

УДК 532.5+536.25

ВЛИЯНИЕ ПРОНИЦАЕМОЙ ПЕРЕГОРОДКИ НА КОНВЕКТИВНУЮ УСТОЙЧИВОСТЬ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПОЛОСТИ

БИРИХ Р. В., РУДАКОВ Р. Н.

Исследована устойчивость равновесия подогреваемой снизу жидкости в прямоугольной полости с вертикальной проницаемой перегородкой. Задача о малых возмущениях решалась методом Галеркина – Канторовича. Полученные зависимости критических чисел Рэлея от параметров перегородки и размеров полости позволили выделить области, в которых ответственными за кризис равновесия являются либо четные, либо нечетные возмущения, чувствительные соответственно только к нормальному или касательному сопротивлению перегородки. Влияние проницаемой перегородки на конвективную устойчивость равновесия горизонтального слоя жидкости при различных условиях его подогрева рассматривалось в [1–3], где была установлена существенная зависимость критических чисел Рэлея от свойств перегородки.

1. Рассмотрим условия возникновения конвекции в прямоугольной области ($|x| \leq L$, $|y| \leq 1$), в середине которой ($x=0$) расположена вертикальная проницаемая перегородка. При подогреве жидкости снизу возможно механическое равновесие с линейным распределением температуры по вертикали.

Устойчивость равновесия будем исследовать относительно возмущений монотонного вида, поскольку именно такая неустойчивость имеет место в случае отсутствия перегородки [4]. Нейтральные возмущения функции тока Ψ и температуры T удовлетворяют уравнениям

$$\Delta \Delta \Psi - \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \Delta T - R \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0 \quad (1.1)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

где R – число Рэлея, определенное через половину высоты полости и равновесный градиент температуры.

Границы области будем считать твердыми, вертикальные границы – теплоизолированными, горизонтальные – изотермическими. Граничные условия для возмущений, удовлетворяющие этим требованиям, имеют вид

$$x = \pm L: \quad \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (1.2)$$

$$y = \pm 1: \quad \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = T = 0 \quad (1.3)$$

Проницаемая перегородка представляет собой мелкозернистую границу, на которой можно сформулировать однородные вдоль перегородки граничные условия, так как на крупномасштабные движения в полости должны влиять только некоторые осредненные характеристики перегородки. Математическое обоснование предельного перехода к задаче с однородной границей дано в [5]. Сформулируем граничные условия на перегородке, соответствующие [5], исходя из простых физических соображений.

На проницаемой перегородке предполагаем непрерывность обеих компонент скорости, температуры и теплового потока

$$x=0: \quad \Psi^+ = \Psi^-, \quad \frac{\partial \Psi^+}{\partial x} = \frac{\partial \Psi^-}{\partial x}, \quad T^+ = T^-, \quad \frac{\partial T^+}{\partial x} = \frac{\partial T^-}{\partial x} \quad (1.4)$$

Знаками плюс и минус отмечены соответственно функции справа и слева от перегородки. Оправданием такой постановки граничных условий для скорости может служить то, что на твердых участках перегородки скорость обращается в нуль, а на прозрачных она непрерывна.

Система уравнений (1.1) требует еще двух условий на функцию тока. Эти условия должны определить влияние характеристик перегородки на амплитуду скорости течения жидкости в окрестности перегородки. Характер обтекания жидкостью элементов перегородки будем считать стоковым, а нормальную компоненту скорости пропорциональной перепаду давления на ней

$$x=0: \quad p^+ - p^- = -\alpha_n v_x$$

Исключая давление с помощью y -проекции уравнения Навье — Стокса, с учетом (1.4) получим

$$\frac{\partial^3 \Psi^+}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 \Psi^-}{\partial x^3} = \alpha_n \frac{\partial^2 \Psi^+}{\partial y^2} \quad (1.5)$$

Соответственно касательную компоненту скорости v_y будем предполагать пропорциональной сумме тангенциальных вязких напряжений с обеих сторон перегородки

$$\frac{\partial^2 \Psi^+}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi^-}{\partial x^2} = \alpha_\tau \frac{\partial \Psi^+}{\partial x} \quad (1.6)$$

Коэффициенты α_n и α_τ по смыслу являются нормальным и касательным сопротивлениями перегородки. За единицу их измерения принято отношение динамической вязкости жидкости к половине высоты полости.

