

УДК 532.592

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН НЕПРЕРЫВНОГО СПЕКТРА МЕЖДУ СОБОЙ И С ВОЛНАМИ ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА

САЗОНОВ И. А.

Известно, что уравнение Рэлея, описывающее малые гармонические возмущения в параллельном сдвиговом течении, допускает помимо обычных решений еще и решения, соответствующие волнам непрерывного спектра [1–5]. В частности, в течении Куэтта, имеющем линейный профиль, могут существовать лишь волны непрерывного спектра. Начальные возмущения в таком течении спадают степенным образом, что можно интерпретировать взаимной интерференцией волн непрерывного спектра [2, 4].

В настоящей работе решена в квадратичном приближении нелинейная задача об эволюции начального возмущения в течении Куэтта и показано, что энергия начального возмущения передается в основное течение так, что его профиль несколько изменяется. Далее исследована эволюция начального возмущения в жидкости с простейшим модельным профилем течения, допускающим существование помимо волн непрерывного спектра еще и единственной нейтральной моды дискретного спектра. Показано, что в результате линейного резонансного взаимодействия волн дискретного и непрерывного спектра могут возникать возмущения, нарастающие линейно со временем.

Течение, не содержащее экспоненциально нарастающих мод, оказывается неустойчивым при некоторых начальных возмущениях; такая неустойчивость называется алгебраической [6, 7]. Дана физическая интерпретация этого явления, из которой видно, что подобная неустойчивость возможна в жидкости с профилями течения более общего типа, где есть нейтральные либо слабо затухающие моды дискретного спектра, имеющие критический слой.

1. Пусть $U(y)$ — профиль скорости течения, x — координата вдоль потока. Малые нестационарные гармонические по x возмущения удовлетворяют следующему уравнению, получающемуся при линеаризации уравнений Эйлера:

$$-(\partial_t + i\alpha U)(\varphi'' - \alpha^2 \varphi) + i\alpha U'' \varphi = 0 \quad (1.1)$$

Здесь φ — функция тока, α — горизонтальное волновое число ($\varphi \sim \exp(i\alpha x)$), штрихом обозначено дифференцирование по y . Если профиль линейный ($U(y) = U'y$, $U'' = \text{const}$), то уравнение (1.1) можно упростить:

$$(\partial_t + i\alpha U'y)\zeta = 0, \quad \zeta = \varphi'' - \alpha^2 \varphi \quad (1.2)$$

где ζ — z -компонента завихренности возмущения.

Для простоты выкладок будем считать жидкость безграничной, что не принципиально; потребуем при этом убывания возмущения при $y \rightarrow \pm\infty$.

Рассмотрим эволюцию произвольного начального возмущения, убывающего при $y \rightarrow \pm\infty$

$$\varphi(x, y, 0) = \varphi_0(y) \exp(i\alpha x) \quad (1.3)$$

Решая (1.2) с начальным условием (1.3), получим, что в каждом слое с координатой y завихренность начального возмущения $\zeta_0 = \varphi_0'' - \alpha^2 \varphi_0$ сохраняется и сносится потоком со скоростью $U(y)$

$$\zeta(x, y, t) = \zeta_0(y) e^{i\alpha(x - U(y)t)} \quad (1.4)$$

Общее решение задачи можно записать в виде свертки $\zeta(x, y, t)$ с ре-

лением уравнения $\varphi'' - \alpha^2 \varphi = \delta(y)$ (функцией Грина)

$$\varphi(x, y, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(x, h, t) (-2\alpha)^{-1} e^{-\alpha|y-h|} dh \quad (1.5)$$

Отсюда для вертикальной v и горизонтальной u составляющих скорости получаются следующие выражения:

$$v = i\alpha\varphi = \frac{e^{i\alpha x}}{2i} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_0(h) B(y, h, t) dh, \quad B = \exp(-\alpha|y-h| - i\alpha U' t h) \quad (1.6)$$

$$u = -\varphi' = -\frac{e^{i\alpha x}}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_0(h) B(y, h, t) \text{sign}(y-h) dh \quad (1.7)$$

