою, неподвижному относительно поверхности цилиндра

$$u = v = w = 0, \quad h = h(\xi, \theta), \quad p = p(\eta) \quad (3)$$

Система уравнений (1), (2) с учетом (3) имеет решение

$$p(\eta) = p_1 + \frac{1}{2}(\eta^2 - 1), \quad p_1 = p(1) = \text{const} \quad (4)$$

Условие на нормальные напряжения с учетом (4) позволяет получить уравнение для определения поверхности слоя

$$2R_s^{-1} = 1/2 We (2Eu + h^2 - 1) \quad (5)$$

$$We = \rho R_0^3 \omega_0^2 / \sigma, \quad Eu = (p_1 - p_a) / (\rho \omega_0^2 R_0^2)$$

Здесь величина  $2R_s^{-1}$  обозначает среднюю кривизну поверхности  $\eta = h(\xi, \theta)$ ;  $We$  — число Вебера,  $Eu$  — число Эйлера,  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения жидкости,  $p_1$  — давление в жидкости вблизи твердой поверхности,  $p_a$  — давление окружающей среды. Условие, выражающее неизменность массы  $M$  в слое на отрезке образующей цилиндра длиной  $L$ , имеет вид

$$1/2 \int_0^L \int_0^{2\pi} (h^2 - 1) d\theta d\xi = M \quad (6)$$

Другой метод вывода уравнения (5) содержится в [4].

В случае осесимметричного слоя можно пренебречь зависимостью  $h$  от  $\theta$ ; уравнение (5) и условие (6) преобразуются к следующему виду:

$$2hh'' - 2[(h')^2 + 1] + We(2Eu + h^2 - 1)h[(h')^2 + 1]^{1/2} = 0 \quad (7)$$

$$\pi \int_0^L (h^2 - 1) d\xi = M \quad (8)$$

Здесь штрих обозначает дифференцирование по  $\xi$ . Уравнение (7) дополняется условиями периодичности решения вдоль оси цилиндра

$$h(0) = h(L), \quad h'(0) = h'(L) \quad (9)$$

Для слоя цилиндрической формы  $\eta = h_0$  с помощью уравнения (7) получим формулу для определения числа  $Eu = Eu_0$

$$Eu_0 = (We h_0)^{-1} - 1/2 (h_0^2 - 1), \quad h_0 = \sqrt{M / (\pi L) + 1} \quad (10)$$

откуда можно определить давление  $p_1$ .

Линеаризуем уравнение (7) относительно равновесной цилиндрической поверхности  $\eta = h_0$ . С учетом условия (8) и формулы (10) получим аналогично [7] уравнение для малых отклонений  $h_1 = h(\xi) - h_0$

$$h_1'' + (h_0^{-2} + We h_0) h_1 = 0 \quad (11)$$

Условие периодичности решения уравнения (11) с длиной волны  $\lambda = 2\pi/\alpha$  ( $\alpha$  — волновое число возмущенной поверхности) имеет вид

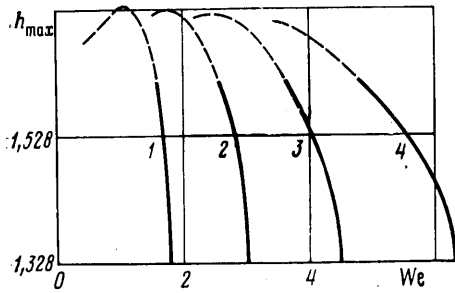
$$h_0^{-2} + We_n h_0 = n^2 \alpha^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (12)$$

С помощью (10), (12) можно определить значения параметров  $We_n$  и  $Eu_n$ , при которых наряду с цилиндрической поверхностью появляются равновесные слои, имеющие на отрезке образующей  $L$   $n$  максимумов свободной поверхности

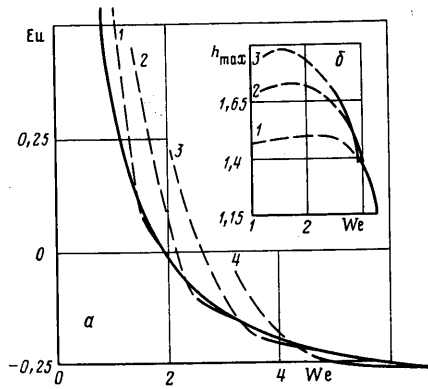
$$We_n = \frac{(n\alpha h_0)^2 - 1}{h_0^3} > 0, \quad \kappa_n = \frac{[3 - (n\alpha h_0)^2] h_0^2}{2[(n\alpha h_0)^2 - 1]} \quad (13)$$

$$\kappa_n = 1/2 (2Eu_n - 1), \quad \alpha = 2\pi/L$$

Рассмотрим метод решения краевой задачи, включающий уравнение (7) и дополнительные условия (8), (9), которые рассматриваются как



