МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 · 1989

УДК 532.546.013.3

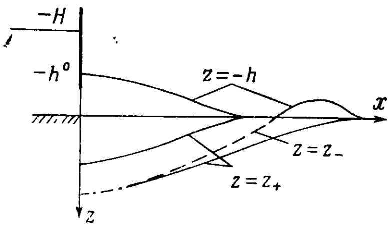
КРАЙКО А. Н., МАХМУДОВ А. А.

РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТЫЙ ГРУНТ В РАМКАХ МОДЕЛИ МГНОВЕННОГО НАСЫЩЕНИЯ

Рассматривается двумерная нестационарная задача фильтрации, описывающая полив проницаемого пористого грунта. Принимается, что однородный грунт занимает правую часть нижнего полупространства, а полив организуется открытием «задвижки» над началом координат. Типична для такой задачи малость толщин слоев жидкости над границей раздела и в грунте по сравнению с их протяженностью в горизонтальном направлении. Вслед за [1] фильтрация жидкости в грунте рассматривается в рамках «модели мгновенного насыщения» (ММН), предполагающей мгновенное заполнение пор жидкостью и «связывание» части жидкости грунтом. При этом в отличие от действительного процесса проникновения жидкости в «капиллярные» поры в ММН он происходит мгновенно и характеризуется одним феноменологическим коэффициентом $n\leqslant 1$. Коэффициент n определяет долю порового пространства, не занятого «связанной жидкостью» (СЖ). Наряду с ней в грунте в согласии с известными идеями [2–5] при фильтрации в общем случае есть и «несвязанная жидкость» (НЖ). В ММН именно ее движение подчиняется закону Дарси (или его нелинейным аналогам) с коэффициентом фильтрации, описывающим взаимодействие НЖ с грунтом и СЖ. При каждом значении горизонтальной координаты течение внутри пористого грунта считается строго вертикальным, а нестационарный поток над ним описывается уравнениями теории мелкой воды с дополнительными слагаемыми, учитывающими отток жидкости в грунт. Обсуждаются условия истечения из щели, возникающей при поднятии задвижки. В процессе полива в зависимости от предыстории и от наличия (или отсутствия) жидкости над границей грунта снизу к ней примыкает либо зона сухого грунта, либо зона полного насыщения, либо, наконец, зона частичного насыщения, в которой есть лишь СЖ, заполняющая определенную часть порового пространства (после прохождения заднего фронта зоны полного насыщения эта часть равна $1-n$). В результате внутри грунта в общем случае возникает несколько подлежащих определению границ, разделяющих зоны разного насыщения. В отличие от тех известных моделей, в которых насыщение грунта учитывается через непрерывный рост «влажности» [5], в ММН в дополнение к общепринятым положениям «одножидкостной» теории фильтрации насыщенных грунтов изменяется лишь связь скорости «фронта насыщения» (ФН) со скоростью подходящей к нему НЖ. Возможности предлагаемого подхода иллюстрируются примерами расчета двукратного импульсного полива.

1. Пусть оси x и z декартовых координат ориентированы, как показано на фиг. 1: ось z направлена вниз по силе тяжести, характеризуемой ускорением свободного падения g, а плоскость xy совпадает с горизонтальной границей однородного пористого грунта, занимающего полупространство $z>0$. Ограничимся нестационарным плоскопараллельным течением, в котором параметры зависят от x, z и времени t, а от нуля отличны только u и w — проекции скорости $\mathbf{U}$ на оси x и z. Пусть далее $\rho\equiv\text{const}$ — истинная плотность жидкости, в том числе в грунте, где ρ отлична от «размазанной» плотности, часто используемой в многожидкостной механике сплошных сред (см. [6, 7]). Давление p будем отсчитывать от его постоянного уровня над свободной поверхностью: $z=-h(x, t)$ и перед ФН: $z=z_+(x, t)$, где $h(x, t)$ и $z_+(x, t)$ — функции, определяемые в процессе решения. Левую границу исследуемой области совместим с сечением $x=0$ и будем считать, что граница раздела при $x<0$ непроницаема для жидкости.

