**МЕХАНИКА**
**ЖИДКОСТИ И ГАЗА**
**№ 4 • 1989**

УДК 533.6.011.72:537.84

ЗАХАРОВ В. Ю.

# К ВОПРОСУ О ВОЗМОЖНОСТИ УДАРНЫХ ВОЛН РАЗРЕЖЕНИЯ В АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАЗМЕ

В статье изучается характер изменения плотности в ударных волнах малой интенсивности, распространяющихся в анизотропной разреженной плазме, на основе системы соотношений в приближении магнитной гидродинамики Чу, Голдбергера, Лоу (МГД ЧГЛ) [1].

В [2] изучены простые волны в приближении МГД ЧГЛ, были найдены условия, при которых профиль медленной волны опрокидывается на участке разрежения. В данной работе установлены области параметров, в которых условиями эволюционности [3] и условием роста энтропии [4] допускаются медленные ударные волны разрежения малой интенсивности.

1. В рамках МГД ЧГЛ рассмотрим распространение ударных волн малой интенсивности в анизотропной разреженной плазме. В силу наличия двух давлений (продольного $p_\parallel$ — вдоль магнитного поля **B** и поперечного $p_\perp$ — в плоскости, перпендикулярной **B**) система соотношений на разрыве [1] не является замкнутой. В качестве замыкающего соотношения примем условие сохранения первого адиабатического инварианта в виде [5, 6]

$$\frac{p_{\perp 2}}{\rho_2 B_2} = \frac{p_{\perp 1}}{\rho_1 B_1} \tag{1.1}$$

Здесь индекс 2 относится к параметрам за фронтом волны, индекс 1 — к параметрам перед фронтом волны. Использование (1.1) оправдано тем, что величина $p_\perp/B$ является средним магнитным моментом, который при малом изменении поля сохраняется с экспоненциальной степенью точности [7].

Рассмотрим ограничения, налагаемые условиями эволюционности [3] на параметры плазмы перед плоской ударной волной. Из системы соотношений на разрыве [1] следует соотношение, связывающее скачок $\{p_\perp\}$ поперечного давления со скачком касательной составляющей вектора индукции магнитного поля $\{B_\tau\}$

$$\frac{\{p_\perp\}}{\{B_\tau\}} = \frac{\rho_1(v_{n1}^2 - a_{A1}^2)}{\{B_\tau\}+B_{\tau 1}} - \frac{1}{8\pi}(\{B_\tau\}+2B_{\tau 1}) \tag{1.2}$$

$$\rho a_A^2 = B_n^2(B^2(4\pi)^{-1}+p_\perp - p_\parallel)/B^2, \quad \{X\}=X_2-X_1$$

Здесь $\rho$ — плотность, $v_n$ — нормальная составляющая вектора скорости плазмы относительно волны, $a_A$ — величина альфвеновской скорости.

В случае однопараметрической ударной волны скачки всех величин являются функциями скачка одного из них (например, $\{B_\tau\}$) и параметров состояния перед волной. Так как интенсивность волны мала, то скачок $\{p_\perp\}$ можно представить в виде

$$\{p_\perp\} = \left.\frac{dp_\perp}{dB_\tau}\right|_1 \{B_\tau\} + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2p_\perp}{dB_\tau^2}\right|_1 \{B_\tau\}^2 + o(\{B_\tau\}^2) \tag{1.3}$$

Поскольку в приближении МГД ЧГЛ приращение энтропии является величиной третьего порядка малости [4], то при вычислении производных в (1.3) можно, как и в обычной газовой динамике [8], использовать результаты, полученные при изучении простых волн. Согласно [2], имеем

$$\frac{dp_\perp}{dB_\tau}=\frac{\rho(a_\pm^2-a_A^2)-B_\tau^2/(4\pi)}{B_\tau} \tag{1.4}$$

где $a_+$ и $a_-$ — скорости быстрой и медленной магнитозвуковых волн соответственно.

Считая параметры, входящие в (1.4), функциями $B_\tau$, вычислим производную $d^2p_\perp/dB_\tau^2$, используя формулы для изменения величин в простых волнах [2]. Затем, заменяя $\{p_\perp\}$ из (1.3) и подставляя полученные выражения для $dp_\perp/dB_\tau$, $d^2p_\perp/dB_\tau^2$ в (1.2), получим с точностью до членов более высокого порядка

$$\rho_1(v_{n1}^2-a_{\pm1}^2)=\frac{1}{2\rho_1}\frac{F_\pm}{G_\pm H_\pm}\bigg|_1\Delta\rho,\qquad \Delta\rho=\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1}\ll 1 \tag{1.5}$$