Эти выражения представляют собой не что иное, как преобразование Фурье от функций

$$f_1(h) = \xi_0(h) \exp(-\alpha|y-h|) \\ f_2(h) = \xi_0(h) \exp(-\alpha|y-h|) \text{sign}(y-h)$$

Если $\xi_0(h)$ — непрерывная функция, то $f_1(h)$ в общем случае имеет в точке $h=y$ излом, а $f_2(h)$ — разрыв. Используя свойства спектров функций, имеющих те или иные особенности (см. [8]), легко показать, что при $t \rightarrow \infty$ компонента v убывает как t^{-2} , а компонента u — как t^{-1} . Энергия E такого возмущения будет убывать как t^{-2} , где

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle |u|^2 + |v|^2 \rangle dy \quad (1.8)$$

Здесь усреднение проводится по x .

Если $\xi_0(h)$ имеет разрывы в некоторых точках, то $f_1(h)$ и $f_2(h)$ в общем случае имеют разрывы, поэтому v и u в таком возмущении убывают как t^{-1} , а энергия по-прежнему — как t^{-2} .

Возмущение (1.5) может не убывать, если $\xi_0(y)$ содержит δ -образную особенность. Например, если $\xi_0(y) = -2\alpha\delta(y-y_0)$, то возмущение (1.5) представляет собой одиночную волну непрерывного спектра, распространяющуюся без затухания со скоростью $U(y_0)$ [2, 5]

$$\varphi(x, y, t) = \exp(-\alpha|y-y_0| + i\alpha(x - U(y_0)t)) \quad (1.9)$$

Возмущение (1.9) удовлетворяет уравнению Рэлея в обобщенном смысле, но исходной системе линеаризованных уравнений Эйлера — в обычном классическом смысле. Такое решение впервые было получено в [1], затем независимо — в [2]. В [3] доказывалось существование волн непрерывного спектра для течения с произвольным профилем. В [5] найдены аналогичные решения для жидкости со слабо искривленным профилем течения, а также в вязкой жидкости. Одиночная волна непрерывного спектра (называемая также в [4] волной Ван Кампена — Кейза) представляет собой бесконечно тонкий вихревой слой с гармонической вдоль потока завихренностью, сносимый течением и сопровождаемый периодическим возмущением поля скорости, экспоненциально убывающим при удалении от этого слоя. Любое возмущение в течении Куэтта может быть разложено по таким волнам, и в линейном приближении эволюция возмущения может быть описана суперпозицией волн непрерывного спектра [2, 4].

Так, в возмущении (1.3) при вещественной функции $\varphi_0(y)$ фазы всех волн непрерывного спектра в момент времени $t=0$ одинаковы. Поскольку скорости этих волн различны, что обусловлено сдвигом основного потока, то с течением времени происходит их взаимная расфазировка и общее возмущение убывает вследствие интерференции всех волн.

2. На примере конкретного простого начального возмущения проследим в нелинейной постановке за эволюцией его энергии. Пусть завихрен-

ность начального возмущения постоянная внутри слоя $|y| < b$, а вне его равна нулю

$$\begin{aligned}\zeta_0(y) &= \alpha v_0 \theta(b - |y|) \\ \varphi_0(y) &= \frac{v_0}{\alpha} (1 - e^{-\alpha b} \operatorname{ch}(\alpha y)), \quad |y| \leq b \\ \varphi_0(y) &= \frac{v_0}{\alpha} \operatorname{sh}(\alpha b) e^{-\alpha |y|}, \quad |y| \geq b\end{aligned}\quad (2.1)$$

Здесь v_0 — величина порядка амплитуды вертикальной скорости начального возмущения, $\theta(y)$ — функция Хевисайда («ступенька»). Подставив (2.1) в (1.5), получим