При $t=0$ жидкость, отсутствовавшая до этого справа от левой границы, начинает поступать через «щель»: $x=0$, $0>z>-h^\circ$, в слой над грунтом, распространяясь вправо и одновременно фильтруясь в грунт. Поступление жидкости через левую границу регулируется открывающейся и закрывающейся задвижкой. Перемещение задвижки определяется законом изменения $h^\circ = h^\circ(t)$, который предполагается известным. Уровень жидкости H слева от задвижки будем считать фиксированным. При заданном $h^\circ(t)$ задача состоит в нахождении движения жидкости над границей раздела — при $0 > z > -h(x, t)$ и под нею — при $0 \leqslant z \leqslant z_+(x, t)$, а после окончательного закрытия задвижки — в определении результата полива. Под последним понимается распределение СЖ в грунте после прекращения процесса фильтрации, что возможно только в неполностью насыщенном грунте из-за «связывания» жидкости. В полностью насыщенном грунте слой фильтрующейся жидкости опускается, не изменяя своей толщины.



Фиг. 1

В рассматриваемых далее типичных для задач орошения случаях характерный масштаб течения в направлении переменной x много больше h и z_+. Исключение составляют окрестности гидравлических прыжков и щели, которые в данной модели считаются поверхностями разрыва. Если пренебрегать погрешностями, вносимыми в модель нарушением указанного соотношения масштаба x с h и z_+ вблизи разрывов, то для потока над грунтом естественно воспользоваться приближением теории мелкой воды [8, 9] с добавлением в законы сохранения слагаемых, отвечающих фильтрации жидкости в грунт. Аналогично при описании фильтрации оправдано пренебрежение производной $\partial p/\partial x$ и компонентой u вектора скорости. Так как $\partial p/\partial x$ в грунте мала, то отличная от нуля на его границе компонента u для типичных коэффициентов фильтрации исчезает в слое толщины $z \ll z_+$.

Все переменные удобно считать безразмерными с L, $\sqrt{L/g}$, $\sqrt{Lg}$, ρ и $\rho g L$ в качестве масштабов длин, времени, скоростей, плотности и давления. Если в качестве L взять максимальную высоту щели, то безразмерные значения h и z_+ для типичных времен полива будут величинами порядка единицы, а координата x, до которой распространяется жидкость, много больше единицы.

Пусть время, характеризующее изменение h°, много меньше времени прохождения частицами жидкости близкой окрестности щели. В таких условиях для связи параметров в некотором сечении выравнивания истекающей из щели струи оправдано использование стационарного интеграла Бернулли. Если $h_0 \equiv h(0, t)$ — толщина слоя жидкости, а $u_0 \equiv u(0, t)$ — ее скорость в упомянутом сечении, то при $h_0 \leqslant h^\circ$ в силу этого интеграла

$$u_0 = \sqrt{2(H-h_0)} \tag{1.1}$$

В дополнение к (1.1.) на режимах «сверхзвукового истечения» (см. ниже) h_0 связано с h° равенством

$$h_0 = \beta(\pi_0) h^\circ, \quad \pi_0 = (H-h_0)/h_0 \tag{1.2}$$

с известным из теории струй идеальной жидкости коэффициентом поджатия β.

При сравнительно быстром закрытии щели и даже при ее открытии (если отток жидкости от левой границы и ее фильтрация в грунт недостаточно интенсивны) возможны ситуации с $h^\circ < h_0$. В таких случаях жидкость, поступающая из щели в нижнюю часть слоя, сначала разгоняется до скорости u_m в некотором «сечении m», а затем тормозится до скорости u_0 в сечении выравнивания (в сечении m над струей, истекающей из щели и имеющей скорость u_m и высоту h_m, располагается практически застойная зона толщины $h^m - h_m$). Пусть в сечении выравнивания, как и ранее, $h = h_0$. Тогда условия сохранения потоков массы и x-компоненты количества движения, записанные для слоя жидкости, ограниченного этим сечением и сечением m, и дополненные естественными предположениями о линейном распределении p поперек слоя, о квазистационарности потока и т. п., приводят к следующей системе соотношений, связывающих u_0, h_0, h°, а также u_m, h_m и h^m в качестве некоторых «внутренних» переменных

$$\begin{gathered} h_m = \beta(\pi^m) h^\circ, \quad \pi^m = (H-h^m)/h^m, \quad u_m = \sqrt{2(H-h^m)} \\ h_0 u_0 = h_m u_m, \quad h_0^2 + 2h_0 u_0^2 = (h^m)^2 + 2h_m u_m^2 \end{gathered} \tag{1.3}$$

