МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 • 1989

УДК 532.526

АСИМПТОТИКА СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ТЕРМОКАПИЛЛЯРНОГО ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ МАРАНГОНИ

БАТИЩЕВ В. А.

Для больших чисел Марангони построены формальные асимптотические разложения решения стационарной задачи о течении несжимаемой жидкости в неограниченной области под действием градиента температуры, заданного вдоль свободной границы. В пограничном слое вблизи свободной поверхности течение жидкости удовлетворяет системе нелинейных уравнений, для которой в окрестности критической точки найдены автомодельные решения. Вне пограничного слоя возникает медленное течение, приближенно удовлетворяющее уравнениям невязкой жидкости. Получено уравнение свободной поверхности, которое при обращении в нуль градиента температуры определяет равновесную свободную поверхность капиллярной жидкости. Рассчитаны поверхность газового пузыря, примыкающего к твердой стенке, и форма капиллярного мениска при неравномерном нагреве свободной границы.

1. Для системы Навье – Стокса при исчезающей вязкости $\nu\to 0$ рассматривается нелинейная стационарная задача о течении несжимаемой жидкости в области D под действием термокапиллярных сил, вызванных неравномерным нагревом свободной границы Γ

$$(\mathbf{v},\nabla)\mathbf{v}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\Delta\mathbf{v}+\mathbf{g},\qquad \operatorname{div}\mathbf{v}=0 \tag{1.1}$$

$$p=2\nu\rho\mathbf{n}\Pi\mathbf{n}+\sigma(\varkappa_1+\varkappa_2)+p_*,\qquad (x,y,z)\in\Gamma \tag{1.2}$$

$$2\nu\rho\Pi\mathbf{n}-2\nu\rho(\mathbf{n}\Pi\mathbf{n})=\nabla_\Gamma\sigma,\qquad (x,y,z)\in\Gamma$$

$$\mathbf{vn}=0,\qquad (x,y,z)\in\Gamma$$

Здесь $\mathbf{v}=(v_x,v_y,v_z)$, $\mathbf{g}=-g\mathbf{e}_z$, $\mathbf{e}_z=(0,0,1)$ – орт оси z, g – ускорение силы тяжести, ρ – плотность жидкости, $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ – кривизны главных нормальных сечений свободной поверхности Γ, $\mathbf{n}$ – единичный вектор внешней нормали к Γ, Π – тензор скоростей деформации, p_* – заданное давление на Γ, $\nabla_\Gamma=\nabla-(\mathbf{n}\nabla)\mathbf{n}$ – градиент вдоль Γ. Коэффициент поверхностного натяжения считается линейной функцией температуры $\sigma=\sigma_0+\sigma_T(T-T_*)$, где σ_0, σ_T, T_* – константы, $\sigma_T<0$, а температура T задана вдоль Γ. Предполагается, что область D не ограниченна и задано поле скоростей на бесконечности.

В результате неравномерного нагрева свободной границы возникает ненулевой градиент поверхностного натяженния $\nabla_\Gamma\sigma$, который приводит к появлению касательных напряжений на Γ и формированию нелинейного пограничного слоя при $\nu\to 0$. При отсутствии касательных напряжений на Γ уравнения пограничного слоя линеаризуются и решаются в квадратурах [1]. Исследованию нелинейных пограничных слоев Марангони, возникающих вследствие термокапиллярного эффекта, посвящены работы [2–6]. В [7] построена асимптотика течения жидкости малой вязкости при заданных касательных напряжениях на Γ.

Преобразуем задачу (1.1), (1.2) к безразмерному виду введением характерных масштабов длины L и скорости $U=(|\sigma_T|^2A^2L\rho^{-2}\nu^{-1})^{1/3}$, где A – характерный градиент температуры на Γ. Выделяя гидростатическое давление $p_0=-\rho gz$ и определяя масштаб давления $P=\sigma_0/L$, представим p в виде $p=Pp'+p_0$. Введем малый параметр $\varepsilon=M^{-1/3}$, где $M=|\sigma_T|L^2A\rho^{-1}\nu^{-2}$ — число Марангони. Приравнивая порядки вязких и инерционных членов в системе Навье — Стокса и в краевых условиях для касательных напряжений находим, что порядок скорости в пограничном слое $O(U)$, а порядок толщины пограничного слоя ε. Асимптотические разложения решения задачи (1.1), (1.2) при $\varepsilon\to 0$ строятся в виде

$$\mathbf{v}\sim\mathbf{h}_0+\varepsilon(\mathbf{h}_1+\mathbf{v}_1)+\ldots,\quad p'\sim\lambda q_0+\varepsilon\lambda(p_1+q_1)+\ldots,\quad \zeta\sim\zeta_0+\varepsilon\zeta_1+\ldots \tag{1.3}$$