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{v_0 e^{i\alpha x}}{\alpha(1+\tau^2)} \left\{ e^{-i\alpha y \tau} - \frac{1}{2}(1+i\tau) e^{-\alpha y - \alpha b + i\alpha b \tau} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2}(1-i\tau) e^{\alpha y - \alpha b - i\alpha b \tau} \right\}, \quad |y| \leq b, \quad \tau = U't\end{aligned}\quad (2.2)$$

$$\varphi = \frac{v_0 \sin(\alpha b(ij + \tau))}{\alpha(ij + \tau)} e^{i\alpha x - \alpha |y|}, \quad |y| \geq b, \quad j = \operatorname{sign} y$$

Здесь τ — безразмерное время. Характерное время убывания возмущения в (2.2) t_b зависит от толщины слоя начального возмущения $t_b \approx \max((U')^{-1}, (\alpha b U')^{-1})$. При $t \gg t_b$ возмущение убывает как t^{-1} . Если слой начального возмущения тонкий ($\alpha b \ll 1$), то t_b — велико, и при $t \ll t_b$, $|y| > b$ возмущение (2.2) мало отличается от одиночной волны непрерывного спектра (1.9). Энергия возмущения (2.2), вычисленная по формуле (1.8), спадает как t^{-2} при $t \gg t_b$

$$\begin{aligned}E(t) &= v_0^2 \alpha^{-3} (1 + \tau^2)^{-2} \{ (1 + 2\alpha b)(1 + \tau^2) - 2 + \\ &\quad + \exp(-2\alpha b) [(1 + \tau^2) \cos(2\alpha b \tau) - 2\tau \sin(2\alpha b \tau)] \}\end{aligned}\quad (2.3)$$

В результате нелинейного взаимодействия волн непрерывного спектра между собой в возмущении должны появиться гармоники $\varphi_{(n)}$, $u_{(n)}$, $v_{(n)}$ с волновыми числами $n\alpha$, где $n=0, 2, 3, \dots$. Гармоника с $n=0$ соответствует не зависящей от x добавке к основному течению $\Delta U(y, t)$. Учитывая в уравнениях Эйлера малые нелинейные слагаемые, получим уравнения для генерации нулевой и второй гармоник

$$\partial_t \Delta U = \langle \operatorname{Re}(u_{(1)} v'_{(1)} - u'_{(1)} v_{(1)}) \rangle, \quad v_{(0)} = 0, \quad p_{(0)} = 0\quad (2.4)$$

$$\begin{aligned}\partial_t u_{(2)} + U \partial_x u_{(2)} + U' v_{(2)} + \partial_x p_{(2)} &= \\ = \operatorname{Re}(u_{(1)} v'_{(1)} - u'_{(1)} v_{(1)}) - \langle \operatorname{Re}(u_{(1)} v'_{(1)} - u'_{(1)} v_{(1)}) \rangle\end{aligned}\quad (2.5)$$

$$\partial_t v_{(2)} + U \partial_x v_{(2)} + p_{(2)} = 0, \quad \partial_x u_{(2)} + v'_{(2)} = 0$$

Здесь $u_{(1)}$, $v_{(1)}$ обозначено поле скоростей основной гармоники с волновым числом α , функция тока которой описана формулой (2.2). Из уравнений (2.4) и (2.5) видно, что нулевая и вторая гармоника могут достичь амплитуды порядка v_0^2 . Для гармоник с номерами $n > 2$ получаются уравнения типа (2.5) с комбинациями произведений предыдущих гармоник в правой части. Нетрудно показать, что амплитуда n -й гармоники может достичь порядка v_0^n . Энергия n -й гармоники имеет порядок

$$E_{(n)} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle |u_{(n)}|^2 + |v_{(n)}|^2 \rangle dy \sim v_0^{2n}$$

