

УДК 532.526

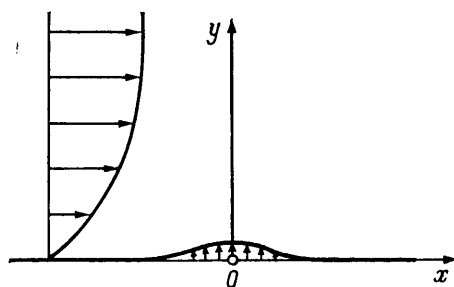
ФОРМИРОВАНИЕ ВОЛНОВОГО ПАКЕТА В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ИМПУЛЬСНОГО КОЛЕБАНИЯ СТЕНКИ

МАНУЙЛОВИЧ С. В.

Колебания поверхности обтекаемого тела оказывают большое (в ряде случаев — определяющее) влияние на процесс перехода ламинарного пограничного слоя в турбулентный. Согласно современным представлениям [1], механизм разрушения ламинарного течения под действием вибрации стенки состоит в генерации и последующем росте вниз по потоку собственных колебаний пограничного слоя — волн Толлмина — Шлихтинга. В первых теоретических работах [2, 3], посвященных этому вопросу, изучалась задача о возбуждении волны Толлмина — Шлихтинга вибратором — узкой полоской обтекаемой поверхности, совершающей гармонические колебания. Впоследствии в [4, 5] было проведено подробное исследование волнового пакета, генерируемого во время запуска вибратора; в этих работах число Рейнольдса предполагалось бесконечно большим, а характерная частота колебаний соответствовала окрестности нижней ветви нейтральной кривой. Как показал анализ [6, 7], перенесение результатов асимптотической теории устойчивости на случай конечных чисел Рейнольдса дает лишь качественную картину возмущенного движения.

В настоящей работе изучается формирование пакета волн Толлмина — Шлихтинга, возбуждаемого импульсным движением локализованного участка обтекаемой поверхности. Решение сформулированной смешанной задачи для линеаризованной системы уравнений Навье — Стокса строится методом Фурье в предположении параллельности основного течения. Исследована начальная стадия возмущенного движения.

1. Постановка задачи. Будем изучать нестационарные возмущения ламинарного пограничного слоя на плоской полубесконечной пластине, обтекаемой равномерным потоком вязкой несжимаемой жидкости под нулевым углом атаки. Введем декартову систему координат с началом в точке O , расположенной на пластине на расстоянии L от носка, осью x , параллельной вектору скорости набегающего потока, и осью y , перпендикулярной поверхности пластины (фиг. 1). Все величины в дальнейшем будем считать безразмерными, используя в качестве основных единиц плотность жидкости ρ , скорость набегающего потока U_∞ и характерный размер $l = (\nu L / U_\infty)^{1/2} / \tau$ (ν — коэффициент кинематической вязкости, $\tau = 0,332 \dots$). Профиль скорости невозмущенного течения в точке O обозначим $U(y)$; число Рейнольдса $R = U_\infty l / \nu$.



Фиг. 1

Предположим, что в моменты времени $t < 0$ течение невозмущенное, а при $t > 0$ возмущения порождаются колебанием стенки, точки которой перемещаются в вертикальном направлении по закону

$$y_w = \varepsilon f(t, x), \quad \varepsilon \ll 1 \quad (1.1)$$

Задачу формирования возмущений будем решать в предположении

параллельности основного течения, поэтому в дальнейшем будем считать, что функция f заметно отлична от нуля лишь при $|x| \ll L$ (хотя при этом рассматриваемая область течения содержит точки $|x| \gg 1$).

Обозначим через $\epsilon q(t, x, y)$ возмущения компонент вектора скорости и давления ($q = v_x, v_y, p$). Функции q удовлетворяют линейной системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + U \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{dU}{dy} v_y + \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{1}{R} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + U \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

По сравнению с полной системой линеаризованных уравнений Навье — Стокса в системе (1.2) опущены члены, обусловленные непараллельностью основного течения, а также члены, младшие по сравнению с последними [8]; в связи с этим в (1.2) сохранен лишь старший диссипативный член. Краевые условия при $y=0$ следуют из условий прилипания, записанных для стенки (1.1)

$$v_x(t, x, 0) = -f(t, x), \quad v_y(t, x, 0) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \quad (1.3)$$

При $x \rightarrow \pm\infty$ и при $y \rightarrow \infty$ решение системы (1.2) будем подчинять условиям затухания $q \rightarrow 0$.