Здесь, как и в (1.2), $\beta(\pi^m)$ – известная функция своего аргумента, а при получении u_m, как и в (1.1), использовался интеграл Бернулли. Система (1.3) справедлива при условии, что найденное из нее отношение $h_0/h^\circ>1$. При заданном h° она связывает h_0 и u_0. Если $h^\circ\to 0$, то, согласно (1.3), $h^m\to h_0$ и $u_0\to 0$. В рассматриваемых далее задачах характерный масштаб по x, как уже отмечалось, много больше единицы. В таком масштабе размер начального выравнивающего участка пренебрежимо мал и поэтому условия (1.1)–(1.3) ставятся при $x=0$, где h и u приписывается нижний индекс нуль.

2. Нужные для последующего анализа интегральные законы сохранения массы и x-компоненты импульса в приближении теории малой воды имеют вид

$$\oint_\gamma (h\,dx-hu\,dt)=\iint_\sigma w_-\,dx\,dt$$

$$\oint_\gamma \left\{hu\,dx-h\left(u^2+\frac{h}{2}\right)dt\right\}=\iint_\sigma w_-u\,dx\,dt \tag{2.1}$$

где σ — произвольная площадка в плоскости xt, ограниченная контуром γ, а $w_-=w_-(x,\,t)$ — вертикальная скорость над грунтом при $z=0$. В подобластях непрерывности u и h из (2.1) следуют дифференциальные уравнения, а на разрывах (гидравлических прыжках), движущихся со скоростью D, — условия

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial(hu)}{\partial x}+w_-=0$$

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(hu^2+\frac{h^2}{2}\right)+w_-u=0 \tag{2.2}$$

$$[h(u-D)]=0,\ [2h(u-D)^2+h^2]=0 \tag{2.3}$$

В (2.3) $[\varphi]$ — разность φ на разрыве.

Система (2.2), записанная в форме законов сохранения, допускает сквозной счет, например, по численным схемам, применявшимся в [10, 11]. При этом разрывы получаются как области непрерывного, но резкого изменения u и h. Параметры с разных сторон от зоны «размазанного» гидравлического прыжка с точностью до $o(1)$ удовлетворяют условиям (2.3).

Для понимания того, какие условия следует ставить для системы (2.2) при $x=0$, существенно, что, будучи гиперболической, она сводится к двум характеристическим уравнениям

$$d^\pm I^\pm/dt=\mp w_-\sqrt{h},\quad I^\pm=u\pm 2\sqrt{h}$$

$$(d^\pm/dt\equiv\partial/\partial t+(u\pm\sqrt{h})\partial/\partial x) \tag{2.4}$$

Здесь $I^\pm$ – инварианты Римана, а $d^\pm/dt$ – полные производные по t соответственно вдоль c^+- и c^--характеристик, на которых

$$c^\pm:\ dx/dt=u\pm\sqrt{h} \tag{2.5}$$

В (2.4) и (2.5) верхним (нижним) индексам отвечают верхние (нижние) знаки. Согласно (2.4) и (2.5), $\sqrt{h}$ в теории мелкой воды (в размерной форме – $\sqrt{gh}$) играет роль скорости звука в газовой динамике, а число Фруда $\mathrm{Fr}\equiv u/\sqrt{h}$ – роль числа Маха. Именно в этом смысле истечение с $\mathrm{Fr}>1$ было названо выше сверхзвуковым. По тем же соображениям, что и для течений газа, при $\mathrm{Fr}_0>1$ на левой границе следует задавать u_0 и h_0 или – две связи между этими параметрами. Требуемые связи дают равенства (1.1) и (1.2), выражающие u_0 и h_0 через h°. Если $\mathrm{Fr}_0<1$, то при $x=0$ требуется одно условие, в качестве которого можно задать u_0, h_0 или любую их комбинацию, отличную от I_0^-. Для $h_0\leqslant h^\circ$ необходимая комбинация есть следствие (1.1), а при $h_0>h^\circ$ соответствующая связь, как уже отмечалось, получается из (1.3). При выполнении условия (1.1) $\mathrm{Fr}_0=\sqrt{2(H-h_0)/h_0}$. Поэтому $\mathrm{Fr}_0\leqslant 1$, если $h_0/H\geqslant 2/3$, и $\mathrm{Fr}_0>1$ при $h_0/H<2/3$.

