МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 • 1989

УДК 532.5.013.4:536.25

ЛИПЧИН А. Т.

СОПРЯЖЕННАЯ ЗАДАЧА УСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО КОНВЕКТИВНОГО ТЕЧЕНИЯ

Устойчивость плоскопараллельного конвективного течения, возникающего в замкнутом слое между вертикальными плоскостями, нагретыми до разных температур, исследовалась ранее для идеально теплопроводных [1] или теплоизолированных [2] границ. Неустойчивость в этих предельных случаях связана с развитием двух типов возмущений. Монотонная гидродинамическая мода неустойчивости, обусловленная развитием системы неподвижных вихрей на границе раздела восходящего и нисходящего конвективных потоков, существует при всех числах Прандтля Pr. Границы устойчивости (критическое число Грасгофа) и длина волны критических возмущений слабо зависят от Pr и типа тепловых граничных условий [2]. Колебательная тепловая мода неустойчивости, связанная с температурными волнами, распространяющимися во встречных потоках, появляется при числах Прандтля, превышающих некоторое предельное значение Pr_*. Для случая идеально теплопроводных границ $\mathrm{Pr}_*=11{,}56$, а для случая теплоизолированных границ $\mathrm{Pr}_*=0{,}89$. Зависимость характеристик волновой неустойчивости от числа Прандтля существенно различна для двух названных типов граничных условий.

В [2] исследован также случай смешанных условий, когда одна граница слоя теплопроводная, а другая теплоизолированная. В такой ситуации невязкие гидродинамические возмущения становятся немонотонными – асимметрия тепловых условий приводит к медленному дрейфу системы вихрей. Для температурных волн результаты расчета показывают слабое влияние изменения типа тепловых условий на одной из границ на характеристики волновой неустойчивости, развивающейся у другой границы.

В данной работе исследуется линейная устойчивость конвективного течения в слое между массивами с произвольными тепловыми свойствами. В том случае, когда теплопроводности жидкости и массивов соизмеримы, необходимо решать задачу устойчивости в сопряженной постановке, учитывая проникновение температурных возмущений в массивы.

Рассмотрим стационарное плоскопараллельное течение жидкости в замкнутом вертикальном слое между двумя полубесконечными массивами. Границы массивов $x=\mp h$ нагреты до температур $\pm\Theta$ (x – поперечная координата, отсчитываемая от середины слоя). Для безразмерных температуры массивов и жидкости и скорости имеем

$$T_0=-\mathrm{Gr}\left(\frac{x}{\varkappa_1}-1+\frac{1}{\varkappa_1}\right)\qquad (x<-1)$$

$$T_0=-\mathrm{Gr}\,x,\ v_0={}^1/_6\mathrm{Gr}(x^3-x)\quad (-1\leqslant x\leqslant 1)$$

$$T_0=-\mathrm{Gr}\left(\frac{x}{\varkappa_2}+1-\frac{1}{\varkappa_2}\right)\qquad (x>1)$$

$$\mathrm{Gr}=\frac{g\beta\Theta h^3}{\nu^2}$$

Здесь Gr – число Грасгофа, $\varkappa_{1,2}$ – отношение теплопроводности соответственно левого ($x<-1$) и правого ($x>1$) массивов к теплопроводности жидкости. В качестве единиц выбраны: h – расстояния, h^2/ν – времени, ν/h – скорости, $\nu^2/g\beta h^3$ – температуры.

При исследовании линейной устойчивости такого течения возникает следующая задача для амплитуд нормальных плоских возмущений функции тока $\varphi(x)$ и температуры жидкости $\vartheta(x)$ [1]:

$$(-\lambda+ikv_0)\Delta\varphi-ikv_0''\varphi=\Delta\Delta\varphi+\vartheta' \tag{1}$$

$$(-\lambda+ikv_0)\vartheta+ik\,\mathrm{Gr}\,\varphi=\frac{1}{\mathrm{Pr}}\Delta\vartheta, \qquad \Delta=\frac{d^2}{dx^2}-k^2$$

$$x=\pm1:\quad \varphi=\varphi'=0 \tag{2}$$

где $\lambda=\lambda_r+i\lambda_i$ — комплексный декремент возмущений, k — волновое число, $\mathrm{Pr}=\nu/\chi$ — число Прандтля (χ — температуропроводность жидкости).