Краевая задача (1.4) — (1.6) определяет критические числа Рэлея и форму критических движений.

2. Для решения задачи применяется метод Галеркина — Канторовича. Поскольку основные моды неустойчивости имеют по вертикали максимальный размер и зависимость искомых функций от вертикальной координаты ожидается несложной, функцию тока и температуру представим в виде

$$\Psi = \psi(x) \varphi(y), \quad \varphi = (1-y^2)^2 \quad (2.1)$$

$$T = \theta(x) \tau(y), \quad \tau = 1-y^2 \quad (2.2)$$

Так выбранные функции $\varphi(y)$ и $\tau(y)$ обеспечивают выполнение условий (1.3). Уравнения для функций $\psi(x)$ и $\theta(x)$ получаются подстановкой (2.1), (2.2) в уравнения (1.1), умножением их соответственно на φ и τ и интегрированием по y от -1 до 1

$$\psi^{IV} + 2a_1 \psi'' + a_2 \psi - a_3 \theta' = 0 \quad (2.3)$$

$$\theta'' + b_1 \theta - b_2 R \psi' = 0$$

$$a_1 = -3, \quad a_2 = 31,5, \quad a_3 = 1,125, \quad b_1 = -2,5, \quad b_2 = 6/7.$$

Здесь и далее штрих означает дифференцирование по x .

Особенностью задачи является применение процедуры Галеркина и к граничному условию (1.5). В результате получим

$$x=0: \quad \frac{d^3 \psi^+}{dx^3} - \frac{d^3 \psi^-}{dx^3} = a_1 \alpha_n \psi^+ \quad (2.4)$$

Остальные условия на вертикальных границах имеют вид

$$\begin{aligned}
 x = \pm L: \quad \psi = \psi' = \theta' = 0 & \quad (2.5) \\
 x = 0: \quad \psi^+ = \psi^-, \quad \frac{d\psi^+}{dx} = \frac{d\psi^-}{dx} \\
 \theta^+ = \theta^-, \quad \frac{d\theta^+}{dx} = \frac{d\theta^-}{dx} \\
 \frac{d^2\psi^+}{dx^2} - \frac{d^2\psi^-}{dx^2} = \alpha_\tau \frac{d\psi^+}{dx} & \quad (2.6)
 \end{aligned}$$

Свойства четности дифференциальных операторов в (2.3) и симметрия граничных условий при $x = \pm L$ приводит к распаду возможных решений краевой задачи (2.3)–(2.6) на четные и нечетные решения. Четным будем называть решение, для которого $\psi(-x) = \psi(x)$ и $\theta(-x) = -\theta(x)$, а в нечетном решении $\psi(-x) = -\psi(x)$ и $\theta(-x) = \theta(x)$. Форма критического движения будет представляться или четным, или нечетным решением, тем, для которого значение числа Рэлея, соответствующее нейтральной устойчивости, оказывается меньшим. Это свойство задачи (2.3)–(2.6) важно для интерпретации результатов расчета. Кроме того, построение решений определенной четности позволяет сократить область интегрирования уравнений (2.3) в 2 раза.

Переформулируем граничные условия (2.4) и (2.6) с учетом свойств четности решений. Условия непрерывности для четных функций в точке $x=0$ выполняются автоматически, а условия на перегородке определяют скачки нечетных функций на ней. Значения нечетных функций при $x=+0$ естественно принять равными половине скачка этих функций на перегородке.