Изложенные выше соображения о постановке граничных условий, аналогичные известным правилам газовой динамики, справедливы до тех пор, пока при $x=0$ не возникнет гидравлический прыжок или центрированная волна разрежения. В подобных случаях число условий, требующихся на левой границе, заранее не известно и находится из решения задачи о распаде произвольного разрыва. Так, например, мгновенное закрытие щели в момент $t=t_1$ в общем случае ведет к выполнению не двух условий: $u_0=0$ и $h_0=0$, а лишь первого из них – условия непротекания. При этом у левой границы возникает центрированная волна разрежения, а h_0 сразу после закрытия щели определяется условием сохранения I^-. Из этого условия видно, что при $\mathrm{Fr}_{01}>2$, где дополнительный индекс 1 приписан параметрам при $x=0$ непосредственно перед закрытием щели, в окрестности этого сечения даже при отсутствии фильтрации ($w_-\equiv0$) возникает свободная от жидкости зона. Размер ее растет пропорционально $t-t_1$. В случае произвольных Fr_{01}

$$h_0=h_{01}(1-\mathrm{Fr}_{01}/2)^2,\quad \mathrm{Fr}_{01}<2;\quad h_0=0,\quad \mathrm{Fr}_{01}\geqslant2 \tag{2.6}$$

3. Для определения скорости w_-, необходимой для замыкания уравнений и условий (1.1)–(1.3), (2.1)–(2.6), к ним добавляются уравнения, описывающие фильтрацию жидкости в грунте. Рассматривая далее, как и в [1], задачи, в которых определяющим является неполное насыщение грунта, будем использовать модель, названную выше моделью мгновенного насыщения. В соответствии с ММН в грунте могут располагаться зоны сухого грунта (ЗСГ), зоны полного насыщения (ЗПН) и зоны частичного насыщения (ЗЧН). В ЗСГ жидкость, по определению, отсутствует полностью. В ЗПН она в общем случае движется, заполняя все свободное от «скелета» поровое пространство. Наконец, в ЗЧН движением фрагментов жидкости, которая, занимая лишь часть порового пространства, располагается на смачиваемых элементах скелета, в «капиллярных» порах [5] и т. п., можно пренебречь. Последнее обстоятельство позволяет считать жидкость в ЗЧН связанной, а свободную от нее часть порового пространства характеризовать коэффициентом $n\leqslant1$. Таким образом, если обычный коэффициент пористости $m<1$ дает относительный объем пространства, не занятого сухим скелетом грунта (к последнему в принципе можно относить и так называемую «прочно связанную» жидкость [5]), то n вводится так, что относительный объем, занятый жидкостью в ЗЧН, равен $(1-n)m$. Согласно определению, $n=1$ отвечало бы несмачиваемому грунту без капиллярных пор, а $n=0$ – грунту, способному удерживать жидкость, заполняющую все поровое пространство.

При известном m минимальную величину n можно найти экспериментально по количеству жидкости, оставшейся после прохождения через образец грунта, достаточно толстого для завершения процесса намокания слоя жидкости. Хотя, как уже отмечалось, действительный процесс намокания, включающий проникновение жидкости в мелкие элементы грунта, требует конечного времени, в ММН предполагается, что он происходит мгновенно с определенным выше минимальным значением n, который наряду с m будем считать известной характеристикой грунта. Это, однако, не исключает возможности учета в рамках ММН разной степени насыщения грунта в ЗЧН. Например, в задачах орошения каждый новый полив проводится до полного высыхания грунта, что в ММН можно описать введением зон предварительного частичного насыщения (ЗПЧН). Присутствие остаточной связанной жидкости в них будем описывать коэффициентом n_0. В отличие от n коэффициент $n_0\geqslant n$ зависит от предыстории, т. е. от того, когда был предыдущий полив, как испарялась жидкость и т. д. Это тем не менее не мешает считать n_0 известным, например, из специальных измерений состояния грунта. Как будет видно из дальнейшего, скорость ФН зависит от величины n_0. При прочих равных условиях она минимальна при распространении ФН по ЗСГ, которой отвечает $n_0=1$, и максимальна при движении ФН по ЗЧН, когда $n_0=n$.