Для амплитуд $\vartheta_1(x)$ и $\vartheta_2(x)$ нормальных возмущений температуры соответственно в левом и правом массивах имеем

$$\vartheta_{1,2}''+a_{1,2}^2\vartheta_{1,2}=0, \qquad a_{1,2}=\sqrt{\lambda\,\mathrm{Pr}/\chi_{1,2}-k^2} \tag{3}$$

$$x=-1:\quad \vartheta=\vartheta_1,\ \vartheta'=\varkappa_1\vartheta_1';\quad x=1:\ \vartheta=\vartheta_2,\ \vartheta'=\varkappa_2\vartheta_2' \tag{4}$$

где $\chi_{1,2}$ — отношение температуропроводности соответственно левого и правого массивов к температуропроводности жидкости. Кроме того, ϑ_1 и ϑ_2 должны быть ограничены на бесконечности.

При рассмотрении амплитудной задачи для φ, ϑ, ϑ_1, ϑ_2 возникают два случая в зависимости от положения величин $a_{1,2}^2$ на комплексной плоскости. В случае, если хотя бы одна из них вещественна и положительна, т. е. для $\lambda_i=0$, $\lambda_r>k^2\chi_{1,2}/\mathrm{Pr}$, решение уравнения (3) имеет вид

$$\vartheta_{1,2}=A_{1,2}\sin a_{1,2}x+B_{1,2}\cos a_{1,2}x$$

где $A_{1,2}$, $B_{1,2}$ — произвольные постоянные. При этом условия ограниченности ϑ_1 и ϑ_2 на бесконечности (или хотя бы одно из них) выполняются автоматически и оставшихся условий (4) недостаточно для определения постоянных $A_{1,2}$ и $B_{1,2}$. Тем самым при всех значениях параметров задачи существует нетривиальное решение, т. е. спектр будет сплошным.

В дальнейшем будем иметь в виду другой случай, когда обе величины a_1^2 и a_2^2 комплексны или неположительны ($\lambda_i\neq0$ или $\lambda_r\leqslant k^2\chi_{1,2}/\mathrm{Pr}$), так как именно он реализуется на границе устойчивости ($\lambda_r=0$). При этом решение уравнения (3) представляет собой сумму двух экспонент, коэффициент перед одной из которых приравнивается к нулю в силу условий ограниченности $\vartheta_{1,2}$ на бесконечности. Тогда из соотношений (4) можно получить граничные условия для амплитуды возмущений температуры жидкости

$$\begin{aligned} x=-1:&\quad \vartheta'=i\varkappa_1a_1\vartheta \\ x=1:&\quad \vartheta'=i\varkappa_2a_2\vartheta \end{aligned} \tag{5}$$

Значения величин $a_{1,2}$, определяемых выражениями (3) с точностью до знака, выбираются так, чтобы мнимая часть a_1 была отрицательной, а мнимая часть a_2 — положительной.

Итак, для определения собственных чисел (декрементов λ) и собственных функций (амплитуд возмущений φ, ϑ) сопряженной задачи устойчивости имеем амплитудные уравнения (1) с однородными граничными условиями (2), (5). Спектр возмущений полученной краевой задачи является дискретным.

Предельный случай идеально теплопроводных границ ($x=\pm1$: $\vartheta=0$) получается при конечных значениях $\chi_{1,2}$ и $\varkappa_{1,2}\to\infty$ или при конечных значениях $\varkappa_{1,2}$ и $\chi_{1,2}\to0$. Предельный случай теплоизолированных границ ($x=\pm1$: $\vartheta'=0$) получается при конечных значениях $\chi_{1,2}$ и $\varkappa_{1,2}\to0$.