В четном решении нечетными функциями являются ψ' , ψ''' и θ . Для них условия (2.4) и (2.6) дают

$$x = -0: \quad \psi' = 0, \quad \psi''' = -1/2 a_1 \alpha_n \psi, \quad \theta = 0 \quad (2.7)$$

В нечетном решении нечетными функциями являются ψ , ψ'' и θ' . Из условий (2.6) для них следует

$$x = -0: \quad \psi = 0, \quad \psi'' = -1/2 \alpha_\tau \psi', \quad \theta' = 0 \quad (2.8)$$

Решения краевых задач (2.3), (2.5), (2.7) и (2.3), (2.5), (2.8) вместе представляют всю совокупность решений задачи (2.3)–(2.6). Спектр критических чисел Рэлея последней задачи получается объединением спектров четных и нечетных решений.

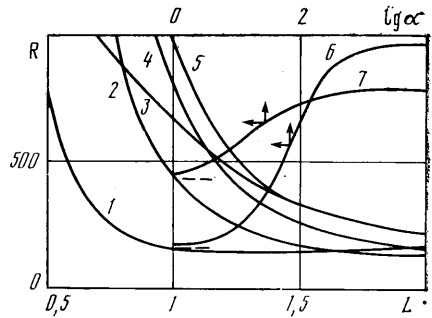
Как следует из граничных условий (2.7), четные решения зависят только от нормального сопротивления перегородки (вертикальная компонента скорости на перегородке обращается в нуль и жидкость перетекает через нее по нормали). Нечетное решение чувствительно только к касательному сопротивлению (нормальная компонента скорости на перегородке равна нулю).

Таким образом, сформулированная задача об устойчивости равновесия показывает, что в полости с симметрично расположенной перегородкой кризис равновесия жидкости связан с возмущениями определенной четности, а критическое число Рэлея зависит только от одного из коэффициентов сопротивления.

Уравнения (2.3) интегрировались методом Рунге – Кутта. Строились три линейно независимые решения, удовлетворяющие условиям (2.5) при $x = -L$. Граничные условия (2.7) или (2.8) определяли характеристическое уравнение для числа Рэлея и амплитуды базисных решений.

3. Обсудим результаты расчетов. На фиг. 1 приведена зависимость критических чисел Рэлея от горизонтального размера полости L для двух

наиболее опасных мод возмущений. Кривыми 1, 3, 5 представлено четное решение с величинами нормального сопротивления $\alpha_n=0, 100, \infty$ соответственно. Нечетное решение дает зависимости, представленные кривыми 2 и 4 ($\alpha_\tau=0$ и ∞). В случае отсутствия перегородки ($\alpha_n=\alpha_\tau=0$) ответственными за кризис равновесия являются нечетные возмущения в полостях, вытянутых по горизонтали ($L>1,64$), и четные — при $L<1,64$. При большом сопротивлении перегородки ($\alpha_n, \alpha_\tau \rightarrow \infty$) более опасным при всех L является нечетное возмущение (кривая 4 лежит ниже кривой 5). Последнее связано с тем, что в четном движении имеет место неблагоприятное тепловое взаимодействие вихрей, расположенных по разные стороны от перегородки.



Фиг. 1

Детальный переход от малого сопротивления перегородки к большому рассмотрим на примере квадратной полости ($L=1$). Как указывалось выше, критическое число Рэлея для четного возмущения зависит только от нормального сопротивления, а для нечетного — от касательного. Эти зависимости представлены на фиг. 1 соответственно кривыми 6 и 7.

При малых сопротивлениях перегородки более опасна четная мода возмущений. Кризис равновесия относительно этой моды при $\alpha_n=0$ наступает при $R=166$. Это согласуется с [4], где в принятых единицах $R=162$. Некоторое отличие связано с недостаточно хорошей аппроксимацией по вертикали в данном решении.