Преобразование сформулированной смешанной задачи будем искать в виде преобразования Фурье — Лапласа по переменным x, t

$$\begin{aligned} q &= \int_{-\infty+i\sigma}^{+\infty+i\sigma} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(\omega, k) q^*(y; \omega, k) \exp(ikx - i\omega t) dk \\ f^* &= (2\pi)^{-2} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, x) \exp(-ikx + i\omega t) dt dx \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь образы искомых функций ради удобства нормированы на величину f^* ; величина вещественной постоянной σ выбирается такой, чтобы контур интегрирования по ω лежал выше всех полюсов подынтегрального выражения. С помощью преобразования (1.4) система уравнений в частных производных (1.2) для возмущений q сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для образов q^* . Введем новую неизвестную функцию $\varphi(y; \omega, k)$, положив $v_y^* = -ik\varphi$. В результате задача расчета функций q^* приводится к неоднородной краевой задаче для уравнения типа Орра — Зоммерфельда

$$\left(U - \frac{\omega}{k} \right) \left(\frac{d^2 \varphi}{dy^2} - k^2 \varphi \right) - \frac{d^2 U}{dy^2} \varphi = \frac{1}{ikR} \frac{d^4 \varphi}{dy^4} \quad (1.5)$$

$$\varphi(0) = \frac{\omega}{k}, \quad \frac{d\varphi}{dy}(0) = -1, \quad \varphi(\infty) = 0$$

Первые два краевых условия (1.5) следуют из условий (1.3); последнее условие (1.5) является следствием затухания возмущений при $y \rightarrow \infty$: оно исключает из решения два экспоненциально растущих линейно независимых интеграла. Затухание возмущений течения при $|x| \rightarrow \infty$ обеспечивается самим применением преобразования (1.4) к решению сформулированной смешанной задачи.

Остановимся на вопросе о корректности рассматриваемой постановки. Как и в случае задачи о гармоническом вибраторе в пограничном слое

несжимаемой жидкости [9], функция p^* имеет особенность вида $|k|^{-4}$ при $k \rightarrow 0$, поэтому интеграл Фурье для возмущения давления вообще говоря, расходится, а функция p ведет себя при $x \rightarrow \pm\infty$ как $\ln|x|$ (т. е. не удовлетворяет условию затухания). Эта некорректность является следствием предположения о несжимаемости жидкости. Действительно, движение участка обтекаемой поверхности в вертикальном направлении приводит к вытеснению жидкости, вследствие чего при $r = (x^2 + y^2)^{1/2} \rightarrow \infty$ разложение возмущенного потенциала Φ (вне области пограничного слоя) будет содержать член типа источника. Из интеграла Коши — Лагранжа имеем в первом приближении $p \sim -\partial\Phi/\partial t \sim -\pi^{-1} \ln r \partial Q/\partial t$, где $Q(t)$ — объемный расход источника. Вычисляя Q для заданного движения стенки (1.1), получим окончательно

$$p \sim -\frac{1}{\pi} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t, x) dx \sqrt{\ln \sqrt{x^2 + y^2}} \right]$$

При $x \rightarrow \pm\infty$ это разложение будет справедливо и внутри области пограничного слоя, в частности при $y=0$, так как при таких x внешнее возмущенное давление слабо меняется вдоль пластины (на расстояниях порядка толщины пограничного слоя).