В ММН с помощью того же считающегося известным коэффициента n вся жидкость в ЗПН разбивается на несвязанную подвижную (НЖ) и на связанную неподвижную (СЖ), которые занимают соответственно n-ю и $(1-n)$-ю части порового пространства. В предлагаемой версии ММН коэффициент n не зависит от скорости фильтрующейся жидкости, хотя его величина, по-видимому, должна расти с ее увеличением. При наличии экспериментальных данных это обстоятельство можно учесть в последующих модификациях модели. Пока же ограничимся ММН с постоянными m и n.

Итак, пусть в ЗПН движется только НЖ, причем, согласно сказанному ранее, в описывающих это движение уравнениях можно пренебречь x-компонентой вектора скорости и производной $\partial p/\partial x$. Тогда для несжимаемой жидкости, текущей в однородном грунте с $m=\text{const}$ и $n=\text{const}$, уравнение неразрывности, как и в обычной (одножидкостной) модели, даст $\partial w / \partial z=0$ и, следовательно,

$$w=w(x, t) \tag{3.1}$$

Здесь и далее, как и в теории мелкой воды, w — z-компонента так называемой физической скорости. С учетом определения m и n для скорости над грунтом в силу условия сохранения на его границе потока массы

$$w_-(x, t)=mnw(x, t) \tag{3.2}$$

Пренебрежем далее, как это обычно делается в задачах рассматриваемого класса [5], производной $\partial w / \partial t$. Тогда z-проекция уравнения движения НЖ в размерных переменных примет вид

$$-(1/\rho)\partial p / \partial z+\partial(gz) / \partial z+mnf=0 \tag{3.3}$$

В (3.3) f — z-компонента силы, действующей на НЖ со стороны грунта и СЖ. Предполагается, что f — известная функция w, а также физических свойств жидкости и грунта. Благодаря множителю mn перед f последняя имеет смысл силы, действующей на единицу массы НЖ. При малых и умеренных скоростях для f хорошо работает «закон Дарси» [2, 5], согласно которому

$$f=-gw / k \tag{3.4}$$

с коэффициентом фильтрации k. Коэффициент k имеет размерность скорости и определяется только физическими свойствами жидкости и грунта. После обезразмеривания уравнение (3.3) с f из (3.4) сведется к

$$\partial\varphi / \partial z-w / \varkappa=0 \quad (\varphi=p-z,\ \varkappa=k / (mn\sqrt{gL}) \tag{3.5}$$

Для типичных грунтов и $L=0{,}1-1$ м безразмерный параметр $\varkappa\ll 1$.

В силу (3.1) w не зависит от z, что позволяет легко проинтегрировать уравнение (3.5). Если при данных x и t над грунтом присутствует слой жидкости, т. е. $h(x, t)>0$, то, пренебрегая ее вертикальным ускорением и скачком p, вызванным втеканием жидкости в грунт, найдем, что $p(0, x, t)=h(x, t)$ и, следовательно

$$\varphi(0, x, t)=h(x, t) \tag{3.6}$$

Аналогично на ФН вне зависимости от того, движется он по ЗСГ, по ЗЧН или по ЗПЧН, в пренебрежении эффектом капиллярного скачка давления $p=0$ и поэтому

$$\varphi(z_+, x, t)=-z_+(x, t) \tag{3.7}$$

В процессе полива возникают ситуации, в которых после интервала времени с $h>0$ слой жидкости над грунтом исчезает. При этом в грунте образуется ЗЧН, отделенная от движущейся вниз и в общем случае утончающейся ЗПН ее задним фронтом $z=z_-(x, t)$. На нем также $p=0$ и, следовательно

$$\varphi(z_-, z, t)=-z_-(x, t) \tag{3.8}$$

В дальнейшем первую ситуацию ($h>0$) будем называть случаем *а*, а вторую ($h=0$) — случаем *б*. При произвольном поливе случаи *а* и *б* сменяют друг друга. Интегрируя (3.5) с учетом соответственно условий (3.6) и (3.7) или (3.7) и (3.8), получим