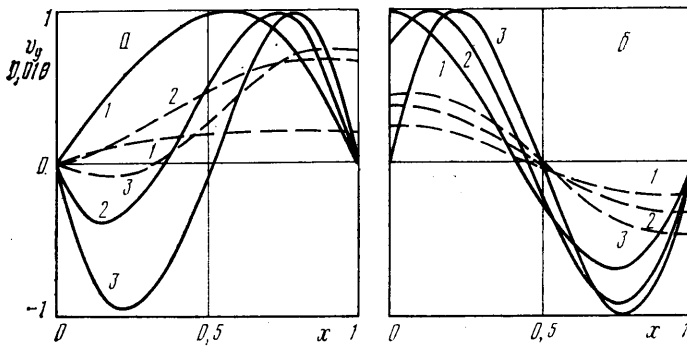
В нечетном решении при $\alpha_\tau=0$ критическое число существенно выше: $R=436$. С ростом сопротивления перегородки устойчивость по отношению к обоим модам монотонно растет. Более сильной является зависимость $R(\alpha_n)$; начиная с $\alpha_n=145$, ответственными за кризис равновесия становятся нечетные возмущения. В предельном случае непроницаемой перегородки нечетной моде соответствует $R=783$, четной — $R=965$.

Характер описанных зависимостей объясняется изменениями в форме критических возмущений, которые происходят с ростом сопротивления перегородки. Изменения, происходящие в четном решении, иллюстрирует фиг. 2, а ($1-\beta-\alpha_n=0; 81; \infty$), в нечетном — фиг. 2, б ($1-\beta-\alpha_\tau=0; 9; \infty$), на которых для среднего горизонтального сечения ($y=0$) представлены распределения вертикальной компоненты скорости v_y (сплошные линии) и температуры θ (штриховые линии). В соответствии со свойствами четности решений линии фиг. 2, а в область отрицательных x должны продолжаться нечетно, а линии фиг. 2, б — четно.

В четном решении при малых сопротивлениях перегородки движение охватывает всю область. С ростом сопротивления на фоне глобального движения в каждой половине полости развиваются вихри одного знака (фиг. 2, а, кривая 2). Одновременно уменьшается горизонтальный градиент температуры в центре области, который при $\alpha_n=200$ меняет знак.

Для нечетного решения при $\alpha_\tau=0$ жидкость поднимается в центре области и опускается у границ. При касательном сопротивлении, отличном от нуля, перегородка тормозит движение жидкости и на перегородке для вертикальной компоненты скорости образуется локальный минимум. При больших сопротивлениях (кривая 3 на фиг. 2, б) полость разделяется на две части, которые из-за отсутствия горизонтального градиента на перегородке не взаимодействуют.

Отметим, что остающееся тепловое взаимодействие вихрей через непроницаемую перегородку для четного решения ослабляет движение



Фиг. 2

вблизи перегородки и ведет к повышению критического числа Рэлея по сравнению с нечетной модой в этом предельном случае.

Проведенное исследование устойчивости равновесия в полости с вертикальной проницаемой перегородкой показывает, что в экспериментах по кризису равновесия с помощью кривых 6, 7 на фиг. 1 можно определить нормальное или касательное сопротивление перегородки. Если неустойчивость связана с четным движением, то определяется α_n , в другом случае — α_τ .

Рассмотренный механизм стабилизации равновесия с помощью тонких проницаемых перегородок может быть полезен для подавления конвекции в условиях малой гравитации, особенно в химически неоднородных средах, так как сетки с высокой прозрачностью практически не влияют на процессы молекулярного переноса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бирих Р. В., Рудаков Р. Н. Влияние проницаемой перегородки на конвективную неустойчивость горизонтального слоя жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1977. № 1. С. 157–159.
2. Бирих Р. В., Корягина Н. Г., Рудаков Р. Н. Конвективная неустойчивость жидкости с тепловыделяющей проницаемой перегородкой // Конвективные течения. Пермь, 1983. С. 32–36.
3. Бирих Р. В., Рудаков Р. Н. Конвективная неустойчивость горизонтального слоя жидкости между проницаемыми перегородками // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 4. С. 171–173.
4. Гершуни Г. З., Жужовицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
5. Марченко В. А., Хруслов Е. Я. Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. Киев: Наук. думка, 1974. 280 с.

Пермь

Поступила в редакцию
18.XI.1987