

УДК 533.6.011.72:537.84

РУДЕРМАН М. С.

СТРУКТУРА И УСТОЙЧИВОСТЬ КВАЗИПАРАЛЛЕЛЬНЫХ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УДАРНЫХ ВОЛН МАЛОЙ АМПЛИТУДЫ

В настоящей работе исследуется структура и устойчивость квазипараллельных магнитогидродинамических ударных волн малой, но конечной амплитуды. Рассматриваются только те волны, скорость распространения которых близка к альфвеновской, т. е. быстрые ударные волны в среде, где альфвеновская скорость больше звуковой, и медленные ударные волны в среде, где альфвеновская скорость меньше звуковой, а также промежуточные (неэволюционные) ударные волны.

В [1] получено уравнение, описывающее квазипараллельное распространение малых, но конечных возмущений в среде с конечной проводимостью и токами Холла. При выводе этого уравнения предполагалось, что характерный масштаб изменения возмущений вдоль распространения волны много меньше, чем характерный масштаб в поперечном направлении. В том случае, когда зависимость от поперечных координат отсутствует, т. е. распространение одномерное, и нет токов Холла, это уравнение может быть сведено к так называемому комплексному модифицированному уравнению Бюргерса. Исследование, проведенное в настоящей работе, выполнено на основе этого уравнения.

1. Квазипараллельные ударные волны малой амплитуды в бездиссипативной среде. В [2] представлен полный анализ и классификация магнитогидродинамических ударных волн. Для дальнейшего представляется полезным дать краткое описание результатов в случае квазипараллельных ударных волн малой амплитуды, распространяющихся со скоростями, близкими к альфвеновской [2].

Рассмотрим сначала случай, когда звуковая скорость больше альфвеновской. Считаем, что перед волной заданы плотность ρ_0 , давление p_0 , параллельное магнитное поле H_0 и перпендикулярное магнитное поле h_0 ($H_0 \gg h_0$). Звуковая и параллельная альфвеновская скорости определяются формулами $c_s^2 = \gamma p_0 / \rho_0$ и $V^2 = H_0^2 / 4\pi \rho_0$, где γ — показатель адиабаты (газ считаем совершенным). Все параметры среды за волной определяются тогда скоростью распространения волны по среде перед ней C . Вместо C введем безразмерный параметр λ , связанный с C формулами

$$C = V + \alpha h_0^2 (\lambda - 1); \quad \alpha = \frac{V^3}{4H_0^2 (V^2 - c_s^2)} \quad (1.1)$$

Удобство введения параметра λ станет видно в следующем разделе при исследовании структуры ударных волн.

Предположение о близости C к V приводит к тому, что C близко также к скорости медленных магнитозвуковых волн a_- . Поэтому в случае эволюционной волны это будет медленная ударная волна.

Анализ, проведенный в [2], в данном случае сводится к следующему. При каждом значении $\lambda \geq 3/4$ существует два нетривиальных решения соотношений на разрыве, при $\lambda < 3/4$ нетривиальных решений не существует.

При $\lambda \geq 3$ оба нетривиальных решения соответствуют волнам разрежения. При $1 \leq \lambda < 3$ одно решение соответствует волне разрежения, а второе — медленной ударной волне сжатия (эволюционной), причем при $\lambda = 1$

эта волна является волной выключения. При $3/4 < \lambda < 1$ оба нетривиальных решения соответствуют промежуточным (неэволюционным) волнам сжатия. В этих волнах происходит изменение знака перпендикулярной компоненты магнитного поля. Волну с меньшим по модулю значением перпендикулярной компоненты магнитного поля за волной будем называть «сильной» промежуточной волной, а с большим — «слабой». Скорость обеих промежуточных волн относительно газа перед ними больше альфвеновской. Скорость «сильной» промежуточной волны относительно газа за ней меньше медленной магнитозвуковой скорости, а «слабой» — больше медленной магнитозвуковой скорости и меньше альфвеновской. Наконец, при $\lambda = 3/4$ имеется одна промежуточная ударная волна, образовавшаяся в результате слияния решений, соответствующих «сильной» и «слабой» волнам. Ее скорость относительно газа перед ней больше альфвеновской, а относительно газа за ней равна медленной магнитозвуковой скорости. Таким образом, на кривой, определяющей зависимость перпендикулярной компоненты магнитного поля за волной от λ , значение $\lambda = 3/4$ соответствует точке Жуге [3].