Энергия нулевой гармоники не подчиняется этой закономерности в силу того, что $\langle \Delta U \rangle \neq 0$, в то время как для остальных гармоник $\langle u_{(n)} \rangle = 0$

$$E_{(0)} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\langle |U + \Delta U|^2 \rangle - |U|^2) dy \approx \int_{-\infty}^{+\infty} U \Delta U dy \sim v_0^2 \quad (2.6)$$

Подставляя в правую часть (2.4) величины $u_{(1)} = -\varphi'$, $v_{(1)} = i\alpha\varphi$, где φ описывается формулой (2.2), получим

$$\partial_t \Delta U = v_0^2 \alpha (1 + \tau^2)^{-1} \{ \exp[-\alpha(y+b)] [-\sin(\tau\alpha(y+b)) - \tau \cos(\tau\alpha(y+b))] + \\ + \exp[\alpha(y-b)] [-\sin(\tau\alpha(y-b)) + \tau \cos(\tau\alpha(y-b))] \} \theta(b - |y|)$$

При $t \rightarrow \infty$ исходный профиль скорости изменится на величину

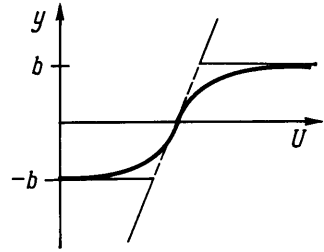
$$\Delta U(y, \infty) = \frac{\alpha v_0^2}{U'} \{ \text{Ei}[-\alpha(b+y)] - \text{Ei}[-\alpha(b-y)] \} \theta(b - |y|) \quad (2.7)$$

где Ei — интегральная экспонента.

На фиг. 1 показано, какой вид приобретет профиль скорости потока после убывания возмущения (2.1) (штриховой линией показан исходный линейный профиль). Вблизи разрывов в распределении завихренности (в точках $y = \pm b$) в профиле скорости окажутся интегрируемые (логарифмические) особенности.

Используя полученные результаты, легко показать, что для первой и нулевой гармоник возмущения (2.2) с точностью до членов порядка $\sim v_0^4$ выполняется закон сохранения энергии $E_{(0)}(t) + E_{(1)}(t) = \text{const}$.

Общая картина обмена энергии между гармониками показана на фиг. 2. Первоначально вся энергия возмущения (величина этой энергии $\sim v_0^2$ отмечена штриховой линией) содержится в первой (основной) гармонике; в процессе эволюции возмущения эта гармоника практически всю энергию отдает в основное течение (нулевую гармонику) и лишь незначительную часть — во вторую гармонику ($\sim v_0^4$). Вторая гармоника генерируется до тех пор, пока достаточно велика амплитуда первой гармоники (см. (2.5)), а на больших временах она должна, так же как и первая, затухать вследствие расфазировки составляющих ее волн непрерывного спектра, отдавая почти всю свою энергию основному течению и незначительную часть — третьей ($\sim v_0^6$) и четвертой ($\sim v_0^8$) гармоникам и т. д. В конечном счете энергия всех гармоник будет передана в основное течение.



Фиг. 1

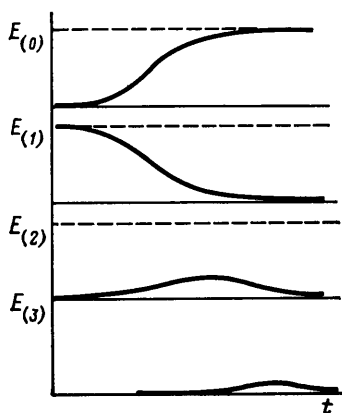
Изменение профиля скорости можно объяснить взаимодействием вихревых слоев между собой. Нетрудно рассчитать энергию суммарного возмущения, образованного двумя гармоническими вихревыми слоями с амплитудами завихренности ζ_1 и ζ_2

$$E = \frac{1}{4\alpha} [\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + 2\zeta_1\zeta_2 e^{-\alpha\Delta y} \cos(\alpha\Delta x)]$$

