УДК 532.59:533.951

КОРСУНСКИЙ С. В.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН В СЛОЕ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ

В рамках нелинейной теории магнитной гидродинамики исследуется волновое движение слабопроводящей несжимаемой жидкости в поперечном магнитном поле. Проанализировано влияние эффектов МГД-взаимодействия на гармонические возмущения бесконечно малой амплитуды и выведено длинноволновое уравнение типа Кортевега де Вриза-Бюргерса, описывающее эволюцию слабонелинейных возмущений свободной поверхности жидкости. Показано, что влияние электропроводности приводит к изменению как диссипативных, так и дисперсионных свойств системы.

1. В прямоугольной декартовой системе координат $(x,\ y,\ z)$ рассматривается задача о распространении гравитационных волн на поверхности проводящей несжимаемой жидкости, расположенной на абсолютно жестком полупространстве. Предполагается, что жидкость идеальная, слабопроводящая, электрически- и магнитоизотропная и подвержена действию невозмущенного поперечного магнитного поля $\mathbf{H}_0$, направленного вдоль оси y. При этом жидкость ориентирована так, что ось z направлена вертикально вверх, а начало координат совпадает с невозмущенной поверхностью жидкости. Линейные модели распространения длинных волн в вертикальном магнитном поле рассматривались в [1, 2], нелинейные волновые уравнения типа КдВ для такого рода систем исследовались в [3]. Анализ волновых движений в тонких слоях электропроводных жидкостей представляет практический интерес, в частности при изучении волновых течений жидких металлов в магнитном поле [4].

Математическая постановка описанной выше задачи включает уравнения движения слабопроводящей жидкости в области $\Omega=\{(x,z)\,|\,-\infty<x<\infty,\ -1\leqslant z\leqslant\alpha\eta\}$ с соответствующими граничными условиями на свободной поверхности и на жестком дне [1, 5]. В классе плоских и осесимметричных движений, характеризуемом условием $\mathbf{v}\perp\mathbf{H}_0$, указанная система уравнений допускает введение потенциала $\mathbf{v}=\nabla\varphi$ [5] и в этом случае исходные соотношения записываются в виде

$$\beta\varphi_{xx}+\varphi_{zz}=0,\quad (x,z)\in\Omega \tag{1.1}$$

$$\eta+\varphi_t-\beta T\eta_{xx}+\frac{\alpha}{2}\varphi_x^2+\frac{\alpha}{2\beta}\varphi_z^2+N\varphi=0,\qquad z=\alpha\eta \tag{1.2}$$

$$\beta\eta_t+\alpha\beta\eta_x\varphi_x=\varphi_z,\quad z=\alpha\eta \tag{1.3}$$

$$\varphi_z=0,\quad z=-1 \tag{1.4}$$

где $\eta(x,\ t)$ – возвышение свободной поверхности жидкости. При записи динамического граничного условия (1.2) учтено поверхностное натяжение жидкости. В (1.1) – (1.4) введены безразмерные величины по формулам (звездочки опущены)

$$x^*=\frac{x}{\lambda},\quad z^*=\frac{z}{d},\quad \eta=\frac{\eta}{a},\quad t^*=\frac{t\sqrt{gd}}{\lambda},\quad \varphi^*=\frac{\varphi\sqrt{gd}}{g\lambda a}$$

Уравнения (1.1) – (1.4) содержат четыре безразмерных параметра, определяющих волновые процессы в системе: $\alpha=a/d$ – параметр нелинейности, $\beta=d^2/\lambda^2$ – параметр дисперсии, $N=\sigma\mu^2H_0^2\lambda/\rho_0\sqrt{gd}$ – параметр МГД-взаимодействия, $T=\nu/\rho_0gd^2$ – число Вебера. Здесь d – глубина жидкости, λ – длина волны, a – амплитуда; ρ_0, μ, σ – плотность, магнитная проницаемость и проводимость среды, ν – коэффициент поверхностного натяжения. При $N=0$, $T=0$ из (1.1) – (1.4) получаем традиционную систему уравнений для волн на воде [6].

2. Проанализируем вначале распространение гармонических волн бесконечно малой амплитуды. Опуская в (1.1) – (1.4) члены порядка $O(\alpha)$, получаем уравнения линейной модели, включающей уравнение Лапласа (1.1), граничное условие на дне (1.4) и условие на свободной поверхности

$$\varphi_z+\beta\varphi_{tt}-\beta T\varphi_{xxz}+\beta N\varphi_t=0,\quad z=0 \tag{2.1}$$

Представим потенциал скоростей φ в виде бегущей волны: $\varphi=\Phi(z)\exp(i(\omega t-kx))$. Тогда из (1.1), (2.1), (1.4) получаем дисперсионное уравнение

$$\omega^2-i\omega N=\frac{k}{\sqrt{\beta}}\,\mathrm{th}\,k\sqrt{\beta}(1+k^2\beta T)\equiv F(k) \tag{2.2}$$

$$\omega=\omega_0+i\omega_1,\ \omega_1=N/2,\ \omega_0^2=F(k)-N^2/4$$

Отсюда видно, что влияние эффектов электропроводности проявляется в демпфировании волновых возмущений и уменьшении частоты их колебаний. Кроме того, из (2.2) следует, что распространяющиеся моды существуют в системе только в диапазоне волновых чисел, удовлетворяющих условию $F(k)>N^2/4$.