Пусть теперь $c_s < V$. Тогда C близко к скорости быстрых магнитозвуковых волн a_+ . Поэтому в случае эволюционной волны ударная волна будет быстрой. В случае $c_s < V$ будем считать, что все параметры среды заданы за волной. После этого все сказанное об ударных волнах в случае $c_s > V$ переносится на случай $c_s < V$. При $1 < \lambda < 3$ имеется быстрая (эволюционная) ударная волна сжатия, превращающаяся в волну включения при $\lambda = 1$. При $3/4 < \lambda < 1$ имеются «сильная» и «слабая» промежуточные (неэволюционные) волны, движущиеся с доальфвеновской скоростью по газу за волной. По газу перед волной «сильная» промежуточная волна движется со скоростью, большей a_+ , а «слабая» — со скоростью, большей альфвеновской и меньшей a_+ . При $\lambda = 3/4$ обе промежуточные волны сливаются в одну, движущуюся с быстрой магнитозвуковой скоростью по газу перед волной. Поэтому $\lambda = 3/4$ соответствует точке Жуге. Описанная симметрия случаев $c_s > V$ и $c_s < V$ позволяет рассмотреть ударные волны в обоих случаях в рамках единого формализма.

2. Структура квазипараллельных ударных волн малой амплитуды. В [1] рассматривались нелинейные возмущения малой амплитуды, распространяющиеся вдоль магнитного поля в плазме с холловскими токами и конечной проводимостью в предположении, что характерный масштаб изменения возмущений вдоль магнитного поля много меньше, чем поперек. Для таких возмущений выведено уравнение, описывающее эволюцию перпендикулярной компоненты возмущения магнитного поля. Вывод, проделанный в [1], легко переносится на случай квазипродольного распространения и учета не только конечной проводимости, но также вязкости и теплопроводности. В том случае, когда отсутствуют холловские точки и зависимость от поперечных к направлению распространения волны координат, это уравнение может быть записано в виде системы двух скалярных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_y}{\partial t} + V \frac{\partial h_y}{\partial x} + \alpha \frac{\partial}{\partial x} \{h_y(h_y^2 + h_z^2 - h_0^2)\} - \nu \frac{\partial^2 h_y}{\partial x^2} &= 0 \\ \frac{\partial h_z}{\partial t} + V \frac{\partial h_z}{\partial x} + \alpha \frac{\partial}{\partial x} \{h_z(h_y^2 + h_z^2 - h_0^2)\} - \nu \frac{\partial^2 h_z}{\partial x^2} &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

где h_y и h_z — y - и z -компоненты магнитного поля, $\nu = 1/2(\nu_m + \mu)$, ν_m — магнитная вязкость, μ — первый коэффициент кинематической вязкости. Предполагается, что решение, описывающее структуру ударной волны, удовлетворяет условиям $h_y \rightarrow h_0$, $h_z \rightarrow 0$ при $\alpha x \rightarrow -\infty$. Заметим, что в (2.1) не входят второй коэффициент кинематической вязкости и коэффициент теплопроводности. Дело в том, что вторая вязкость и теплопроводность являются эффектами более высокого порядка малости по параметру

h_0/H_0 , чем учитываемые в (2.1). С помощью введения комплексной переменной $b=h_y+ih_z$ система (2.1) сводится к комплексному модифицированному уравнению Бюргера.