Что касается функций $v_x, v_y, \partial p/\partial x, \partial p/\partial y$, то они удовлетворяют условиям затухания при $|x| \rightarrow \infty$ и могут быть определены из соотношений (1.4), (1.5). Отметим, что поставленная задача оказывается корректной и в отношении функции p , если движущийся участок пластины суммарно не вытесняет жидкость в каждый момент времени, т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t, x) dx = 0$$

В этом случае $f^*(\omega, 0) = 0$, поэтому интеграл Фурье для функции p является сходящимся и, следовательно, $p \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$.

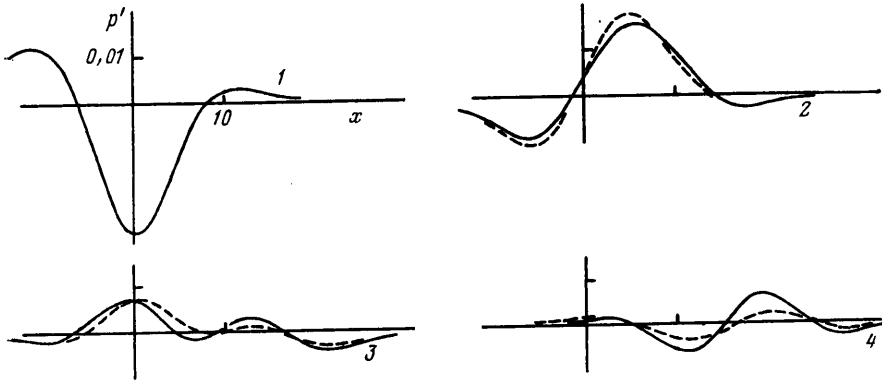
2. Метод и результаты расчета. Анализ возмущенного движения проведем на примере функции $p'(t, x) = \partial p(t, x, 0)/\partial x$ для движения стенки вида $f = f_0 = (ct/3)^3 \exp(-ct - ax^2 + 3)$; $c > 0, a > 0$. Такой выбор функции f продиктован соображениями непрерывности по t краевых условий для v_x и v_y при $y=0$ ($f_0 = \partial f_0/\partial t = 0$ при $t=0$). Он удобен также из-за гладкости функции f_0 , что обуславливает достаточно быстрое затухание ее образа f_0^* при $|k|, |\omega| \rightarrow \infty$ и в конечном счете приводит к хорошей сходимости интегралов (1.4). Рассматриваемый класс колебаний стенки удовлетворяет условию нормировки $\max f_0 = 1$.

С целью сокращения объема вычислений интеграл (1.4), выписанный для функции p' , приводился к виду

$$p' = \exp(\sigma t) \operatorname{Re} \left[\int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P'(\omega, k) \exp(ikx - i\omega t) d\omega dk \right] \quad (2.1)$$

$$P' = \frac{c^3}{9\pi\sqrt{\pi a R}} [\omega + i(c + \sigma)]^{-4} \exp\left(-\frac{k^2}{4a} + 3\right) \frac{d^3\Phi}{dy^3} (0; \omega + i\sigma, k)$$

Величина $P'(\omega, k)$ табулировалась в узлах неравномерной прямоугольной сетки, сгущающейся в местах резкого изменения P' (в рассматриваемых ниже примерах число узлов ~ 4000). Вычисление этой функции в каждом из узлов производилось следующим образом. По заданным параметрам $R, k, \omega' = \omega + i\sigma$ методом ортогонализации [10] рассчитывались два линейно независимых интеграла Φ_1, Φ_2 уравнения (1.5), затухающих при $y \rightarrow \infty$. Общее решение уравнения, удовлетворяющее последнему условию



Фиг. 2

(1.5), представлялось в виде $\varphi = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$. Коэффициенты c_1, c_2 однозначно определялись из первых двух условий (1.5). Одновременно вычислялась величина $d^3\varphi/dy^3$, входящая в последнее равенство (2.1) (она является одной из неизвестных функций при интегрировании уравнения (1.5) методом Рунге — Кутты), а вместе с ней и искомая величина P' .