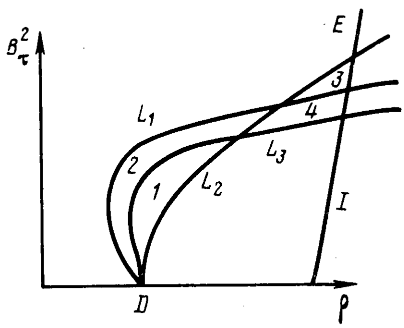
$$F_\pm=\rho(p_\parallel h_n^2+\rho a_\pm^2)(a_\pm^2-a_{A*}^2)^2+\frac{p_\perp^3}{\rho}h_n^2h_\tau^4+p_\perp\rho(a_\pm^2-a_0^2)(a_\pm^2-a_A^2)$$

$$H_\pm=a_\pm^2-a_0^2+a_\pm^2-a_{A*}^2,\qquad G_\pm=\rho(a_\pm^2-a_{A*}^2)+p_\perp h_\tau^2$$

$$\mathbf{h}=\mathbf{B}/B,\quad \rho a_0^2=3p_\parallel h_n^2,\quad \rho a_{A*}^2=\rho a_A^2+h_\tau^2(2p_\perp+B^2/(4\pi))$$

При получении (1.5) использовалось приближенное равенство $\{B_\tau\}/\{\rho\}=dB_\tau/d\rho$, где $dB_\tau$ и $d\rho$ – приращения $B_\tau$ и $\rho$ в простой волне.

Согласно условиям эволюционности [3], левая часть (1.5) является неотрицательной величиной. Для быстрой волны $(a_+)$ всегда $F_+\geqslant 0$, $G_+\geqslant 0$, $H_+>0$ [2], поэтому в случае быстрой волны имеем $\Delta\rho>0$, т. е. эволюционными являются только волны сжатия. В случае медленной $(a_-)$ волны имеем $H_-<0$. В [2] на плоскости $\rho$, $B_\tau^2$ построены кривые $F_-=0$ (линия $L_1$ на фигуре) и $G_-=0$ (линия $L_2$ на фигуре). Справа от линии $I$ имеем $p_\parallel>B^2/(4\pi)+p_\perp$, и становится мнимым альфвеновский корень $a_A$ [9].




На фигуре цифрами 1, 2, 3 отмечены области одного знака $F_-$ и $G_-$, в которых эволюционными являются медленные ударные волны разрежения $(\Delta\rho<0)$.

**2.** Выясним ограничения, налагаемые условием роста энтропии на параметры плазмы перед волной. Энтропия единицы массы $s$ определяется как сумма «продольной» $s_\parallel$ и «поперечной» $s_\perp$ энтропии [4]

$$s=s_\parallel+s_\perp,\qquad s_\parallel=\frac{c}{2}\ln\left(\frac{p_\parallel B^2}{\rho^3}\right),\qquad s_\perp=c\ln\left(\frac{p_\perp}{\rho B}\right),\qquad c\text{—const}$$

Скачки $s_\parallel$, $s_\perp$, $B$, $V$ в волне малой интенсивности связаны соотношением $(V=1/\rho)$

$$T_{\parallel1}(s_{\parallel2}-s_{\parallel1})+T_{\perp1}(s_{\perp2}-s_{\perp1})=-\frac{p_{\parallel1}}{V_1^2}(V_2-V_1)^3+$$

$$+K_1(B_2-B_1)^3+K_2(B_2-B_1)^2(V_2-V_1)+K_3(B_2-B_1)(V_2-V_1)^2 \tag{2.1}$$

$$K_1=\frac{V_1}{4B_1B_{\tau1}^2}[2p_{\parallel1}(3-4h_{\tau1}^2)+p_{\perp1}(h_{\tau1}^2-3)]$$

$$K_2=\frac{1}{2B_{\tau1}^2}\left[p_{\parallel1}(13h_{\tau1}^2-1)-\frac{B_1^2}{8\pi}-p_{\perp1}h_{n1}^2\right],\qquad K_3=\frac{p_{\perp1}+6p_{\parallel1}}{2B_1V_1}$$

Здесь $T_{\parallel 1}$, $T_{\perp 1}$ — продольная и поперечная температуры плазмы, в правой части удержаны только главные члены разложения третьего порядка малости.

При выполнении (1.1) условие роста энтропии $s_2 > s_1$ эквивалентно неравенству $s_{\parallel 2} > s_{\parallel 1}$. Поскольку скачки $B$ и $V$ в волне малой интенсивности связаны так же, как и приращения $B$ и $V$ в простой волне, то условие положительности правой части (2.1) можно переписать в виде [2]

$$(F_1(G_\pm)/G_\pm^3)_1(V_2-V_1)^3>0 \qquad (2.2)$$

$$F_1(x)=4N_0x^3-2N_3p_{\perp 1}h_{\tau 1}^2x^2+2N_2p_{\perp 1}^2h_{\tau 1}^2x-N_1p_{\perp 1}^3h_{\tau 1}^4$$

$$N_0=-p_{\parallel 1}, \qquad N_3=2B_1V_1K_3, \qquad N_2=2B_{\tau 1}^2K_2, \qquad N_1=\frac{4B_1B_{\tau 1}^2}{V_1}K_1$$

Из (2.2) следует, что энтропия растет в волне разрежения ($V_2>V_1$) при $(F_1(G_\pm)/G_\pm)_1>0$.