Здесь $\lambda=|\sigma_T|AL/\sigma_0$ — «капиллярная» константа [4], $z=\zeta(x, y)$ — уравнение свободной границы Г, $\mathbf{h}_k$, q_k — функции типа решений задачи пограничного слоя, а $\mathbf{v}_k$, p_k определяют решение всюду вне области пограничного слоя.

2. Краевая задача для главных членов асимптотики (1.3), определяющих течение в пограничном слое вблизи свободной границы, получается применением к системе (1.1), (1.2) второго итерационного процесса методом Вишика — Люстерника [8]. Вблизи Г введем локальные ортогональные координаты ξ, φ, θ [7], где ξ — расстояние точки $N(x, y, z)$ до поверхности Г, а φ, θ — криволинейные координаты на Г основания нормали, опущенной из точки N на поверхность Г. Предполагается, что отрезки нормалей к Г при достаточно малых ξ не пересекаются. Пусть $h_{\varphi k}$, $h_{\theta k}$, $h_{\xi k}$ — компоненты вектора $\mathbf{h}_k$ в локальных координатах. Подставляем (1.3) в (1.1), (1.2), разлагаем $\mathbf{v}_1$, p_1 в ряды Тейлора по степеням ξ и вводим преобразование растяжения $\xi=\varepsilon s$. Вводим обозначение $H_{\xi 1}=h_{\xi 1}+\mathbf{v}_1\mathbf{n}_1|_\Gamma$. Приравнивая нулю коэффициенты при ε^{-1}, ε, находим $h_{\xi 0}=0$, а для $h_{\varphi 0}$, $h_{\theta 0}$, $H_{\xi 1}$ выводим краевую задачу

$$g_\varphi^{-1}h_{\varphi 0}\frac{\partial h_{\varphi 0}}{\partial\varphi}+g_\theta^{-1}h_{\theta 0}\frac{\partial h_{\varphi 0}}{\partial\theta}+H_{\xi 1}\frac{\partial h_{\varphi 0}}{\partial s}+\delta^{-1}\frac{\partial g_\varphi}{\partial\theta}h_{\varphi 0}h_{\theta 0}-\delta^{-1}\frac{\partial g_\theta}{\partial\varphi}h_{\theta 0}^2=\frac{\partial^2 h_{\varphi 0}}{\partial s^2}$$

$$(2.1)$$

$$g_\varphi^{-1}h_{\varphi 0}\frac{\partial h_{\theta 0}}{\partial\varphi}+g_\theta^{-1}h_{\theta 0}\frac{\partial h_{\theta 0}}{\partial\theta}+H_{\xi 1}\frac{\partial h_{\theta 0}}{\partial s}+\delta^{-1}\frac{\partial g_\theta}{\partial\varphi}h_{\varphi 0}h_{\theta 0}-\delta^{-1}\frac{\partial g_\varphi}{\partial\theta}h_{\varphi 0}^2=\frac{\partial^2 h_{\theta 0}}{\partial s^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}(g_\theta h_{\varphi 0})+\frac{\partial}{\partial\theta}(g_\varphi h_{\theta 0})+\frac{\partial}{\partial s}(\delta H_{\xi 1})=0$$

$$\frac{\partial h_{\varphi 0}}{\partial s}=-\frac{1}{g_\varphi}\frac{\partial\sigma}{\partial\varphi},\quad \frac{\partial h_{\theta 0}}{\partial s}=-\frac{1}{g_\theta}\frac{\partial\sigma}{\partial\theta},\quad H_{\xi 1}=0\quad (s=0)$$

$$h_{\varphi 0}=h_{\theta 0}=0\ (s=\infty)$$

Здесь g_φ, g_θ — коэффициенты Ламэ поверхности Г, $\delta=g_\varphi g_\theta$. Вектор-функция $\mathbf{h}_1$ удовлетворяет линейной краевой задаче, которая здесь не приводится. Отметим, что задача (2.1) в плоском случае изучена в [6], где найдены условия ее разрешимости.