Фиг. 1



Фиг. 2

«система трех нелинейных уравнений с тремя неизвестными  $Eu$ ,  $h(0)$ ,  $h'(0)$

$$\Phi_1[Eu, h(0), h'(0)] = \pi \int_0^L (h^2 - 1) d\xi - M = 0$$

$$\Phi_2[Eu, h(0), h'(0)] = h(0) - h(L) = 0, \quad (14)$$

$$\Phi_3[Eu, h(0), h'(0)] = h'(0) - h'(L) = 0$$

При этом значения  $We$ ,  $M$  и  $L$  заданы. Решение системы (14) производится итерационным методом. На первом этапе в качестве начального приближения используется  $Eu = Eu_0$ , вычисленное по формуле (10), производная  $h'(0) = 0$ ; в качестве начального приближения для  $h(0)$  последовательно принимаются значения  $1, 1 + \Delta h, 1 + 2\Delta h, \dots, 1 + K\Delta h = h_0$ , где  $\Delta h$  — шаг разбиения отрезка  $[1, h_0]$ . Перебор значений  $h(0)$  осуществляется до тех пор, пока не будет выполнено неравенство

$$\max_{k=1,2,3} |\Phi_k| \leq \varepsilon \quad (15)$$

В качестве  $\varepsilon$  использовалось число  $5 \cdot 10^{-2}$ ,  $\Delta h = 0,1$  ( $h_0 - 1$ ). На втором этапе применяется итерационный метод Ньютона. После выполнения неравенства (15) с точностью  $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-4}$  определяется поверхность слоя. Интегрирование уравнения (7) на отрезке  $[0, L]$  осуществляется методом Рунге — Кутты по формулам четвертого порядка точности.

На фиг. 1, 2 представлены результаты решения краевой задачи (7) — (9) в случае  $M = 35,3$  при длине цилиндра  $L = 14,7$ , что соответствует условиям эксперимента [1], где в качестве опытной жидкости использовался сахарный сироп вязкостью  $8 \text{ кг/м} \cdot \text{с}$  при температуре  $288 \text{ К}$ . На фиг. 1 представлена зависимость максимального радиуса свободной поверхности  $h_{\max}$  от числа  $Eu$ : линии 1—4 соответствуют  $n = 4, 5, 6, 7$ . Интервалы изменения числа  $We$  ограничены справа соответствующими значениями  $We_n$  (13). Штриховые линии соответствуют осесимметричным кольцевым слоям с изолированными массами. На фиг. 2, а показано ответвление кривых  $Eu(We)$  от кривой, определяемой формулой (10). Здесь, так же как на фиг. 1, линии 1—4 соответствуют  $n = 4, \dots, 7$ . На фиг. 2, б представлена зависимость  $h_{\max}$  от числа  $We$  при различных  $M$ , когда  $n = 5$ : линии 1—3 соответствуют  $M = 20; 35,3; 44,8$ .

Расчетами и с помощью качественного исследования первого интеграла уравнения (7) установлено, что при различных числах  $Eu$  свободная поверхность слоя постоянной массы может быть цилиндрической или волнообразной формы, состоять из периодически расположенных изолирован-

ных кольцевых слоев или иметь самопересечения. При данных  $We$ ,  $M$  и  $L$  решение задачи (7)–(9) не единственно, так как при различных значениях числа  $Eu$  на поверхности цилиндра образуются слои с различным

Таблица 1

We	n	
	[1]	Расчет
1,16	4	4
1,35	5	4
2,46	5	5
3,99	6	6

числом волн. В табл. 1 приводятся результаты расчетов формы слоев вязкой жидкости и данные эксперимента [1]. Рассчитанные формы слоев в качественном отношении близки к наблюдаемым экспериментально.