В приближении мелкой воды ($\beta\ll 1$) из этого условия получаем $k>N/2$, а для глубокой воды ($\beta\gg 1$) имеем $k>\sqrt{\beta}N^2/4$ при $T\ll 1$ и $k>(N^2/4T\sqrt{\beta})^{1/3}$ при $T\sim 1$. Таким образом, наличие проводимости и приложенного магнитного поля может приводить к качественному изменению волновых свойств системы.

3. Изучение волн конечной амплитуды в рассматриваемой задаче связано с выводом нелинейного эволюционного уравнения для возмущений свободной поверхности электропроводной жидкости.

Представим потенциал φ в виде разложения

$$\varphi=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\beta^n\frac{(z+1)^{2n}}{2n!}\frac{\partial^{2n}f}{\partial x^{2n}} \tag{3.1}$$

удовлетворяющего уравнению Лапласа (1.1) и граничному условию (1.4). Подставляя (3.1) в (1.2), (1.3), усредняя по глубине и ограничиваясь удержанием членов порядка малости не выше $O(\alpha,\beta)$, получаем

$$\eta_t+((1+\alpha\eta)W)_x-{}^1/_6\beta W_{xxx}=0 \tag{3.2}$$

$$W_t+\eta_x+\alpha WW_x+NW-\beta T\eta_{xxx}-{}^1/_2\beta(W_{xxt}+NW_{xx})=0 \tag{3.3}$$

где $W=f_x$. Опуская здесь члены порядка $O(\alpha,\beta)$, находим уравнение линейной бездисперсионной модели [3]

$$\eta_{xx}-\eta_{tt}-N\eta_t=0 \tag{3.4}$$

Применим к системе (3.2), (3.3) метод преобразования Уизема [6], т. е. положим

$$W=\eta+\alpha A+\beta B+NC+\beta ND \tag{3.5}$$

где A, B, C, D – неизвестные функции. Они определяются из условия совместности уравнений (3.2), (3.3) после подстановки в них выражения (3.5). В результате получаем эволюционное уравнение в виде

$$\eta_t+(1+{}^3/_2\alpha\eta)\eta_x+{}^1/_2\beta({}^1/_3-T)\eta_{xxx}-{}^1/_4\beta N(T+{}^5/_6)\eta_{xx}=-{}^1/_2N\eta \tag{3.6}$$

Полученное уравнение есть «возмущенное» уравнение типа Кортевега де Вриза-Бюргерса (КдВБ). Пренебрегая в (3.6) членом $O(\beta N)$, получаем «возмущенное» уравнение КдВ. Без учета поверхностного натяжения ($T\to 0$) оно сводится к полученному в [3] для случая вертикального магнитного поля

$$\eta_t+(1+{}^3/_2\alpha\eta)\eta_x+{}^1/_6\beta\eta_{xxx}=-{}^1/_2N\eta \tag{3.7}$$

Асимптотическое решение уравнения (3.7) в виде уединенной волны при $N\ll 1$ было получено в [7] с использованием методики Крылова-Боголюбова-Митропольского и имеет следующий вид

$$\eta=a(\tau)\operatorname{sech}^2\theta,\quad \theta=\sqrt{\frac{a\alpha_1}{12}}\left(\xi-\frac{\alpha_1}{3}\int_0^{\tau}a(\tau)\,d\tau\right) \tag{3.8}$$

$$\tau=\beta t/6,\ \xi=x-t,\ \alpha_1=9\alpha/\beta,\ a(\tau)=a_0\exp(-4N\tau/\beta).$$

Таким образом, основное влияние эффектов электропроводности на распространение солитона сводится к уменьшению его амплитуды во времени. Из (3.6) также следует, что учет поверхностного натяжения проявляется, как и в обычной теории волн на воде [8], в том, что при $T>{}^1/_3$ качественно изменяется характер дисперсии системы – она становится отрицательной. Взаимным влиянием эффектов электропроводности и поверхностного натяжения в рамках рассматриваемой модели можно пренебречь.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fraenkel L. E.* A shallow-liquid theory in magnetohydrodynamics // J. Fl. Mech. 1960. V. 7. № 1. P. 81–107.
2. *Shercliff J. A.* Anisotropic surface waves under a vertical magnetic force // J. Fl. Mech. 1969. V. 38. № 2. P. 353–364.
3. *Hofman M.* Nonlinear waves on the free surface of an electrically conducting liquid // Wave motion. 1983. № 5. Pt 2. P. 115–124.
4. *Аитов Т. Н., Иванов А. Б., Тананаев А. В.* Течение жидкого металла в лотке в компланарном магнитном поле // Магнит. гидродинамика. 1987. № 1. С. 91–95.