Главный член в асимптотическом разложении (1.3) для давления получается в виде

$$q_0=-\varkappa_1\int_s^\infty h_{\varphi 0}^2\,ds-\varkappa_2\int_s^\infty h_{\theta 0}^2\,ds \tag{2.2}$$

Так же как и в [7], легко получить выражение для q_0 на свободной границе в осесимметричном случае

$$q_0|_\Gamma=-\frac{\varkappa_1}{g_\theta}\left(\int_{\varphi_0}^{\varphi}g_\theta\frac{\partial\sigma}{\partial\varphi}d\varphi+g_\theta|_{\varphi=\varphi_0}\int_0^\infty f_0^2(s)\,ds\right) \tag{2.3}$$

где $f_0=h_{\varphi 0}(s, \varphi_0)$ — профиль скорости в пограничном слое в сечении $\varphi=\varphi_0$.

Ввиду осевой симметрии $h_{\theta 0}=0$, $\sigma=\sigma(\varphi)$, $g_\theta=g_\theta(\varphi)$. Отметим, что удобно выбрать такое φ_0, при котором известно значение $f_0(s)$, например если точка с координатой φ_0 лежит на оси симметрии, то $f_0=0$, а функция q_0/Γ определяется без решения системы пограничного слоя.

Краевая задача для функций $\mathbf{v}_1$, p_1, определяющих течение вне области пограничного слоя, и асимптотическая форма свободной границы получаются применением первого итерационного процесса [8] к системе (1.1), (1.2). Для $\mathbf{v}_1$, p_1 получаем уравнение Эйлера идеальной жидкости. Свободную границу невязкого течения, определяемую уравнением $z=\zeta_0$, обозначим через Γ_0. Введем локальные ортогональные координаты ξ_1, φ_1, θ_1 вблизи Γ_0, где ξ_1 – расстояние до Γ_0. Главные кривизны поверхности Γ разлагаем в асимптотические ряды $\varkappa_1\sim\varkappa_{10}+\varepsilon\varkappa_{11}+\ldots$, $\varkappa_2\sim\varkappa_{20}+\varepsilon\varkappa_{21}+\ldots$, где $\varkappa_{10}$, $\varkappa_{20}$ – главные кривизны поверхности Γ_0. Подставляем разложения (1.3) в динамическое условие для нормального напряжения (1.2) и, приравнивая нулю коэффициент при ε^0, выводим уравнение Γ_0, которое запишем с учетом (2.2) в размерной форме

$$\sigma(\varkappa_{10}+\varkappa_{20})+\varkappa_{10}\int\limits_0^\infty h_{\varphi 0}{}^2\,ds+\varkappa_{20}\int\limits_0^\infty h_{\theta 0}{}^2\,ds=\rho g z+c \tag{2.4}$$

Приведем уравнение Γ_0 с учетом (2.3) в осесимметричном случае

$$\sigma(\varkappa_{10}+\varkappa_{20})+\frac{\varkappa_{10}}{g_\theta}\left[\int\limits_{\varphi_0}^{\sigma} g_\theta\frac{\partial\sigma}{\partial\varphi}\,d\varphi+g_\theta|_{\varphi=\varphi_0}\int\limits_0^\infty f_0\,ds\right]=\rho g z+c \tag{2.5}$$

При $\lambda=0$ ($\sigma=\mathrm{const}$) уравнения (2.4), (2.5) определяют равновесную свободную поверхность в поле сил тяжести [9].