Краевая задача (1), (2), (5) решалась методом дифференциальной прогонки [3]. Получающаяся система обыкновенных дифференциальных уравнений интегрировалась методом Рунге – Кутта – Фельберга 4–5-го порядка. Обсудим результаты расчетов.

Для гидродинамической моды неустойчивости при отсутствии симметрии задачи ($\varkappa_1 \neq \varkappa_2$ или $\chi_1 \neq \chi_2$) возмущения теряют монотонность. Однако скорость их дрейфа на два порядка меньше максимальной скорости основного течения. Минимальные по k критические числа Грасгофа Gr_m и соответствующие им волновые числа k_m мало меняются при изменении граничных условий для возмущений температуры (соответственно в пределах 20 и 10%). Нейтральные кривые $\mathrm{Gr}(k)$ для конечных значений $\varkappa_{1,2}$ и $\chi_{1,2}$ заключены между соответствующими кривыми для двух предельных случаев идеально теплопроводных и теплоизолированных границ, причем чувствительность значений Gr_m, k_m, а также фазовой скорости $c_m = \lambda_{im}/k_m$ критических возмущений к тепловым свойствам массивов обнаруживается только при $10^{-2} < \mathrm{Pr} < 1$. Вне этих пределов $\mathrm{Gr}_m \approx 490$, $k_m \approx 1{,}4$, $c_m \approx 0$ (подробнее см. [2]).

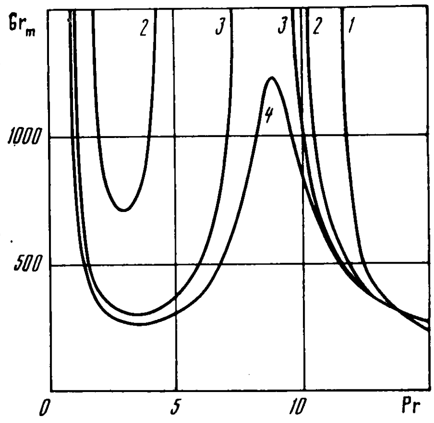
Наибольший интерес представляет влияние тепловых характеристик массивов на устойчивость течения относительно возмущений типа температурных волн. Рассмотрим симметричный случай, когда $\varkappa_1 = \varkappa_2$, $\chi_1 = \chi_2$. Пусть, кроме того, жидкость и массивы имеют одинаковую температуропроводность $\chi_{1,2} = 1$. Зависимости минимального по k критического числа Грасгофа Gr_m, а также критического волнового числа k_m и фазовой скорости $c_m = \lambda_{im}/k_m$ критических возмущений от числа Прандтля представлены на фиг. 1–3. Эти зависимости изображены для предельных случаев идеально теплопроводных массивов ($\varkappa_{1,2} \gg 1$) кривыми *1* и теплоизолированных массивов ($\varkappa_{1,2} = 0$) кривыми *4*, а также для промежуточных случаев $\varkappa_{1,2} = 8 \cdot 10^{-2}$, $2 \cdot 10^{-2}$ – кривыми *2*, *3*. Области неустойчивости на фиг. 1 расположены выше кривых.

Независимо от тепловых свойств массивов обе ветви нейтральных кривых $\mathrm{Gr}(k)$ для волновой моды при $k \to 0$ имеют асимптотику $\mathrm{Gr} \sim k^{-1}$. Зависимость величины $\mathrm{Gr}\,k$, имеющей при $k=0$ конечное значение, от Pr позволяет найти границы области существования рассматриваемой моды по числу Прандтля. Так, в случае идеально теплопроводных массивов температурные волны могут нарастать при $\mathrm{Pr} > \mathrm{Pr}_* = 11{,}56$, а в случае теплоизолированных массивов – при $\mathrm{Pr} > \mathrm{Pr}_* = 0{,}89$.