Для расчета функции $p'(t, x)$ интеграл (2.1) заменялся суммой интегралов по прямоугольникам произведенного разбиения, причем на каждом прямоугольнике функция $P'(\omega, k)$ аппроксимировалась поверхностью гиперболического параболоида $\alpha + \beta\omega + \gamma k + \delta\omega k$ (обобщение кусочно-линейной аппроксимации для одномерного случая [9]). Величины комплексных постоянных $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ определялись из условия совпадения P' с аппроксимирующей функцией в вершинах прямоугольника. Такая аппроксимация позволяла вычислять каждый из входящих в сумму интегралов по точной формуле. Точность расчетов ($\sim 1\%$) контролировалась увеличением размеров ячеек в 2 раза и изменением размеров области интегрирования.

Следует заметить, что фиксирование разбиения при вычислении интеграла (2.1) накладывает ограничения на размер области изменения переменных t, x , в которой интеграл может быть рассчитан с заданной точностью. Для вычисления значений интеграла (2.1) при все больших значениях параметров t, x понадобилось бы производить все более мелкое разбиение области интегрирования, что привело бы к значительным вычислительным трудностям. Однако в этом нет необходимости: допущение о параллельности основного течения само ограничивает область изменения переменной x , поэтому в рассматриваемой постановке может быть исследована лишь начальная стадия формирования волнового пакета; дальнейшее его развитие вниз по течению может быть изучено только с помощью методов, описывающих эволюцию волн в слабонеоднородных потоках.

На фиг. 2 приведены результаты расчетов продольного градиента для моментов времени $t=5; 20; 30; 50$ (соответственно кривые 1–4). Штриховые линии соответствуют устойчивому ($R=500$), а сплошные — неустойчивому пограничному слою ($R=1500$): в выбранных единицах измерения число Рейнольдса потери устойчивости ~ 900 . Параметры $c=0,2$ и $a=0,02$ выбраны из условия совпадения характерных масштабов времени и длины для колебания (1.1) и волны Толлмина — Шлихтинга; в этом случае максимальное отклонение стенки достигается в момент $t=15$.

Как видно из приведенных кривых, в начале движения стенки возмущенное течение слабо зависит от числа R . Формирование волнового пакета завершается к моменту $t=50$, когда обтекаемая поверхность практически не отличается от плоской пластины. В этот момент уже отчетливо видно различие между случаями устойчивого и неустойчивого течений.

В заключение напомним, что приведенные результаты расчетов можно трактовать как решение корректной задачи о возбуждении колебаний в пограничном слое движением стенки вида $f = \partial f_0 / \partial x$. В этом случае под p' нужно подразумевать функцию $p(t, x, 0)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Ю. С., Козлов В. В., Левченко В. Я. Возникновение турбулентности в пограничном слое. Новосибирск: Наука, 1982. 152 с.
2. Терентьев Е. Д. Линейная задача о вибраторе в дозвуковом пограничном слое // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 6. С. 1049–1055.
3. Тумин А. М., Федоров А. В. Возбуждение волн неустойчивости локализованным вибратором в пограничном слое // ПМТФ. 1984. № 6. С. 65–72.
4. Рыжов О. С., Терентьев Е. Д. О переходном режиме, характеризующем запуск вибратора в дозвуковом пограничном слое на пластинке // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 6. С. 974–986.
5. Терентьев Е. Д. О формировании волнового пакета в пограничном слое на плоской пластине // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 5. С. 814–819.
6. Мануйлович С. В. О возбуждении волн Толлмина – Шлихтинга вибрирующим участком обтекаемой поверхности // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 4. С. 46–51.
7. Мануйлович С. В. Волны неустойчивости пространственного типа в пограничном слое при больших числах Рейнольдса // Уч. зап. ЦАГИ. 1987. Т. 18. № 5. С. 35–40.
8. Михайлов В. В. Об асимптотике нейтральных кривых линейной задачи устойчивости ламинарного пограничного слоя // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 5. С. 39–46.
9. Мануйлович С. В. Расчет колебаний, генерируемых вибратором в пограничном слое несжимаемой жидкости // Уч. зап. ЦАГИ. 1988. Т. 19. № 3. С. 18–25.
10. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1961. Т. 16. Вып. 3. С. 171–174.

Москва

Поступила в редакцию
14.X.1987