Невязкое течение вне пограничных слоев определяется путем решения краевой задачи

$$(\mathbf{v}_1,\nabla)\mathbf{v}_1=-\nabla p_1,\ \operatorname{div}\mathbf{v}_1=0$$

$$\mathbf{v}_1\mathbf{n}_0|_{\Gamma_0}=H_{\xi 1}|_{\xi=\infty},\ \mathbf{v}_1=0\ \ (x^2+y^2+z^2=\infty)$$

3. Построим автомодельные решения задачи (2.1) о течении в пограничном слое вблизи критической точки в осесимметричном случае. Отметим, что в плоском случае автомодельные решения найдены в [3]. Пусть коэффициент поверхностного натяжения зависит от координаты φ по степенно́му закону $\partial\sigma/\partial\varphi=-a\varphi^n$, где φ – длина дуги, отсчитываемая вдоль Γ от оси симметрии. Полагаем $h_{\theta 0}=0$, $\partial h_{\varphi 0}/\partial\theta=0$, $g_\theta=r(\varphi)$, $g_\varphi=1$ в (2.1), r – расстояние до оси симметрии. Рассмотрим случай $r=r_0\varphi$. Введем функцию тока Ψ по формулам $h_{\varphi 0}=\partial\Psi/\partial s$, $H_{\xi 1}=-r^{-1}\partial(r\psi)/\partial\varphi$ и обозначим $\eta_1=s\varphi^{(n-1)/3}$. Представляя ψ в виде $\psi=\varphi^{(n+2)/3}F_1(\eta_1)$, для функции $F_1(\eta_1)$ выводим краевую задачу (начальный профиль задавать не надо, так как он определяется условием автомодельности)

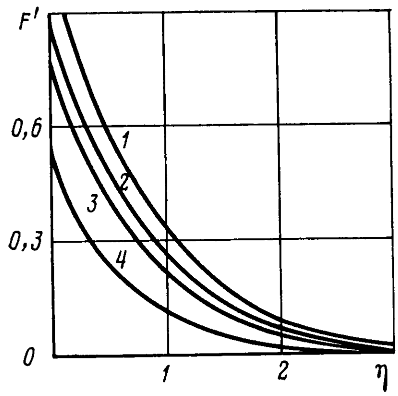
$$F_1'''+\frac{n+5}{3}F_1F_1''-\frac{2n+1}{3}F_1'^2=0 \tag{3.1}$$

$$F_1(0)=F_1'(\infty)=0,\ F_1''(0)=-a$$

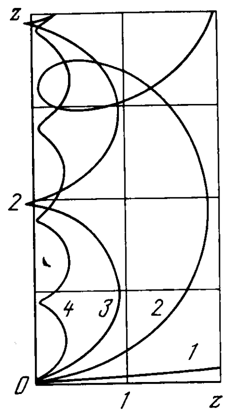
Интегрируя (3.1) на полуоси $(0,\infty)$, легко показать, что $a(n+2)>0$. Задача (3.1) имеет при $n=4$, $a>0$ точное экспоненциальное решение, а при $n=-5$, $a<0$ – степенно́е

$$F_1={}^1/_3\sqrt[3]{3a}\,[1-\exp(-\sqrt[3]{3a}\,\eta_1)]$$

$$F_1=2\sqrt[3]{0{,}25a}\,\eta_1/(\eta_1+\sqrt[3]{-4/a})$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Численные решения задачи (3.1) приведены на фиг. 1 для $F_1'=a^{1/3}F'(\eta)$, $\eta=a^{1/3}\eta_1$. Кривые *1–4* соответствуют значениям $n=0$, 1, 2, 10. Функция $F'(\eta)$ монотонно убывает, а $F(\eta)$ монотонно возрастает с ростом η и стремится к конечному пределу. При $n=1$ приведем значения $F'(0)=0{,}8987$ и $F(\infty)=0{,}7124$. Приведем точное решение $F_1=2k\,\mathrm{th}(k\eta_1)$, $k=\mathrm{const}$, при $n=-2$, $a=0$. Это решение соответствует точечному распределению температуры $T=T_*=\mathrm{const}$ при $\varphi>0$ и $T\neq T_*$ при $\varphi=0$.