Будем искать решения (2.1), зависящие от $\theta=\alpha h_0^2 v^{-1}(x-Ct)$. Полагая $h=h_0 p$, $h_z=h_0 q$, получим из (2.1)

$$p' = p(p^2 + q^2 - \lambda) + \lambda - 1, \quad q' = q(p^2 + q^2 - \lambda) \quad (2.2)$$

$$p \rightarrow 1, \quad q \rightarrow 0 \quad (\theta \rightarrow -\infty)$$

где штрих означает дифференцирование по θ .

Поскольку $h_0 \ll H_0$, из (1.1) следует, что C близко к V . Таким образом, как при $\alpha > 0$ ($c_s < V$), так и при $\alpha < 0$ ($c_s > V$) система (2.2) описывает структуру ударных волн, распространяющихся со скоростями, близкими к V .

Интегральная кривая системы (2.2), описывающая структуру ударной волны, в плоскости (p, q) должна выходить из особой точки $(1, 0)$ (соответствующей состоянию за волной в случае $c_s < V$ и перед волной в случае $c_s > V$) и входить в другую особую точку системы (2.2). Все особые точки (2.2) лежат на оси p и определяются из уравнения

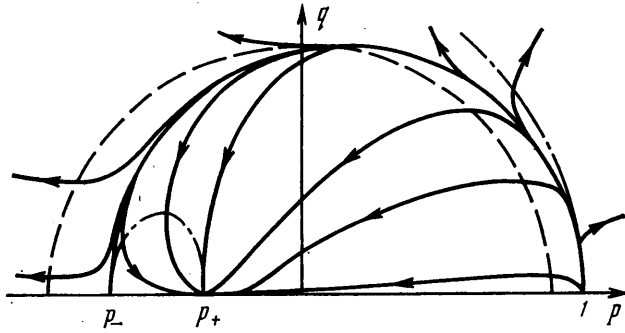
$$p^3 - \lambda p + \lambda - 1 = 0 \quad (2.3)$$

Корни (2.3) суть 1 и $p_{\pm} = (-1 \pm \sqrt{4\lambda - 3})/2$, откуда следует, что (2.2) имеет более одной особой точки, если $\lambda \geq 3/4$. При $\lambda \geq 3$, как уже отмечалось, имеются только ударные волны разрежения. Поэтому считаем $3/4 \leq \lambda < 3$. Качественное поведение интегральных кривых на фазовой плоскости системы (2.2) меняется при переходе λ через значение 1 . Поэтому исследуем поведение интегральных кривых в различных диапазонах изменения λ . Поскольку все особые точки лежат на оси p , в дальнейшем вместо обозначения особой точки $(1, 0)$ будем писать просто 1 и т. д.

Пусть $1 < \lambda < 3$. Переход из 1 в p_- соответствует ударной волне разрежения, а из 1 в p_+ — эволюционной ударной волне сжатия. Особая точка 1 является седлом. Из нее выходят только две интегральные кривые, которые лежат на оси p . Одна из этих интегральных кривых уходит на $+\infty$ и не описывает структуру ударной волны. Другая заканчивается в p_+ и описывает структуру эволюционной волны сжатия. Отметим, что структура плоская в том смысле, что магнитное поле внутри структуры лежит в плоскости xu . При $c_s < V$ состоянию за ударной волной (быстрой) соответствует точка 1 , а перед волной — точка p_+ и, по терминологии, принятой в [2, точки 1 и p_+ отождествляются с A_2 и A_1 соответственно. При $c_s > V$ состоянию перед волной (медленной) соответствует 1 , а за волной — p_+ , которые отождествляются с A_3 и A_4 .

Пусть $\lambda = 1$. Этот случай является исключительным: имеется особая точка — начало координат, и особая окружность, задаваемая уравнением $p^2 + q^2 = 1$. Из особой точки 1 выходят, как и в предыдущем случае, только две траектории, лежащие на оси p . Одна уходит на $+\infty$, а другая заканчивается в начале координат и описывает структуру ударной волны включения при $V > c_s$ и ударной волны выключения при $V < c_s$.