$$w=\varkappa(h+z_+) / z_+, \quad w=\varkappa \tag{3.9}$$

В рамках сделанных допущений равенства (3.9), как и исходные уравнения (3.3) – (3.5), тождественны известным из одножидкостной теории фильтрации [5]. Совпадают и определения коэффициента k. Отличие состоит лишь в замыкании (3.9), т. е. в установлении связи w со скоростью ФН $D \equiv \partial z_+ / \partial t$. Эта связь является следствием условия сохранения потока жидкости, которое в движущейся со скоростью ФН системе координат в рамках ММН имеет вид

$$-m(1-n)D+m(1-n_-)D+mn(w-D)=0 \tag{3.10}$$

Здесь n_- – значение n перед ФН. При распространении ФН по ЗСГ, ЗЧН и ЗПЧН соответственно имеем: $n_-=1$, n и n_0, где $1>n_0>n$. Согласно (3.10)

$$\partial z_+ / \partial t \equiv D = nw / n_- \tag{3.11}$$

При $n_-=n$ и 1 равенство (3.11) сводится к полученным в [1]. Наконец, подстановка (3.11) в (3.9) дает

$$\frac{\partial z_+}{\partial t} = \varkappa \frac{n(h+z_+)}{n_- z_+}, \qquad \frac{\partial z_+}{\partial t} = \frac{\varkappa n}{n_-} \tag{3.12}$$

В рассматриваемых задачах слой жидкости над грунтом ограничен распространяющимся вправо передним фронтом, при приближении к которому одновременно стремятся к нулю h и z_+. Ввиду этого обстоятельства первое уравнение (3.12) при численном решении удобно заменить на

$$\partial \chi / \partial t = 2\varkappa n (h+\sqrt{\chi}) / n_- \quad (\chi = z_+^2) \tag{3.13}$$

В случае *б* задний фронт ЗПН, над которым располагается ЗЧН, движется, как следует из справедливого и для него равенства (3.10) с $n_-= =n$, со скоростью $D=w$, т. е. здесь, согласно (3.9)

$$\partial z_- / \partial t = w \equiv \varkappa \tag{3.14}$$

Если ФН распространяется по ЗСГ или по ЗПЧН, то $n/n_-<1$ и сравнение (3.14) и второго уравнения (3.12) указывает на линейное по времени уменьшение Δ – толщины ЗПН

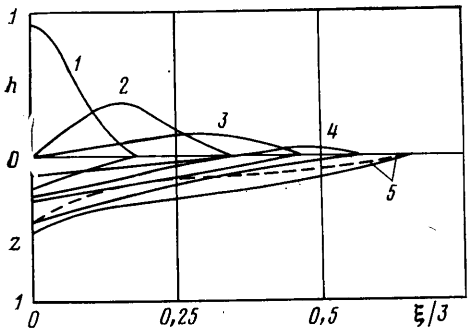
$$\Delta \equiv z_+ - z_- = \Delta_0 - \varkappa (n/n_- - 1)(t-t_0) \tag{3.15}$$

Здесь индекс ноль приписан значениям Δ и t в начальный момент, под которым в данном случае понимается момент исчезновения (при данном x) слоя жидкости над грунтом. Согласно последней формуле, задний фронт ЗПН догоняет передний при $t=t_0+\Delta_0 n_- / [(n-n_-)\varkappa]$. После этого в рамках ММН процесс фильтрации при данном x прекращается до нового появления жидкости над грунтом. Фильтрация этой жидкости до момента достижения новым ФН границы ЗЧН описывается уравнениями (3.9), (3.11) – (3.15) с $n/n_-=1$. Заметим, кстати, что в случае *б*, согласно (3.15), толщина ЗПН при этом не изменяется, а сама она, как и в одножидкостной теории фильтрации, опускается вниз с постоянной скоростью.

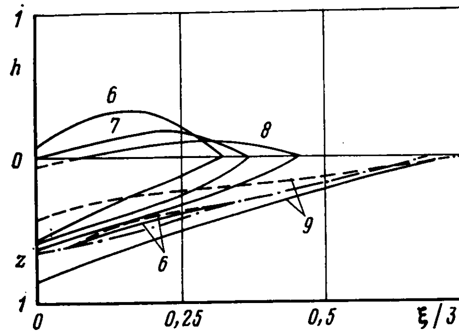
Итак, для любого $h(x, t) \geqslant 0$ можно по (3.12) и (3.13) найти $z_+(x, t)$, а, зная z_+, при $h>0$ по первому уравнению (3.9) и (3.2) – скорости $w(x, t)$ и $w_-(x, t)$. Последняя в свою очередь замыкает систему уравнений и условий теории мелкой воды, определяющих $h(x, t)$ и $u(x, t)$. Если в выписанных выше уравнениях и условиях перейти к новым переменным

$$\tau = \varkappa t, \quad \xi = \varkappa x, \quad w^\circ = w/\varkappa, \quad w_-^\circ = w_-/\varkappa \tag{3.16}$$