4. *Форма пузыря в неоднородной жидкости.* Рассмотрим осесимметричную задачу о расчете формы газового пузыря, примыкающего к твердой горизонтальной стенке. Теперь асимптотический метод применяется к вязкой теплопроводной жидкости. Используются уравнения движения в приближении Буссинеска [9], которые получаются заменой $\mathbf{g}$ в уравнениях (1.1) на $-\mathbf{g}\alpha T$ (α — коэффициент теплового расширения) и присоединением уравнения теплопроводности

$$\mathbf{v}\nabla T=\chi\Delta T \tag{4.1}$$

где χ — коэффициент температуропроводности. Считаем, что внутри пузыря находится теплопроводный газ, движением которого пренебрегаем. Тогда из приближения Буссинеска при $\mathbf{v}=0$ следует $p=p(z)$, $T=T_1(z)$, а из (4.1) находим, что температура газа линейно изменяется с высотой $T_1=A_1z+B_1$. Асимптотические разложения, определяющие поле скоростей и давление в жидкости, строятся по формулам (1.3). В аналогичный ряд по степеням ε разлагается и температура. На бесконечности жидкость покоится и задан постоянный градиент температуры $\nabla T_\infty=A\mathbf{e}_z$. При заданном тепловом потоке на твердой стенке q константа A_1 легко определяется: $A_1=q/\lambda_1$ (λ_1 — коэффициент теплопроводности газа), а при заданной температуре стенки для определения A_1 решается уравнение (4.1).

Изучим влияние термокапиллярных сил на форму пузыря, пренебрегая силами плавучести в пограничном слое и изменением давления в газе, вызванным неоднородностью температуры. Это выполняется при условиях $\varepsilon^4G\ll1$ и $\rho_1\alpha_1AL\ll\rho_2$, где $G=g\alpha_2AL^2/\nu$ — число Грасгофа; ρ_1, α_1 — средняя плотность и коэффициент теплового расширения в газе, а ρ_2, α_2 — в жидкости. Тогда поле скоростей и давления в пограничном слое определяются из (2.1), (2.2), а граница пузыря удовлетворяет (2.5). Теперь, подставляя соотношение $T_1=A_1z+B_1$ в формулу, выражающую линейную зависимость σ от температуры, и принимая A_1 за масштаб градиента температуры, выводим формулу для безразмерного коэффициента поверхностного натяжения $\sigma=1+\lambda z$.

Далее рассматривается влияние параметра λ на форму пузыря. Легко показать, что $f_0(s)=0$ в (2.5). Обозначим через φ длину дуги Γ в осевом сечении. Полагаем в (2.5) $\varphi_0=0$, т. е. сечение $\varphi=\varphi_0$ в пограничном слое выбираем на оси симметрии, совпадающей с осью z. При $\varphi\to 0$ параметрические уравнения свободной границы представим в виде разложений по степеням φ [9] $z=0{,}25\ c\varphi^2+\ldots$, $r=r_0\varphi+\ldots$ (r, z — цилиндрические координаты), тогда $\partial\sigma/\partial\varphi=0{,}5\lambda c\varphi+\ldots$ Решение уравнения пограничного слоя также разлагаем в ряд $\psi=\varphi F_1(s)+\varphi^2 F_2(s)+\ldots$ Функция $F_1(s)$ удовлетворяет уравнению (3.1) при $n=1$, график $F_1'(s)$ приведен на фиг. 1 (кривая *2*). Функции F_2, ... определяются из линейных краевых задач. Итак, $f_0=[\partial\psi/\partial s]_{\varphi=0}=0$. Теперь уравнение свободной границы (2.5) для $z=\zeta_0(r)$ в цилиндрических координатах запишем в безразмерном виде со следующими краевыми условиями:

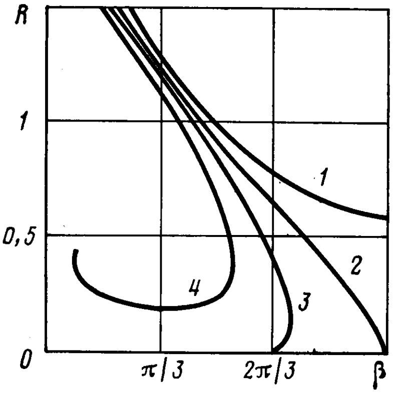
$$\frac{\zeta_0''}{(1+\zeta_0'^2)^{3/2}}\left(1+2\lambda\zeta_0-\frac{\lambda}{r}\int\limits_0^r\zeta_0\,dr\right)+\frac{(1+\lambda\zeta_0)\zeta_0'}{r\sqrt{1+\zeta_0'^2}}=\zeta_0 B+c \qquad (4.2)$$