Пусть $3/4 < \lambda < 1$. Переходы из 1 в p_- и p_+ соответствуют «слабой» и «сильной» промежуточным ударным волнам сжатия. Точка p_- — седло, точка p_+ — устойчивый узел, точка 1 — неустойчивый узел. На фигуре приведена численно рассчитанная картина интегральных кривых для $\lambda = 7/9$. Изоклинами $q' = 0$ являются ось $q = 0$ и штриховая окружность, задаваемая уравнением $p^2 + q^2 = \lambda$. Штрихпунктирные кривые изображают изоклины $p' = 0$. Нетрудно показать, что фазовый портрет системы (2.2) качественно совпадает с изображенным на фигуре во всем рассматриваемом диапазоне изменения λ . (Здесь в силу симметрии относительно оси p представлена часть области $q \leq 0$.)



Отметим, что фигура качественно совпадает с фиг. 1 работы [4]. Совпадение только качественное, поскольку в [4] в отличие от настоящей работы исследовались ударные волны произвольной амплитуды.

Как видно на фигуре, существует бесконечно много интегральных кривых, выходящих из 1 и заканчивающихся в p_+ . Эти кривые описывают структуры «сильной» промежуточной ударной волны. Одна из этих кривых описывает плоскую структуру. Существуют ровно две интегральные кривые, выходящие из 1 и заканчивающиеся в p_- . Эти кривые описывают структуру «слабой» промежуточной ударной волны. Обе структуры неплоские, причем симметричны друг другу относительно плоскости xu . Отметим, что при $c_s < V$ точки p_- , p_+ и 1 соответствуют A_2 , A_1 и A_3 , а при $c_s > V - A_3$, A_4 и A_2 .

Наконец, пусть $\lambda = 3/4$. В этом случае, как уже указывалось выше, «сильная» и «слабая» промежуточные ударные волны сливаются в одну. Картина интегральных кривых получается из картины интегральных кривых при $3/4 < \lambda < 1$ стягиванием замкнутой штрихпунктирной кривой в точку $p = -1/2$. Для удобства дальнейшего изложения будем говорить, что интегральные кривые, имеющие горизонтальные касательные в особой точке $p = -1/2$, описывают структуру «сильной» промежуточной ударной волны, а две кривые, имеющие в $p = -1/2$ вертикальные касательные, — «слабой».

3. Устойчивость решений, описывающих структуру ударных волн.

Исследуем устойчивость решений, описывающих структуры ударных волн, относительно малых возмущений. Будем искать решение (2.1) в виде $h_y = h_0 p + h_{1y}$, $h_z = h_0 q + h_{1z}$. Линеаризуя получающиеся уравнения относительно h_{1y} и h_{1z} и полагая $(h_{1y}, h_{1z}) = h_0 (\varphi(\theta), \psi(\theta)) \exp(\alpha^2 h_0^4 \sigma t / \nu)$, получим

$$\begin{aligned} \{\varphi' - (3p^2 + q^2 - \lambda)\varphi - 2pq\psi\}' &= \sigma\varphi, \{\psi' - 2pq\varphi - \\ &- (p^2 + 3q^2 - \lambda)\psi\}' = \sigma\psi \end{aligned} \quad (3.1)$$

Функции φ , ψ должны быть ограничены при $|\theta| \rightarrow \infty$.

Исследуем сначала устойчивость решений, описывающих плоские структуры. Тогда $q = 0$ и (3.1) сводится к

$$\{\varphi' - (3p^2 - \lambda)\varphi\}' = \sigma\varphi, \{\psi' - (p^2 - \lambda)\psi\}' = \sigma\psi \quad (3.2)$$

Покажем, что отсутствуют экспоненциально растущие возмущения. Рассмотрим сначала первое уравнение (3.2). Пусть существует $\sigma = \sigma_r + i\sigma_i$ такое, что

$$\sigma_r > -\frac{\sigma_i^2}{(3-\lambda)^2} \quad (3.3)$$

и для него существует ограниченное на бесконечности решение первого уравнения (3.2). Условие (3.3) означает, что при $\theta \rightarrow -\infty$ и $\theta \rightarrow +\infty$ существует только по одному экспоненциально убывающему решению. Если σ не удовлетворяет (3.3), то при $\theta \rightarrow -\infty$ обе линейно независимые асимпт-

тотики — не возрастающие, а при $\theta \rightarrow +\infty$ по крайней мере одна — экспоненциально убывающая, поэтому все σ , не удовлетворяющие (3.3), — собственные значения.