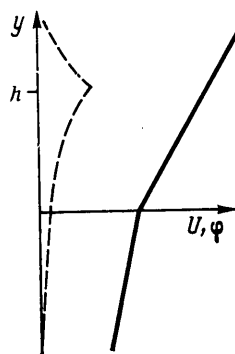
Здесь Δy — расстояние между слоями, $\alpha\Delta x$ — сдвиг фаз между ними. Изменение энергии с изменением взаимного положения слоев по горизонтали Δx свидетельствует о том, что слои действуют друг на друга горизонтальными постоянными вдоль x силами F_{12} и F_{21} , которые приводят к ускорению одного слоя и замедлению другого

$$F_{12} = -F_{21} = \frac{\partial E}{\partial \Delta x} = \frac{1}{2} \zeta_1 \zeta_2 e^{-\alpha\Delta y} \sin(\alpha\Delta x)$$

Силы, возникающие между вихревыми образованиями, рассмотрены в [9]. Для того чтобы найти изменение профиля скорости при начальном возмущении общего вида (1.3), проинтегрируем по Δy силы, действующие на данный вихревой слой со



Фиг. 2



Фиг. 3

стороны остальных вихревых слоев, составляющих возмущение (1.5). При этом найдем ускорение данного слоя $\partial_t \Delta U$ ($\Delta x = U' \Delta y t$), а затем проинтегрируем это ускорение по t от 0 до ∞

$$\Delta U(y, \infty) = \frac{\zeta_0(y)}{2\alpha U'} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\zeta_0(y + \Delta y)}{\Delta y} e^{-\alpha|\Delta y|d} \Delta y \quad (2.8)$$

При выводе (2.8) использовалась формула

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(tx) dx dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) x^{-1} dx$$

где $f(x)$ — произвольная непрерывная функция.

3. Проследим теперь за эволюцией начального возмущения в жидкости, профиль течения которой допускает существование волн дискретного спектра. Для примера рассмотрим модельный кусочно-линейный профиль с одним изломом, показанный на фиг. 3

$$U(y) = U_0 + U_1' y, \quad y > 0 \quad (3.1)$$

$$U(y) = U_0 + U_2' y, \quad y < 0$$

Решая уравнение Рэля с условиями «сшивки» на изломе профиля скорости и условиями убывания на бесконечности, найдем, что в течении с профилем (3.1) возможна единственная мода дискретного спектра

$$\varphi_a = \exp(-\alpha|y| + i\alpha(x - ct)), \quad c = U_0 + \frac{\Delta U'}{2\alpha} \quad (3.2)$$

Здесь c — фазовая скорость этой моды (скорость c вещественна, следовательно, мода нейтральная). Завихренность $\zeta_a = \varphi_a'' - \alpha^2 \varphi_a = -2\alpha \delta(y) \times \exp(i\alpha(x - ct))$ целиком сосредоточена в изломе и обусловлена возмущением завихренности основного потока, испытывающей скачок $\Delta U' = U_1' - U_2'$ в слое $y=0$. Пусть для определенности $U_1' > U_2' > 0$, тогда критический слой для волны (3.2) $y_c = \Delta U' / (2\alpha U_1')$ ($U(y_c) = c$) лежит выше излома.