$$\zeta_0'(0)=0,\quad \zeta_0(R)=0,\quad \zeta_0'(R)=-\operatorname{tg}\beta$$

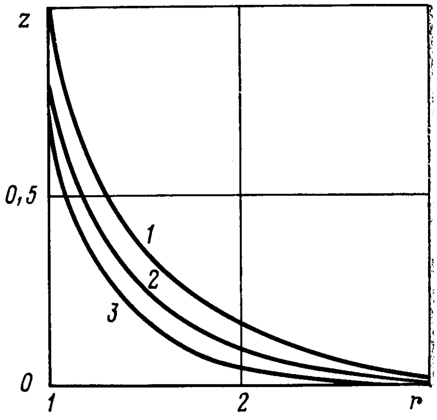
Здесь R — радиус основания пузыря, β — угол контакта газа с твердой стенкой, $B=\rho_2 gL^2/\sigma_0$ — число Бонда. При численном интегрировании уравнение (4.2) записывалось в параметрической форме с длиной дуги в качестве параметра. Вблизи оси симметрии численное решение сопрягалось с приведенными выше степенными рядами для $r(\varphi)$, $z(\varphi)$. Безразмерный объем пузыря полагался равным единице. Задавались угол контакта β и число Бонда. Капиллярная константа λ изменялась как параметр, а определялись константа c и радиус основания пузыря R. На фиг. 2 изображены интегральные кривые уравнения (4.2) при $B=0{,}1$ и $\lambda=0{,}03$. Кривые *1–4* соответствуют значениям $c=0{,}1$; 1; 2,19757; 5. При $c=0{,}1$ и 1 кривые *1–2* имеют типичный вид интегральных кривых равновесной свободной границы при отсутствии нагрева ($\lambda=0$) для положительных перегрузок $g>0$, а кривая *4* — для отрицательных перегрузок $g<0$ [9]. При $c=c_*=2{,}1975$ интегральные кривые пересекают ось z, чего не наблюдается при $\lambda=0$. Для этих значений c_* радиус основания пузыря обращается в нуль, и замкнутый пузырь, отрываясь от стенки, находится в равновесии под действием термокапиллярных и гравитационных сил. Воздействие термокапиллярных сил больше гравитационных при $c>c_*$ и меньше при $c<c_*$.

Типичные графики зависимости радиуса основания пузыря от угла контакта изображены на фиг. 3. Численные расчеты проводились при $0<B\leqslant 1$. Каждой кривой соответствует $\lambda=\text{const}$, $B=\text{const}$, а параметр c увеличивается с ростом β. Нулевому градиенту температуры вдоль свободной границы ($\lambda=0$) соответствует кривая *1*. При $0\leqslant\lambda<\lambda_1$ радиус основания пузыря больше нуля для всех β и при фиксированном β убывает с ростом λ. Значению $\lambda=\lambda_1$ соответствует кривая *2*, на которой в точке $\beta=\pi$ радиус R обращается в нуль. При $\lambda_1<\lambda\leqslant\lambda_2$ радиус основания пузыря также обращается в нуль для соответствующих $c=c_*(\lambda)$. Типичный график $R(\beta)$ для таких λ изображает кривая *3*. Отметим, что $\beta=\pi/2$ при $R=0$ и $\lambda=\lambda_2$. При $c=c_*$ свободная поверхность замкнута, имеет угловую точку с величиной угла $2\beta-\pi$, а газовый пузырь не касается стенки и находится в равновесии. При $\lambda=\lambda_1$, $c=c_*$ поверхность пузыря близка к сфере, сплюснутой вдоль оси вращения. Меридиональное сечение этой сферы при $B=0{,}1$ близко к интегральной кривой *3* на фиг. 2 ($0\leqslant z\leqslant 1{,}87$).

При $\lambda>\lambda_2$ кривая *4* (фиг. 3) изображает характерный вид кривых $R(\beta)$, которые не пересекают координатную ось β. Для этих λ радиус основания пузыря не обращается в нуль, а при $\lambda>\lambda_1$ существует максимальное значение угла контакта $\beta_*<\pi$, например $\beta_*=169°$ при $\lambda=0{,}03$ и $B=0{,}1$. Приведем численные значения параметров $\lambda_1=0{,}022$; $\lambda_2=0{,}047$; $c_*(\lambda_1)=2{,}197$ при $B=0{,}1$. Отметим, что при заданном β свободная граница вытягивается вдоль оси вращения при увеличении λ и c.