В силу (3.3) асимптотика ограниченного решения первого уравнения (3.2) имеет следующий вид:

$$\varphi \sim \exp \left\{ \left(\frac{3-\lambda}{2} + \sqrt{\frac{(3-\lambda)^2}{4} + \sigma} \right) \theta \right\} \quad (\theta \rightarrow -\infty) \quad (3.4)$$

$$\varphi \sim \exp \left\{ \left(\frac{3p_+^2 - \lambda}{2} - \sqrt{\frac{(3p_+^2 - \lambda)^2}{4} + \sigma} \right) \theta \right\} \quad (\theta \rightarrow +\infty)$$

Сделаем замену $\varphi = p' \Phi$. Из (2.2) следует, что p' — решение первого уравнения (3.2) при $\sigma = 0$. С учетом этого получаем для Φ следующее уравнение:

$$(p' \Phi)' = \sigma p' \Phi \quad (3.5)$$

Умножим (3.5) на Φ^* (звездочка означает комплексное сопряжение) и проинтегрируем полученное равенство. В результате имеем

$$\sigma \int_{-\infty}^{\infty} p' |\Phi|^2 d\theta = - \int_{-\infty}^{\infty} p' |\Phi'|^2 d\theta \quad (3.6)$$

причем интегралы сходятся в силу (3.4) и асимптотики $p'(\theta)$ при $\theta \rightarrow \pm\infty$.

Поскольку $p' < 0$, из (3.6) следует, что $\sigma_i = 0$, $\sigma_r \leq 0$, что противоречит (3.3). Таким образом, собственными значениями рассматриваемой граничной задачи являются те и только те σ , которые не удовлетворяют (3.3). Все они, кроме $\sigma = 0$, соответствуют экспоненциально затухающим возмущениям.

Аналогично с помощью замены

$$\psi = f \Psi, \quad f = \exp \left\{ \int (p^2 - \lambda) d\theta \right\} \quad (3.7)$$

доказывается, что собственные значения второго уравнения (3.2) с условием ограниченности на бесконечности являются те и только те σ , которые удовлетворяют неравенству

$$\sigma_r \leq - \frac{\sigma_i^2}{(\lambda - 1)^2}$$

откуда следует, что все собственные значения, кроме $\sigma = 0$, соответствуют экспоненциально затухающим возмущениям.

В том случае, когда $\sigma = 0$ — кратное собственное значение, возможен степенной рост возмущений. Поэтому необходимо дополнительное исследование.

Как уже отмечалось, p' — собственная функция первого уравнения (3.2), соответствующая $\sigma = 0$. Другой собственной функцией является

$$\varphi_1 = p' \int \frac{d\theta}{p'}$$

Кроме того, имеется одна присоединенная к p' функция φ_2 , удовлетворяющая уравнению

$$\varphi_2' - (3p^2 - \lambda) \varphi_2 = p \quad (3.8)$$

Нетрудно видеть, что φ_2 ограничена на бесконечности. Поскольку φ_1 на бесконечности стремится к ненулевым постоянным, ограниченной функции, присоединенной к φ_1 , нет. Существование присоединенной функции φ_2 означает, что $h_{1v} = h_0 (\alpha^2 h_0^4 v^{-1} t p'(\theta) + \varphi_2(\theta))$, $h_{1z} = 0$ — решение линеаризованной системы уравнений (2.1). Следовательно, имеется секулярная неустойчивость решений, описывающих плоские структуры удар-

ных волн. Однако эта неустойчивость не является реальной физической неустойчивостью. Ее наличие всего лишь отражает тот факт, что если в качестве возмущенного решения взять то же решение, описывающее структуру ударной волны со слегка измененной амплитудой, то скорость распространения по среде волны, описываемой этим решением, будет слегка отличаться от скорости невозмущенного решения. В результате за достаточно большое время два решения сильно разойдутся в пространстве.