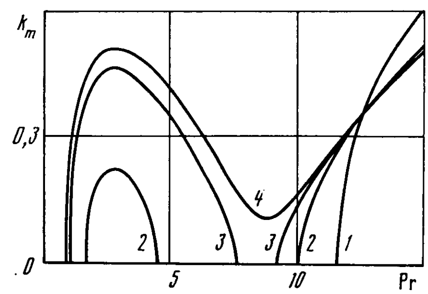
В предельном случае идеально проводящих массивов ($\varkappa_{1,2} \gg 1$) воспроизводятся результаты [1]: в области $\mathrm{Pr} > \mathrm{Pr}_*$ критическое число Gr_m для волновой моды монотонно уменьшается с ростом Pr (фиг. 1, кривая *1*); при этом волновое число k_m растет от нуля до предельного значения $k_m = 1{,}25$, а фазовая скорость c_m монотонно уменьшается (фиг. 2 и 3, кривые *1*). С уменьшением $\varkappa_{1,2}$ предельное значение числа Pr_* уменьшается по сравнению со случаем идеально теплопроводных массивов; кроме того, в координатах (Gr_m, Pr) возникает еще одна область неустойчивости относительно колебательных тепловых возмущений при $\mathrm{Pr} < \mathrm{Pr}_*$. В момент своего появления при $\varkappa_{1,2} = 9{,}81 \cdot 10^{-2}$, $\mathrm{Pr} = 2{,}82$ она характеризуется бесконечными значениями Gr_m, c_m и нулевым значением k_m. При дальнейшем уменьшении $\varkappa_{1,2}$ критические числа Грасгофа и соответствующие им значения фазовой скорости для «левой» области неустойчивости на фиг. 1 уменьшаются, а критические волновые числа увеличиваются.

Вместе с тем оба интервала существования нарастающих тепловых волн (по оси Pr) расширяются. Так, для $\varkappa_{1,2} = 8 \cdot 10^{-2}$ (кривые *2*) тепловая мода неустойчивости имеет место при $1{,}7 < \mathrm{Pr} < 4{,}5$ и $\mathrm{Pr} > 10{,}1$, а для $\varkappa_{1,2} = 2 \cdot 10^{-2}$ (кривые *3*) – при $1{,}0 < \mathrm{Pr} < 7{,}7$ и $\mathrm{Pr} > 9{,}2$. Для $\varkappa_{1,2} = 1{,}32 \cdot 10^{-2}$ две области неустойчивости в координатах (Gr_m, Pr) разделяются асимптотой $\mathrm{Pr} = 8{,}75$. В этой точке зависимость $c_m(\mathrm{Pr})$ также имеет асимптоту, а критическое волновое число равно нулю. Далее с уменьшением $\varkappa_{1,2}$ асимптоты переходят в максимумы, высота которых уменьшается, и при $\varkappa_{1,2} \to 0$ зависимости величин Gr_m, k_m и c_m от числа Прандтля стремятся к соответствующим зависимостям для случая теплоизолированных массивов [2].

