отражает закономерность слабого влияния вращения на конвекцию вдали от критической кривой a и последующее усиление этого влияния при подходе к кривой a.

Отметим принципиальное отличие в структуре конвективных движений вращающейся жидкости от невращающейся, полученные в результате исследования вертикальных скоростей нерегулярного вихревого режима. Для невращающейся жидкости при больших числах $Ra_f > 10^6$ важным определяющим фактором является течение, вызванное неизбежным сколь угодно малым наклоном дна относительно горизонтали. Для вращающейся жидкости это течение несущественно, более важную роль играет сонаправленность векторов Ω и g, и для малых Ω наблюдаются режимы, не наблюдаемые в невращающейся жидкости, в частности в системе возникают крупные вихревые образования, ось вращения которых перпендикулярна оси вращения. С увеличением скорости вращения оси нерегулярных вихрей поворачиваются по направлению оси вращения, а при больших скоростях образуется регулярный режим, при котором оси вихрей параллельны оси вращения.

Автор благодарит Г. С. Голицына за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Boubnov B. M., Gotitsyn G. S.* Experimental stydy of convective structures in rotating fluids // J. Fluid Mech. 1986. V. 167. P. 503–531.
2. *Бубнов Б. М.* Термическая структура вихревых конвективных решеток // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 6. С. 160–166.
3. *Бубнов Б. М.* Экспериментальное исследование термических характеристик турбулентной конвекции во вращающемся слое жидкости // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1988. № 9. С. 947–953.
4. *Голицын Г. С.* Исследования конвекции с геофизическими приложениями и аналогиями. Л.: Гидрометеоиздат, 1980. 56 с.
5. *Кирдяшкин А. Г., Мухина Н. В.* Свободная конвекция в наклонных слоях жидкости и при ступенчатом изменении температуры поверхностей теплообмена // Изв. АН СССР. ПМТФ. 1971. № 6. С. 115–121.
6. *Malkus W. V. R.* The heat transport and spectrum of thermal turbulence // Proc. Roy. Soc. 1954. V. A225. P. 196–212.
7. *Deardorff J. W., Willis G. E.* Investigations of turbulent thermal convection between horizontal plates // J. Fluid Mech. 1967. V. 28. Pt4. P. 675–704.
8. *Бубнов Б. М., Сенаторский А. О.* Влияние граничных условий на конвективную устойчивость вращающегося горизонтального слоя жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 3. С. 124–129.
9. *Rossby H. T.* A Study of Benard convection with and without rotation // J. Fluid Mech. 1969. V. 36. Pt2. P. 309–337.

Москва Поступила в редакцию 9.II.1988

УДК 532.516

БУРДЭ Г. И.

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА

Рассмотрим стационарное осесимметричное течение вязкой несжимаемой жидкости около бесконечного кругового цилиндра, при котором жидкость подходит из бесконечности к цилиндру в радиальном направлении и далее растекается вдоль него в противоположные стороны от некоторой «критической окружности» (аналог движения вблизи критической точки [1]). На бесконечно большом удалении от цилиндра течение будет потенциальным и в цилиндрической системе координат (ось z направлена по оси цилиндра) представляется в виде

$$v_r=-ar;\quad v_z=2az;\quad p={}^1/_2\rho a^2(r^2+4z^2)$$

На поверхности цилиндра обе компоненты скорости обращаются в нуль.

Запишем уравнения Навье-Стокса для осесимметричного движения

$$v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r}-\frac{v_r}{r^2}+\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\right)$$

$$v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)$$
$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{1}$$

Отыскивая решение системы (1) в виде (2), придем к уравнениям для неизвестных функций $f(r)$ и $G(r)$

$$v_r = -\frac{f(r)}{r}; \quad v_z = z\frac{f'(r)}{r}; \quad p = -\rho[2a^2z^2 + G(r)] \tag{2}$$

$$r(f'^2 - ff'') + ff' = 4a^2r^3 + \nu(r^2f''' - rf'' + f')$$
$$r^3G' = rff' - f^2 + \nu(r^2f'' - rf')$$

Перейдем в этих уравнениях к новым переменным

$$f = 2\nu\varphi(\eta); \quad G = \nu a g(\eta); \quad \eta = ar^2/2\nu \tag{3}$$
$$(\eta\varphi'')' + \varphi\varphi'' - \varphi'^2 + 1 = 0 \tag{4}$$
$$g' = \eta^{-2}(2\eta\varphi\varphi' - \varphi^2 + 2\eta^2\varphi'') \tag{5}$$

Функция $\varphi(\eta)$ должна удовлетворять граничным условиям

$$\varphi = \varphi' = 0; \quad \eta = \eta_0; \quad \varphi' = 1; \quad \eta = \infty \tag{6}$$

Здесь $\eta_0 = ar_0^2/2\nu$, где r_0 – радиус цилиндра. Уравнение (4) имеет решение вида

$$\varphi = -3 + \eta + Ce^{-\eta} \tag{7}$$

где C – произвольная постоянная. Это решение удовлетворяет последнему из граничных условий (6). Подставляя (7) в первые два условия, придем к соотношениям

$$-3 + \eta_0 + Ce^{-\eta_0} = 0; \quad 1 - Ce^{-\eta_0} = 0$$

из которых следует $\eta_0 = 2$, $C = e^2$.

Таким образом, выражение (7) позволяет получить решение задачи при определенном соотношении между величиной скорости на бесконечности и радиусом цилиндра

$$a = 4\nu/r_0^2 \tag{8}$$

Интегрируя (5), получаем выражение для $g(\eta)$

$$g = \eta + \eta^{-1}(9 - 6e^{2-\eta} + e^{2(2-\eta)}) \tag{9}$$

Используя (2), (3), (7)–(9), придем к распределениям скорости и давления

$$v_r = -ar(2\xi)^{-1}(-3 + 2\xi + e^{2(1-\xi)}), \quad v_z = 2az(1 - e^{2(1-\xi)}) \tag{10}$$
$$p = -\rho\left[\frac{a^2}{2}(4z^2 + r^2) + \nu a(2\xi)^{-1}(9 - 6e^{2(1-\xi)} + e^{4(1-\xi)})\right]$$
$$\xi = r^2/r_0^2$$

Выражения (10) при условии (8) дают решение поставленной задачи, в чем можно убедиться непосредственной подстановкой в (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя: Пер. с нем. М.: Наука, 1974. 711 с.

Пермь

Поступила в редакцию
1.II.1988