Для того чтобы исключить эту нефизичную неустойчивость, необходимо несколько изменить обычное определение устойчивости по Ляпунову, как это сделано, например, в [5] при исследовании устойчивости солитона модифицированного комплексного уравнения Кортевега — де Вриза. Введем псевдометрику

$$d(u, v) = \inf_{\eta} \sup_x |u(x, t) - v(x - \eta, t)| \quad (3.9)$$

Решение $b_0 = h_{y_0} + ih_{z_0}$ системы (2.1) назовем орбитально устойчивым [6], если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $b(x, t)$ — решение (2.1) и $d(b_0, b) < \delta$ при $t=0$, то $d(b_0, b) < \varepsilon$ для всех $t > 0$.

Устойчивость относительно псевдометрики (3.9) естественна для (2.1), так как (2.1) инвариантна относительно сдвига по x .

Перейдем к исследованию второго уравнения (3.2) при $\sigma=0$. Одним его решением, как это следует из (2.2), является p . Поскольку p при $\theta \rightarrow \pm\infty$ стремится к ненулевым постоянным, функции, присоединенной к p и ограниченной на бесконечности, нет. Нетрудно проверить, что другим решением, линейно независимым с p , является функция f , задаваемая формулой (3.7). В случае эволюционной волны $f \rightarrow \infty$ при $\theta \rightarrow -\infty$, если $1 < \lambda < 3$, поэтому f не является собственной функцией второго уравнения (3.2). При $\lambda=1$ имеем $f = \text{const } p$, $f \rightarrow \text{const}$ при $\theta \rightarrow -\infty$ и не имеет ограниченной присоединенной функции. Другое линейно независимое с p решение второго уравнения (3.2) при $\sigma=0$ есть

$$p \int \frac{d\theta}{p}$$

Это решение не ограничено при $\theta \rightarrow -\infty$ и поэтому не является собственной функцией.

В случае промежуточной волны ($3/4 \leq \lambda < 1$) $f \rightarrow 0$ при $|\theta| \rightarrow \infty$, поэтому f — собственная функция. Кроме того, имеется присоединенная к f функция f_1 . Следовательно, $h_{1y} = 0$, $h_{1z} = h_0(\alpha^2 h_0^4 v^{-1} t f(\theta) + f_1(\theta))$ — решение линейризованной системы уравнений (2.1). Можно доказать, что наличие этого решения приводит к орбитальной неустойчивости решения, описывающего структуру промежуточной ударной волны. Идея доказательства заключается в том, что рост со временем z -компоненты магнитного поля нельзя компенсировать сдвигом невозмущенного решения в соответствии с (3.9), поскольку в последнем z -компонента тождественно равна нулю.

Как видно из изложенного, неустойчивость промежуточной волны проявляется в виде роста z -компоненты магнитного поля, перпендикулярной плоскости, в которой лежит невозмущенное магнитное поле.

В настоящее время орбитальная устойчивость решения, описывающего структуру эволюционной ударной волны, не доказана.

4. Неустойчивость решений, описывающих неплоские структуры «сильных» промежуточных ударных волн. Пусть $(p(\theta), q(\theta))$ — решение (2.2), описывающее неплоскую структуру промежуточной ударной волны при $3/4 \leq \lambda < 1$. Тогда $p(\theta) \rightarrow 1$, $q(\theta) \rightarrow 0$ при $\theta \rightarrow -\infty$, $p(\theta) \rightarrow p_+$, $q(\theta) \rightarrow 0$ при $\theta \rightarrow +\infty$, $q(\theta) \neq 0$. Рассмотрим уравнение для возмущений (3.1) при $\sigma=0$. Интегрируя один раз и полагая постоянные интегрирования равными нулю, получим

$$\varphi' - (3p^2 + q^2 - \lambda)\varphi - 2pq\psi = 0, \quad \psi' - 2pq\varphi - (p^2 + 3q^2 - \lambda)\psi = 0 \quad (4.1)$$