Пусть завихренность начального возмущения целиком сосредоточена в бесконечно тонком слое $y=h > 0$

$$\zeta_0 = -2v_0 \delta(y-h), \quad \varphi_0 = \frac{v_0}{\alpha} e^{-\alpha|y-h|} \quad (3.3)$$

График функции $\varphi_0(y)$ показан на фиг. 3 штриховой линией. Решение

уравнения (1.1) с профилем скорости (3.1), начальным возмущением (3.3) и условиями убывания при $y \rightarrow \pm\infty$ имеет вид

$$\varphi = \frac{v_0}{\alpha} e^{i\alpha(x-U(h)t)} \left[e^{-\alpha|y-h|} + \frac{e^{-\alpha(h+|y|)}}{h/y_c-1} \right] + \frac{v_0}{\alpha} \frac{\exp[i\alpha(x-ct) - \alpha(h+|y|)]}{h/y_c-1} \quad (3.4)$$

Первое слагаемое в (3.4) соответствует волне непрерывного спектра в течении с профилем (3.1). Завихренность в этой волне сосредоточена в слоях $y=0$ и $y=h$, а сама волна распространяется со скоростью $U(h)$. Второе слагаемое в (3.4) соответствует волне дискретного спектра с амплитудой $v_0(1-h/y_c)$ и фазовой скоростью c . Амплитуды обеих волн растут при $h \rightarrow h_c$ и постоянной амплитуде начального возмущения (3.3). При $h=y_c$ получаем возмущение, линейно растущее со временем

$$\varphi = \frac{v_0}{\alpha} e^{i\alpha(x-ct)} \left[e^{-\alpha|y-h|} - \frac{i}{2} \Delta U' t e^{-\alpha(h+|y|)} \right] \quad (3.5)$$

Энергия такого растущего возмущения черпается из энергии основного течения. Решая уравнение (2.4), в котором $u_{(1)} = -\varphi'$, $v_{(1)} = i\alpha\varphi$ (φ описывается выражением (3.5)), получим, что скорость основного течения меняется только в тех слоях, в которых имеется возмущение завихренности ζ

$$\Delta U(y, t) = \frac{v_0^2 \Delta U'}{2} t^2 [\delta(y-h) - \delta(y)] e^{-\alpha y} \quad (3.6)$$

Используя (2.6), найдем, что энергия потока уменьшается на величину

$$\Delta E(y, t) = -E_{(0)} = \frac{v_0^2 (\Delta U')^2}{4\alpha} t^2 \exp\left(-\frac{\Delta U'}{2U_1'}\right) \quad (3.7)$$

4. Нарастание амплитуды в возмущении (3.5) можно объяснить следующим образом. Вихревой слой $y=h$, движущийся со скоростью $U(h)$, сопровождается периодическим возмущением поля скоростей, экспоненциально спадающим при удалении от слоя: $\varphi \sim \exp[-\alpha|y-h| + i\alpha(x-U(h)t)]$. Вертикальные скорости в таком возмущении вызывают периодические искажения границы завихренности основного течения, т. е. приводят к появлению вторичного периодического вихревого слоя в слое $y=0$: $\zeta \sim \exp[i\alpha(x-U(h)t) - \alpha h] \delta(y)$. Этот вторичный вихревой слой сопровождается своим периодическим возмущением поля скорости, экспоненциально спадающим при удалении от него. Возбужденное таким образом вторичное возмущение распространяется в дальнейшем волнообразно со скоростью c .

Если скорость переноса начального вихревого слоя не совпадает со скоростью распространения вторичного возмущения, то воздействие со стороны начального возмущения оказываются то в фазе, то в противофазе с вторичным возмущением и амплитуда вторичного возмущения будет периодически меняться. Если же $U(h)=c$, то возникает явление резонанса: воздействие со стороны начального возмущения оказывается все время в фазе с вторичным и амплитуда вторичного возмущения непрерывно будет расти со временем.

Отметим, что интервал линейного нарастания возмущения (3.5) ограничен временем существования поля скорости начального вихревого слоя, которое зависит от ряда факторов. Например, в вязкой жидкости характерное время существования волны непрерывного спектра $t_v \sim v^{-1/2} (\alpha U')^{-1/2}$, где v — коэффициент вязкости [4, 5]. Если начальная завихренность сосредоточена в слое малой, но конечной толщины b , то, как показано в разд. 2, амплитуда периодического возмущения, сопровождаю-

щего такой слой, будет сохраняться до времен порядка $t_b \sim (\alpha b U')^{-1}$. Если амплитуда вертикальной скорости v_0 в первоначальном вихревом слое слишком велика, то может возникнуть нелинейное разрушение волны непрерывного спектра; характерное время такого разрушения $t_n \sim (\alpha v_0)^{-1}$ легко получить из условия того, что смещения частиц жидкости $v_0 t$ становятся порядка пространственного периода волны α^{-1} .