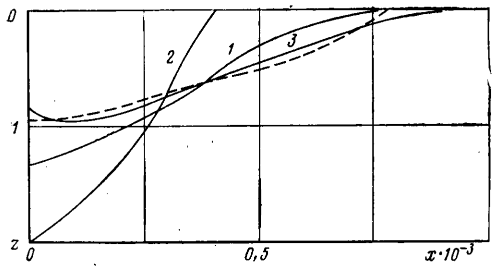
а h, z и u оставить прежними, то из них исчезнет безразмерный коэффициент фильтрации $\varkappa$, а время t войдет лишь в закон регулирования щели. Следовательно, для случаев разных грунтов с фиксированными m, n, n_0



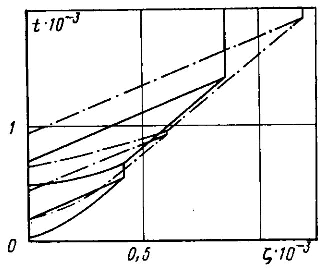
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

и одинаковым (в зависимости от τ, а не от t) законом изменения высоты щели

$$h^\circ = h^\circ(\tau) \tag{3.17}$$

в новых переменных имеет место подобие течений. Переменные (3.16) удобны для представления результатов и при нарушении условия подобия (3.17).

4. Возможности ММН иллюстрируют представленные на фиг. 2–5 результаты расчетов так называемого «импульсного» полива. Последний определяется последовательностью интервалов полностью открытой ($h^\circ \equiv \mathrm{const} > 0$) и полностью закрытой ($h^\circ \equiv 0$) задвижки, причем в приводимых примерах ее открытие (при $t=0$ и $t=t_2$) и закрытие (при $t=t_1<t_2$ и $t=t_3>t_2$) считались мгновенными. Результаты, приводимые на фигурах, получены для $m=0{,}5$, $n=0{,}5$ и $n_0=1$. В согласии с (3.16) и (3.17), в данном примере условие подобия сводится к постоянству $\tau_i=\varkappa t_i$ с $i=1, 2, 3$.

Уравнения теории мелкой воды интегрировались по схеме *SHASTA* (см. [10, 11]), а уравнение (3.13), записанное для каждого узла используемого при этом разбиения по x, в котором в рассматриваемый момент $h>0$,– по схеме Эйлера с пересчетом.

Истечение из открытой щели определялось значениями $\pi_0 \equiv (H-h_0)/h_0 = 0{,}62$, $\mathrm{Fr}_0 \equiv \sqrt{2\pi_0} = 1{,}11$ и, следовательно, было сверхзвуковым. За масштаб длины L было взято размерное значение высоты в сечении выравнивания (при открытой щели), в силу чего $h_0=1$, а $u_0=\mathrm{Fr}_0$. Сразу после закрытия щели, согласно (2.6), $h_0 \simeq 0{,}2$. Для называемого далее основным варианта с $\varkappa=\varkappa_0=0{,}003$ значения τ в моменты открытия и закрытия щели были равны: $\tau_1=0{,}3$, $\tau_2=1{,}35$ и $\tau_3=1{,}65$.

Фигуры 2 и 3 отвечают основному варианту и дают высоту слоя жидкости $h(\xi, \tau)$ и положение фронтов $z_+(\xi, \tau)$ и $z_-(\xi, \tau)$ в разные моменты времени (h и z_+ – сплошные, а z_- – штриховые кривые). Между цифрами у кривых и моментами времени τ имеется соответствие: $\tau=0{,}25$ (*1*); 0,5 (*2*); 0,75 (*3*); 1 (*4*); 1,35 (*5*); 1,8 (*6*); 2 (*7*); 2,1 (*8*) и 2,8 (*9*). Штрихпунктиром на фиг. 3, а также на фиг. 1 дано положение участков остановившихся ФН, возникших после первого и второго поливов.