С помощью дифференцирования (2.2) нетрудно показать, что одним из решений (4.1) является (p', q') . Можно показать, что существует функция, присоединенная к (p', q') . Наличие присоединенной функции приводит к секулярной неустойчивости, которая, однако, как и в плоском случае, является нефизической и исчезает при рассмотрении устойчивости относительно псевдометрики (3.9).

Нетрудно найти второе линейно независимое решение (φ_0, ψ_0) , которое после преобразований запишется в виде

$$\varphi_0 = p^2 \left(\frac{\Phi_0}{p} \right)'; \quad \psi_0 = q^2 \left(\frac{\Phi_0}{q} \right)'; \quad \Phi_0 = \int_{-\infty}^{\theta} q^3 e^{2\lambda\theta'} d\theta' \quad (4.2)$$

То, что (4.2) является решением системы (4.1), можно проверить непосредственной подстановкой.

Пусть $3/4 < \lambda < 1$. Функции φ_0 и ψ_0 экспоненциально затухают при $|\theta| \rightarrow -\infty$ в случае «сильной» промежуточной ударной волны, но по крайней мере φ_0 экспоненциально растет при $\theta \rightarrow +\infty$ в случае «слабой» волны.

При $\lambda = 3/4$ исследование асимптотики φ_0 и ψ_0 становится более сложным. При $\theta \rightarrow -\infty$ функции φ_0 и ψ_0 экспоненциально затухают. Из (2.2) имеем следующую асимптотику при $\theta \rightarrow +\infty$ для p и q , описывающих структуру «сильной» промежуточной волны:

$$p + \frac{1}{2} \sim \frac{2}{3\theta}; \quad q \sim Q\theta^{-3/2} e^{-\theta/2}$$

где Q — некоторая постоянная. После этого (4.2) дает при $\theta \rightarrow +\infty$

$$\varphi_0 = O(\theta^{-2}); \quad \psi_0 = O(\theta^{-3/2} e^{-\theta/2}) \quad (4.3)$$

Если p и q описывают структуру «слабой» промежуточной ударной волны, то при $\theta \rightarrow +\infty$ $p = O(e^{-\theta})$; $q = O(e^{-\theta/2})$ и φ_0 стремится к отличной от нуля постоянной при $\theta \rightarrow +\infty$. Таким образом, для «слабой» промежуточной ударной волны (φ_0, ψ_0) при $3/4 < \lambda < 1$ не является собственной функцией, а при $\lambda = 3/4$ это собственная функция, не имеющая ограниченной присоединенной функции.

Для «сильной» промежуточной ударной волны (φ_0, ψ_0) — собственная функция, стремящаяся к нулю при $|\theta| \rightarrow \infty$.

Для того чтобы найти функцию, присоединенную к (φ_0, ψ_0) , необходимо решить систему уравнений, левая часть которой совпадает с (4.1), а в правой вместо нулей стоят функции

$$\int \varphi_0 d\theta; \quad \int \psi_0 d\theta$$

Решение этой системы нетрудно выразить в квадратурах через p , q , φ_0 и ψ_0 и показать, что оно ограничено при $|\theta| \rightarrow \infty$. Таким образом, в том случае, когда $p(\theta)$ и $q(\theta)$ — решение, описывающее структуру «сильной» промежуточной ударной волны, имеются собственная функция (φ_0, ψ_0) , отличная от (p', q') , и присоединенная к ней функция. После этого, так же как и в плоском случае, можно доказать, что любое решение, описывающее структуру «сильной» промежуточной ударной волны, орбитально неустойчиво.