Таким образом, время существования вихревого слоя равно $t_m \approx \min(t_v, t_b, t_n)$. Отсюда легко оценить конечную амплитуду волны дискретного спектра, которая может быть достигнута в результате такого резонансного взаимодействия: амплитуда вертикальной скорости в этой волне равна $v_A \sim v_0 t_m \Delta U'$, а амплитуда вертикальных смещений A порядка $A \sim v_0 t_m$ (так как $v_A \sim \omega A$, где $\omega = c\alpha \sim \Delta U'$ — частота волны).

Отсюда видно различие между алгебраической и обычной линейной неустойчивостью. При обычной неустойчивости сколь угодно малая флуктуация приводит к неограниченному экспоненциальному росту амплитуды до нелинейных значений, при которых происходят необратимые изменения в потоке. Для того, чтобы такие же изменения произошли в среде с алгебраической неустойчивостью, необходимо, чтобы начальные флуктуации были бы достаточно сильными, так что амплитуда дискретной моды могла достичь нелинейных значений $A_n \sim \alpha^{-1}$. Например, если решающим фактором существования вихревого слоя является его толщина b ($t_b \ll t_v, t_n$), то пороговое значение амплитуды начального возмущения по порядку величины можно оценить по формуле: $v_0 \sim b U'$.

Алгебраическая неустойчивость возможна в потоках с более общим, чем кусочно-линейный, профилем скорости течения, лишь бы в них существовали нейтральные либо слабо затухающие волны дискретного спектра, имеющие критический слой; тогда завихренность начального возмущения, сосредоточенная в критическом слое и его окрестности, приведет к резонансному росту амплитуды дискретной моды. Подобное явление может происходить и в стратифицированных жидкостях со сдвиговым течением [7]: например, вертикальные скорости первичного возмущения могут деформировать границу между слоями разной плотности, возбуждая внутренние волны. Наконец, источником начальных периодических возмущений могут служить не только волны непрерывного спектра, но и сугубо нелинейные периодические образования: цепочка одиночных вихрей, «дорожка Кармана» и т. п. Важно, чтобы они двигались с фазовой скоростью одной из мод дискретного спектра.

5. Используя выражение (3.4), нетрудно рассчитать эволюцию произвольного периодического по x ($\sim \exp(i\alpha x)$) начального возмущения, завихренность $\xi_0(y)$ которого сосредоточена выше излома профиля скорости (3.1). Для этого достаточно проинтегрировать (3.4) по h с весом $\xi_0(h)$. К полученному подынтегральному выражению добавим и вычтем из него величину

$$\frac{\xi_0(y_c) e^{-\alpha|y|}}{1-h/y_c} [e^{-ah(1+i\tau)} - e^{-\alpha(h+i v_c \tau)}], \quad \tau = U_1' t$$

а затем перегруппируем слагаемые следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi = & \alpha \int_0^{\infty} \xi_0(h) B_1 B_2 dh - \int_0^{\infty} \frac{\xi_0(h) - \xi_0(y_c)}{1-h/y_c} B_3 B_2 dh + \\ & + \int_0^{\infty} \frac{\xi_0(h) - \xi_0(y_c)}{1-h/y_c} B_3 B_4 dh - \xi_0(y_c) \int_0^{\infty} \frac{B_3 (B_2 - B_4)}{1-h/y_c} dh \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$B_1 = e^{-\alpha|y-h|}, \quad B_2 = e^{i\alpha(x-h\tau)}, \quad B_3 = e^{-ah-\alpha|y|}, \quad B_4 = e^{i\alpha(x-y_c\tau)}$$