Рассмотрим медленную волну. На плоскости $\rho$, $B_\tau^2$ построим кривую $F_1(G_-)=0$. На фигуре слева от линии $L_2(G_-=0)$ имеем $G_-<0$, справа — $G_->0$. Найдем точки пересечения линий $F_1(G_-)=0$ и $G_-=0$. При $G_-=0$ имеем

$$F_1(G_-=0)=-N_1p_{\perp 1}^3h_{\tau 1}^4 \qquad (2.3)$$

откуда следует, что эти кривые пересекаются при $B_\tau=0$ и в точках, где $N_1=0$. Так как условие $G_-=0$ эквивалентно условию [2]

$$p_{\text{м}}-h_n^2(4p_\parallel-p_\perp)=0, \qquad p_{\text{м}}\equiv\frac{B^2}{4\pi}+p_\perp \qquad (2.4)$$

то, выражая отсюда $h_n^2$ и подставляя его в выражение для $N_1$, получим

$$N_1\left(h_n^2=\frac{p_{\text{м}}}{4p_\parallel-p_\perp}\right)=\frac{f(p_\parallel)}{4p_\parallel-p_\perp}$$

$$f(p_\parallel)=-8p_\parallel^2+p_\parallel(8p_{\text{м}}-6p_\perp)+2p_\perp^2-p_\perp p_{\text{м}}$$

Из (2.4) следует, что $4p_\parallel>p_\perp$. Поэтому знак $N_1$ на линии $G_-=0$ определяется знаком функции $f(p_\parallel)$. На линии $G_-=0$ давление $p_\parallel$ меняется от $p_{\parallel 1}=(p_{\text{м}}+p_\perp)/4$ (в точке $D$ на фигуре) до $p_{\parallel 2}=p_{\text{м}}$ (в точке $E$). Так как $f(p_{\parallel 1})>0$, $f(p_{\parallel 2})<0$, то точка пересечения линий $G_-=0$ и $F_1(G_-)=0$ лежит на участке $DE$ и других точек пересечения при $B_\tau\neq 0$ в области устойчивости нет. При $h_\tau\to 0$ имеем $N_1>0$, следовательно, $F_1(G_-=0)<0$. Поэтому линия $F_1(G_-)=0$ выходит из точки $D$ в область $G_-<0$, причем из (2.3) следует, что кривые $F_1(G_-)=0$ и $G_-=0$ в точке $D$ имеют касание.

Полученные свойства позволяют определить вид кривой $F_1(G_-)=0$ (линия $L_3$ на фигуре). Точка пересечения линий $L_2$ и $L_3$ может лежать как ниже точки пересечения $L_1$ и $L_2$, так и выше ее. Цифрами 1, 3, 4 на фигуре отмечены области, в которых энтропия растет в медленной волне разрежения.

Таким образом, если параметры плазмы перед волной таковы, что точка начального состояния лежит вблизи границы между нормальной и аномальной областями (линия $L_2$ на фигуре [10]), попадая в область 1 или 3, то такая волна является эволюционной волной разрежения ($\rho_2<\rho_1$), изменение параметров в которой удовлетворяет условию возрастания энтропии.

Автор выражает благодарность Любимову Г. А., Куликовскому А. Г., Бармину А. А., Шишкину И. С. за обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баранов В. Б., Краснобаев К. В.* Гидродинамическая теория космической плазмы. М.: Наука, 1977. 335 с.
2. *Захаров В. Ю., Шикин И. С.* Простые волны в плазме с анизотропным давлением // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 4. С. 181–183.

3. *Баранов В. Б., Карталев М. Д.* Об эволюционности ударных волн в приближении Чу, Гольдбергера и Лоу // Изв. АН СССР. МЖГ. 1972. № 6. С. 177–179.
4. *Карталев М. Д.* О теореме Цемплена для ударных волн в плазме с анизотропным давлением // Докл. АН СССР. 1972. Т. 205. № 6. С. 1316–1319.
5. *Lynn Y. M.* Discontinuities in an anisotropic plasma // Phys. Fluids. 1967. V. 10. № 10. P. 2278–2280.
6. *Половин Р. В.* Выступление по докладу // Вопросы магнитной гидродинамики и динамики плазмы. Рига: АН ЛатвССР, 1962. С. 37–38.
7. *Арцимович Л. А., Сагдеев Р. З.* Физика плазмы для физиков. М.: Атомиздат, 1979. 317 с.
8. *Мизес Р.* Математическая теория течений сжимаемой жидкости: Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 588 с.
9. *Сагдеев Р. З.* Коллективные процессы и ударные волны в разреженной плазме // Вопросы теории плазмы. Вып. 4. М.: Атомиздат, 1964. С. 20–80.
10. *Шикин И. С.* Магнитогидродинамические уравнения для плазмы без столкновений в сильном магнитном поле // Вопросы магнитной гидродинамики плазмы без столкновений в сильном магнитном поле. М.: Изд-во МГУ, 1988. С. 5–47.

Калуга

Поступила в редакцию
30.V.1988