5. *Селезов И. Т.* Некоторые приближенные формы уравнений движения магнитоупругих сред // Изв. АН СССР. МТТ. 1975. № 5. С. 86–91.
6. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны: Пер. с англ. М.: Мир, 1977. 621 с.
7. *Ott E., Sudan R. N.* Damping of solitary waves // Phys. Fluids. 1970. V. 13. № 6. P. 1432–1434.
8. *Карпман В. И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973. 175 с.

Киев

Поступила в редакцию
8.II.1988

УДК 532.593

АКСЕНОВ А. В., МОЖАЕВ В. В., СКОРОВАРОВ В. Е., ШЕРОНОВ А. А.

ОСОБЕННОСТИ ОБТЕКАНИЯ ЦИЛИНДРА СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТЬЮ ПРИ МАЛЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ВНУТРЕННЕГО ЧИСЛА ФРУДА

Волновые возмущения в виде внутренних гравитационных волн, возникающие при обтекании препятствия потоком стратифицированной жидкости, в свою очередь могут оказывать существенное влияние на характер самого обтекания этого тела. Степень этого воздействия зависит как от внутреннего числа Фруда F ($F=U/(NR)$, где U – скорость набегающего потока, N – частота плавучести, а R – характерный поперечный размер тела), так и от числа Рейнольдса Re. При больших числах F ($F>1$) обтекание потоком стратифицированной жидкости мало чем отличается от обтекания однородной жидкостью. Совсем иная картина наблюдается при малых числах F.

В [1] проводилось теоретическое и экспериментальное исследование областей завихренности в потоке однородно стратифицированной жидкости конечной высоты H над хорошо обтекаемым двумерным препятствием, расположенным на дне канала. Было установлено, что при $F_H<1/\pi$ (здесь $F_H=U/(NH)$) для каждого значения F_H существует такое значение безразмерной высоты препятствия $\beta=\beta_F$, $\beta=h/H$ (h – максимальная высота препятствия), что при $\beta>\beta_F$ в потоке возникают локальные неустойчивости в распределении плотности жидкости. В этих местах возникают области завихренности или происходит обрушение волн.

В [2] дано теоретическое решение задачи об обтекании цилиндра равномерным потоком безграничной стратифицированной жидкости для так называемой модели Лонга. Было показано, что при значениях $F<0{,}79$ линии тока имеют вертикальную касательную и загибаются вверх по потоку. При этих значениях F возможна потеря устойчивости течения. Здесь и далее $F=U/(NR)$, где R – радиус цилиндра. Аналогичные результаты получены при рассмотрении других моделей обтекания цилиндра [3].

Данная работа проведена с целью экспериментального исследования указанных выше особенностей, возникающих при обтекании цилиндра потоком линейно стратифицированной жидкости при малых значениях F. В ней найдены границы области внутренних чисел Фруда и Рейнольдса, при которых возникают локальные неустойчивости в распределении плотности возмущенного потока, приводящие к обрушению внутренних волн. Обнаружены периодически чередующиеся области завихренности (помимо обычной двухвихревой области в кормовой части цилиндра), возникающие в следе за цилиндром. Установлены границы области внутренних чисел Фруда и Рейнольдса, при которых они существуют. Эксперименты проводились в лабораторном бассейне размером $1{,}5\times0{,}25\times0{,}5$ м³. Линейное распределение плотности жидкости по высоте бассейна достигалось непрерывным заполнением бассейна водным раствором поваренной соли переменной концентрации. Измерение профиля плотности заполненного бассейна проводилось с помощью датчика солености. Исследуемые цилиндры диаметром от 2 до 4 см и длиной 21 см с помощью вертикальных подвесок крепились к тележке, которая сверху бассейна двигалась по горизонтальным рельсам. Визуализация поля возмущений при движении цилиндра в линейно стратифицированной жидкости осуществлялась методом темного поля с помощью теневого прибора ИАБ-451. Через оптические окна диаметром 20 см, вмонтированные в боковые стенки бассейна, проводилось горизонтальное просвечивание жидкости в направлении, перпендикулярном скорости цилиндра (вдоль его образующих). Теневой прибор использовался в режиме визуализации горизонтального нулевого градиента оптического пути.

На фотографии фиг. 1, *а* показана типичная стационарная картина линий горбов и впадин плоских внутренних волн, возникающая при движении цилиндра диаметром 3,4 см слева направо со скоростью $U=0{,}31$ см/с, $N=0{,}7$ с$^{-1}$. Для данного случая $F=0{,}26$, а $Re=105$ ($Re=UD/\nu$, где D – диаметр цилиндра, а ν – кинематическая вязкость). При $F>1$ линии горбов и впадин за цилиндром (вниз по потоку) имеют