Если $\xi_0(y)$ непрерывная функция, то при $t \rightarrow \infty$ первое слагаемое в (5.1) убывает как t^{-2} (преобразование Фурье от функции с изломом), второе убывает не медленнее, чем t^{-2} (преобразование Фурье от непрерывной функции), а третье и четвертое слагаемые стремятся к конечному преде-

лу — волне дискретного спектра (волны непрерывного спектра взаимно гасят друг друга):

$$\varphi = \exp[-\alpha|y| + i\alpha(x-ct)] \left[\int_0^{\infty} \frac{\xi_0(h)}{h/y_c - 1} e^{-ah} dh - \xi_0(y_c) e^{-\alpha y_c \pi i} \right] + O(t^{-1}) \quad (5.2)$$

Аналогично тому, как было получено выражение (2.8), описывающее изменение линейного профиля, вычислим изменение профиля (3.1)

$$\Delta U = \frac{\alpha \xi_0(y)}{2U'} \left(\int_0^{\infty} \frac{\xi_0(h)}{h-y} e^{-\alpha|h-v|} dy + \frac{e^{-\alpha y}}{1-y/y_c} \left\{ \cos[U_1' t \alpha(y_c-y)] \int_0^{\infty} \frac{\xi_0(h)}{h-y_c} e^{-ah} dh - \right. \right. \\ \left. \left. - \sin[U_1' t \alpha(y_c-y)] e^{-\alpha y_c} \xi_0(y_c) - \int_0^{\infty} \frac{\xi_0(h)}{h-y} e^{-ah} dh \right\} \right) + O\left(\frac{1}{t}\right), \quad y > 0 \quad (5.3)$$

Таким образом, при $t \rightarrow \infty$ изменение профиля не стремится к конечному пределу; в профиле скорости возникают осцилляции, связанные с тем, что поле завихренности волн непрерывного спектра, которое не убывает в отличие от поля скоростей этих волн, продолжает взаимодействовать с завихренностью дискретной моды, сосредоточенной в слое $y=0$. При $t \rightarrow \infty$ профиль становится все более изрезанным в окрестности критического слоя дискретной моды.

Автор выражает признательность Г. И. Баренблатту, С. Я. Герценштейну, М. А. Миронову, С. А. Рыбаку, О. С. Рыжову, Е. Д. Терентьеву за проявленный интерес к работе и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Eliassen A., Hoiland E., Riis E. Two-dimensional perturbation of a flow with constant shear of a stratified fluid // Ins. for Weather and Climate Research Norw. Acad. Sci. and Lett. 1953. № 1. P. 1-29.
2. Case K. M. Stability of inviscid plane Couette flow // Phys. Fluids. 1960. V. 3. № 2. P. 143-148.
3. Дикий Л. А. Гидродинамическая устойчивость и динамика атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1976. 107 с.
4. Тимофеев А. В. Колебания неоднородных течений плазмы и жидкости // УФН. 1970. Т. 102. № 2. С. 185-210.
5. Саонов И. А. Возбуждение волн Ван Кампена — Кейза. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 1. С. 115-119.
6. Landahl M. T. A note on an algebraic instability of inviscid parallel shear flows // J. Fluid Mech. 1980. V. 98. Pt. 2. P. 243-251.
7. Chimonas G. Algebraic disturbances in stratified shear flows // J. Fluid Mech. 1970. V. 90. Pt 1. P. 1-19.
8. Консон Э. Асимптотические разложения: Пер. с англ. М.: Мир, 1966. 159 с.
9. Ламб Г. Гидродинамика. М.; Л.: ОГИЗ Гостехиздат, 1947. 928 с.

Москва

Поступила в редакцию
25.II.1988