Фиг. 3



Фиг. 4

В (4.2) не входят функции пограничного слоя, проявляющие себя в D_1 — окрестности линии контакта свободной границы и твердой стенки. В D_1 асимптотические разложения носят более сложный характер, чем (1.3). Уравнения пограничного слоя в этой области совпадают с полными уравнениями Навье — Стокса. Функции пограничного слоя дают вклад в уравнение свободной границы лишь в высших приближениях и потому здесь не приводятся. Асимптотическое исследование системы Навье — Стокса вблизи линии контакта проведено в [10].

Форма капиллярного мениска при неравномерном нагреве свободной поверхности. Рассмотрим случай, когда жидкость заполняет безграничную область вне цилиндра радиуса R и ограничена свободной поверхностью Г, образующей в точке контакта с цилиндром угол смачивания $\pi/2-\beta$. Распределение температуры вдоль свободной границы считаем заданным, поэтому функция $\sigma(\varphi)$ известна (φ — длина дуги Г, отсчитываемая от стенки). Рассмотрим осесимметричный случай. Свободная граница Γ_0 удовлетворяет уравнению (2.5). Предположим, что градиент температуры отрицателен, тогда $\partial\sigma/\partial\varphi>0$, а система пограничного слоя (2.1) имеет автомодельное решение в окрестности $\varphi=0$ [3], из которого следует, что $f_0(s)=0$. Уравнение (2.5) численно интегрировалось при $B=1$, $\beta=\pi/3$ и кусочно-линейном распределении температуры $T-T_*=-\lambda\varphi$ $(0\leqslant\varphi\leqslant1)$, $T-T_*=-\lambda(\varphi>1)$. Радиус цилиндра принят за масштаб длины. На фиг. 4 приведены результаты расчетов формы свободной границы в цилиндрических координатах. Кривые *1–3* соответствуют значениям $\lambda=1$; 0,5; 0. С ростом λ свободная граница смещается вверх. Кривая $\lambda=0$ соответствует равновесной свободной границе капиллярной жидкости [9] при отсутствии градиента температуры. Численное исследование зависимости высоты мениска $H=\zeta_0(0)$ от угла контакта $\pi/2-\beta$ и капиллярной константы λ показало, что высота H увеличивается с ростом параметров β и λ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Батищев В. А.* Асимптотика осесимметричных течений жидкости со свободной границей при исчезающей вязкости // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1975. № 3. С. 101–109.
2. *Napolitano L. G.* Marangoni boundary layers // Proc. III European Symp. on Material Sci. in Space. Grenoble, 1979. P. 313–315.
3. *Napolitano L. G., Golia C.* Coupled Marangoni boundary layers: Appl. Space Develop. Select. pap. 31st Intern. Astronaut. Congress. Tokyo, 22–27. September, 1980 // Acta Astronautica. 1981. V. 8. № 5–6. P. 417–434.
4. *Cowley S. J., Davis H.* Viscous thermocapillary convection at high Marangoni number // J. Fluid Mech. 1983. V. 135. P. 175–188.

5. *Puhnachov V. V.* Boundary layers near free surfaces // Computational and asymptotic methods for boundary and interior layers. Dublin: Bool Press, 1982. P. 97–110.
6. *Кузнецов В. В.* О существовании пограничного слоя вблизи свободной поверхности // Математические проблемы мех. сплошных сред. Динамика сплошной среды. Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1984. Вып. 67. С. 68–75.
7. *Батищев В. А.* Об асимптотике течений маловязкой жидкости при действии касательных напряжений на свободной границе. // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1987. № 5. С. 101–107.
8. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12. № 5 (77). С. 3–122.
9. *Бабский В. Г., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д. и др.* Гидромеханика невесомости/Под ред. Мышкиса А. Д. М.: Наука, 1976. 504 с.
10. *Moffatt H. K.* Viscous and resistive eddies near a sharp corner // J. Fluid Mech. 1964. V. 18. № 1. P. 1–18.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
22.III.1988