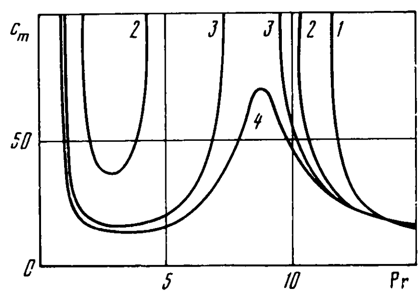
Аналогичные результаты получены для фиксированного значения параметра $\varkappa_{1,2}=1$ (одинаковая теплопроводность жидкости и массивов) при изменении параметра $\chi_{1,2}$; графики $\mathrm{Gr}_m(\mathrm{Pr})$, $k_m(\mathrm{Pr})$ и $c_m(\mathrm{Pr})$, схожие с соответствующими им графиками для рассмотренного выше случая $\chi_{1,2}=1$, для краткости опускаем. Значение $\chi_{1,2}=0$ отвечает массивам идеальной теплопроводности. Появление «левой» области неустойчивости в координатах $(\mathrm{Gr}_m, \mathrm{Pr})$ происходит при $\chi_{1,2}=1{,}04\cdot10^2$, $\mathrm{Pr}=2{,}87$. Для $\chi_{1,2}=1{,}5\cdot10^2$ и $3\cdot10^3$ зависимости Gr_m, k_m и c_m от числа Прандтля близки к аналогичным зависимостям, представленным на фиг. 1—3 кривыми *2* и *3* соответственно. При $\chi_{1,2}=5{,}76\cdot10^3$ две области неустойчивости сливаются в одну и при $\chi_{1,2}\gg1$ величины Gr_m, k_m и c_m близки к их значениям для случая теплоизолированных массивов. Из граничных условий (5) следует, что для $\chi_{1,2}\to\infty$ и любых конечных значениях $\varkappa_{1,2}$ предельное число Прандтля, при котором появляется тепловая мода неустойчивости, совпадает с Pr_* для случая теплоизолированных границ.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Фазовая скорость критических вязких возмущений в слое с теплоизолированными границами при $\mathrm{Pr}=\mathrm{Pr}_*=0{,}89$ составляет 0,74 от максимальной скорости основного течения. При $\mathrm{Pr}\to\infty$ это соотношение монотонно возрастает до значения 1,1. Для любого фиксированного числа Прандтля, при котором существуют нарастающие температурные волны, величина отношения скоростей возмущения и основного течения остается постоянной с точностью до 1,5% при всех рассматриваемых граничных условиях. Этот факт иллюстрируется сходством кривых на фиг. 1 и 3.

Зависимости на фиг. 1—3 с точностью до знака фазовой скорости описывают температурные волны, бегущие как вверх ($\lambda_i>0$), так и вниз ($\lambda_i<0$). Если массивы, ограничивающие жидкость, имеют разные тепловые свойства ($\varkappa_1\neq\varkappa_2$, $\chi_1\neq\chi_2$), то это вырождение снимается и соответствующие зависимости становятся различными для температурных волн, распространяющихся в противоположных направлениях. Если не рассматривать чисел Прандтля, лежащих вблизи границы Pr_* области существования неустойчивости, то величины Gr_m, k_m и c_m (как и сами значения Pr_*) для возмущений, которые распространяются в направлении потока, движущегося у одного из массивов, меняются на более чем на несколько процентов при изменении тепловых характеристик другого массива. При выбранных на фиг. 1—3 масштабах эти изменения значений Gr_m, k_m, c_m и Pr_* изобразить не удается. Расчеты собственных функций рассматриваемой краевой задачи показывают, что возмущение температуры, локализованное вблизи одной границы, с некоторой степенью точности обращается в нуль вместе со своей производной на другой границе, удовлетворяя тем самым на ней любым тепловым граничным условиям типа (5).

Для гидродинамической моды неустойчивости графики зависимостей $\mathrm{Gr}_m(\mathrm{Pr})$, $k_m(\mathrm{Pr})$ и $c_m(\mathrm{Pr})$ в выбранном на фиг. 1—3 масштабах близки к горизонтальным прямым: $\mathrm{Gr}_m=490$, $k_m=1{,}4$, $c_m=0$, при всех рассматриваемых граничных условиях для возмущений температуры.

Автор благодарит Г. З. Гершуни за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
2. *Липчин А. Т., Лобов Н. И.* Влияние тепловых свойств границ на устойчивость конвективного течения в подогреваемом сбоку вертикальном слое // Конвективные течения. Пермь: ПГПИ, 1987. С. 11—18.
3. *Гольдштик М. А., Штерн В. Н.* Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука, 1977. 366 с.

Пермь

Поступила в редакцию
10.VI.1988