На фиг. 4 кривые *1*, *2* и *3* в зависимости от x показывают результаты полива, т. е. окончательное положение границ ЗЧН соответственно для $\varkappa=\varkappa_0$, $2\varkappa_0$ и $\varkappa_0/2$. В сравниваемых случаях фиксировались не τ_i, а t_i, и, следовательно, условие подобия (3.17) не выполнялось. Штриховая кривая на фиг. 4 дает для $\varkappa=\varkappa_0$ результат однократного полива (при $0\leqslant\tau\leqslant0{,}6$) с тем же суммарным расходом жидкости. Наконец, на фиг. 5 при $\xi=0{,}6$ для двух из трех перечисленных выше случаев полива построены диаграммы ζt, где $\zeta=3z/\varkappa$, причем сплошные и штриховые кривые дают траектории передних, задних и остановившихся фронтов соответственно для $\varkappa=2\varkappa_0$ и $\varkappa_0/2$. Использование ζ и t на фиг. 5 позволило для $\xi=\mathrm{const}$ и при нарушении условия подобия (3.17) уменьшить «разброс» кривых.

В заключение подчеркнем, что, применяя ММН и теорию мелкой воды к решению двумерных задач, для которых не очень трудоемки и другие подходы (см., например, [12]), авторы преследовали более широкую цель. На примере таких задач они намеривались описать подход, в котором крайне просто переносятся на задачи орошения методы и результаты одножидкостной теории фильтрации, развитой для полностью насыщенных грунтов. Наибольший эффект от применения этого подхода естественно ожидать в пространственном случае, в котором теория мелкой воды по-прежнему сводит описание нестационарного течения по периодической системе борозд к одномерным уравнениям, а для решения двумерных (при каждом x) уравнений ММН есть эффективный метод граничных элементов. Именно по указанной причине выше не учитывались такие эффекты, как трение в уравнениях теории мелкой воды и капиллярный перепад давления на ФН в ММН. Учет этих эффектов, а также пространственности задачи в целом необходим для выдачи конкретных рекомендаций по организации оптимального (в первую очередь по расходу воды) полива. Простота модели в подобных задачах определяет саму возможность их решения. Заметим, наконец, что применительно к задачам подземной гидродинамики ММН с точностью до обозначений идентична так называемой «поршневой модели» (см., например, [13]). В последней вместо физической скорости НЖ w используется скорость фильтрации, равная mnw, а вместо символа n — символ s.

Авторы признательны В. М. Ентову за полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Крайко А. Н., Махмудов А. А.* О моделировании нестационарной фильтрации тяжелой жидкости: Препринт № 168–88. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1988. 30 с.
2. *Лейбензон Л. С.* Собр. тр. Т. 2: Подземная гидрогазодинамика. М.: Изд-во АН СССР, 1953. 554 с.
3. *Веригин Н. Н.* Движение влаги в почве // Докл. АН СССР. 1953. Т. 89. № 2. С. 229–232.
4. *Веригин Н. Н.* Промачивание почвы при орошении посредством дождевания // Докл. АН СССР. 1953. Т. 89. № 4. С. 627–630.
5. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
6. *Нигматулин Р. И.* Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
7. *Крайко А. Н.* К двухжидкостной модели течений газа и диспергированных в нем частиц // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 1. С. 96–106.
8. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны: Пер. с англ. М.: Мир, 1977. 622 с.
9. *Педлоски Дж.* Геофизическая гидродинамика. Т. 1: Пер. с англ. М.: Мир, 1984. 400 с.
10. *Махмудов А. А.* Численное решение некоторых задач теории мелкой воды // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1987. Т. 27. № 5. С. 788–791.
11. *Махмудов А. А.* Распространение метода SHASTA на численное решение двумерных нестационарных уравнений мелкой воды // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1987. Т. 27. № 8. С. 1262–1266.
12. *Akan A. O., Gen B. C.* Mathematical model of shallow water flow over porous media // J. Hydraulics Division. Proc. Amer. Soc. Civ. Eng. 1981. V. 107. № 4. P. 479–494.
13. *Kochina I. N., Mikhailov N. N., Filinov M. V.* Groundwater mound damping // Int. J. Engineering Sci. 1983. V. 21. № 4. P. 413–421.

Москва

Поступила в редакцию 17.VI.1988