В [2] представлены результаты исследования стационарных осесимметричных кольцевых слоев глицерина и масла ПФМС-4 с помощью экс-

периментальной установки, включавшей цилиндрический валок, насаженный на горизонтальный вал электродвигателя. В экспериментах фиксировались максимальный радиус поверхности  $h_{\max}$  и ширина кольца  $l$ . Проведем сравнение данных [2] с результатами численного решения уравнения (7), дополненного граничными условиями

$$h(0)=1, h'(0)=tg \varepsilon_0 \quad (16)$$

Число Вебера и угол смачивания  $\varepsilon_0$  заданы, а число Эйлера подбирается на интервале  $[-0,2; 0,1]$  из условия совпадения  $h_{\max}$  с экспериментальным значением с погрешностью  $\varepsilon=10^{-4}$ . В процессе решения определяются масса жидкости на цилиндре и ширина кольцевого слоя. Данные экспериментов [2] и соответствующих расчетов представлены в табл. 2. Из табл. 2 видно, что результаты расчетов лучше согласуются с экспериментальными данными в случае более тонких слоев, что объясняется неучетом ускорения силы тяжести в модели стационарного осесимметричного слоя.

Линейная теория гидродинамической устойчивости позволяет получить необходимые и достаточные условия устойчивости слоя жидкости на поверхности вращающегося цилиндрического валка с длиной образующей  $L$  по отношению к осесимметричным волновым возмущениям с длиной волны  $\lambda_n=L/n$  и с волновым числом  $\alpha_n=2\pi/\lambda_n=\alpha n$ , где  $n$  — целое число. По данным [8], необходимое и достаточное условие устойчивости можно представить в виде

$$We \leq \frac{(n\alpha h_0)^2 - 1}{h_0^3} = We_n$$

В том случае, когда  $We_n < We < We_{n+1}$ , возмущения с  $n \leq N$  неустойчивы, а с  $n > N$  — устойчивы. При некотором промежуточном значении  $n=n_*$  ( $0 < n_* < N+1$ ) коэффициент нарастания неустойчивого возмущения достигает максимального значения, а соответствующее этому  $n_*$  возмущение наиболее неустойчиво.

Таблица 2

$R_0, \text{ м}$	$\omega_0, \text{ с}^{-1}$	We	[2]		Расчет			
			$h_{\max}$	$l$	$h_{\max}$	$l$	Eu	M
0,0123	11,519	5,432	1,407	1,626	1,407	1,858	-0,0793	3,121
0,0123	13,614	7,588	1,407	1,423	1,407	1,588	-0,1265	2,643
0,0123	33,51	45,972	1,081	0,569	1,081	0,636	-0,0126	0,201
0,025	11,519	45,611	1,08	0,64	1,08	0,637	-0,0116	0,198
0,035	11,519	125,16	1,029	0,314	1,029	0,314	0,0023	0,036
0,035	13,614	174,82	1,029	0,257	1,029	0,287	-0,0025	0,033

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Moffatt H. K.* Behaviour of a viscous film on the outer surface of a rotating cylinder // *J. Mecanique*. 1977. V. 16. № 5. P. 651–673.
2. *Кулаго А. Е., Мясников В. П., Петров-Денисов В. Г., Пичков А. М.* Экспериментальное и теоретическое исследование слоя жидкости на вращающемся цилиндре // *Конструкции и строительство специальных сооружений*. М., 1981. С. 76–84.
3. *Пухначев В. В.* Ветвление вращательно-симметричных решений, описывающих течения вязкой жидкости со свободной поверхностью // *ПМТФ*. 1973. № 2. С. 127–134.
4. *Гидромеханика невесомости*/Под ред. Мышкиса А. Д. М., 1976. 504 с.
5. *Бадратинова Л. Г.* О запасе устойчивости цилиндрического равновесного состояния вращающейся жидкости // *ПМТФ*. 1981. № 4. С. 56–59.
6. *Шкадов В. Я.* Некоторые методы и задачи теории гидродинамической устойчивости // *Научн. тр. Ин-та механики МГУ*. Вып. 25. М.: Изд-во МГУ, 1973. 192 с.
7. *Брагухин Ю. К., Маурин Л. Н.* Равновесные фигуры вращающегося жидкого цилиндра // *33 ПММ*. 1968. Вып. 4. С. 754–756.
8. *Gillis J., Suh K. S.* Stability of a rotating liquid column // *Phys. Fluids*. 1962. V. 5. № 10. P. 1149–1155.

Москва

Поступила в редакцию  
24.III.1988