Проведенный выше анализ показывает, что в случае «слабой» промежуточной ударной волны, секулярная неустойчивость, т. е. неустойчивость, при которой возмущения линейно растут со временем, отсутствует. Устойчивость решений, описывающих структуру «слабых» промежуточных ударных волн, относительно возмущений, экспоненциально растущих со временем, не исследована.

Интересно сравнить результаты, полученные в настоящей работе, с результатами работы [7]. В [7] исследована устойчивость решений уравнений магнитной гидродинамики с конечной проводимостью, описываю-

щих структуру промежуточных ударных волн (по терминологии [7] — трансальфвеновских). Допускается существование газодинамического скачка внутри структуры. Показано, что плоская структура промежуточной волны секулярно неустойчива. Таким образом, результат [7], касающийся устойчивости плоской структуры, является более общим, чем результат, полученный в настоящей статье. Однако в [7] исследована только устойчивость плоских структур и даже содержится утверждение, что не существует структуры промежуточной ударной волны, скорость которой относительно среды перед ней лежит между альфвеновской и быстрой магнитозвуковой и между медленной магнитозвуковой и альфвеновской относительно среды за ней. Можно показать, что в случае ударных волн малой амплитуды такая волна является «слабой» промежуточной, по терминологии, принятой в настоящей статье. Как следует из предыдущих результатов, утверждение [7] о несуществовании структуры для таких волн неверно по крайней мере в случае волн малой амплитуды: структура есть, но она неплоская.

Отметим, что результаты настоящей работы подтверждаются численными исследованиями, проведенными в [8, 9]. В [8] рассмотрено взаимодействие плоской структуры промежуточной ударной волны с альфвеновским возмущением. Это исследование, в частности, показало, что распад структуры происходит только при внесении возмущения, приводящего к появлению перпендикулярной к плоскости структуры компоненты магнитного поля, стремящейся к конечному пределу на бесконечности, отличному от нуля.

В [9] в среде с конечной проводимостью исследовалась эволюция «размазанного» вращательного разрыва. Хотя во всей расчетной области стационарное состояние не достигается, в центре области формируется структура «слабой» промежуточной ударной волны, сохраняющаяся затем в течение всего расчетного времени. Таким образом, данные расчеты могут рассматриваться как численное доказательство устойчивости решения, описывающего структуру «слабой» промежуточной ударной волны.

В заключение автор благодарит А. А. Бармина за обсуждение результатов работы и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рудерман М. С. Устойчивость квазипродольно распространяющихся солитонов в плазме с холловской дисперсией // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 2. С. 159–165.
2. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика. М.: Физматгиз, 1962. 246 с.
3. Бармин А. А. Исследование поверхностей разрыва с выделением (поглощением) энергии в магнитной гидродинамике // ПММ. 1962. Т. 26. № 5. С. 801–810.
4. Бармин А. А., Куликовский А. Г. Об ударных волнах, ионизирующих газ при наличии произвольно ориентированного магнитного поля // Пробл. гидродинам. и механ. сплошной среды. М.: Наука, 1969. С. 35–48.
5. Жидков Е. П., Ильин И. Д., Кирчев К. П. Устойчивость решения вида уединенной волны для нелинейного модифицированного комплексного уравнения Кортевега — де Вриза // Сиб. мат. журн. 1985. Т. 26. № 6. С. 39–47.
6. Cazenave T., Lions P. I. Orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations // Comm. Math. Phys. 1982. V. 85. № 4. P. 549–561.
7. Todd L. The evolution of trans-Alfvénic shocks in gases of finite electrical conductivity // J. Fluid Mech. 1965. V. 21. Pt 2. P. 193–209.
8. Wu C. C. The MHD intermediate shock interaction with an intermediate wave: are intermediate shocks physical? // J. Geophys. Res. 1988. V. 93. № A2. P. 987–990.
9. Wu C. C. Effects of dissipation on rotational discontinuities // J. Geophys. Res. 1988. V. 95. № A5. P. 3969–3982.

Москва

Поступила в редакцию
10.VI.1988