

УДК 532.522

ПРИНЦИП МАКСИМУМА РАСХОДА И АЭРОДИНАМИКА ВИХРЕВОЙ КАМЕРЫ

ГОЛЬДШТИК М. А., ЛЕБЕДЕВ А. В., ПРАВДИНА М. Х.

Показано, что принцип максимума расхода при фиксированной плотности кинетической энергии, применявшийся ранее для определения радиуса свободной поверхности при истечении несжимаемой жидкости из центробежной форсунки, допускает эквивалентную формулировку в рамках лагранжева формализма, что позволяет легко обобщить принцип на случай сжимаемого газа. Произведено сопоставление результатов расчетов с опытом.

Вихревая камера — распространенный многоцелевой аппарат, гидродинамика которого изучена достаточно подробно как в экспериментальном, так и в теоретическом плане. При использовании ее в качестве центробежной форсунки вблизи оси вращения возникает полость практически постоянного давления, радиус которой r_0 является основным параметром, определяющим такие характеристики, как пропускная способность, угол и тонина распыла.

Первый подход к определению r_0 заключался в использовании эвристического условия максимума расхода Q при заданных величинах полного напора H и циркуляции Γ . При выполнении этого условия скорость поступательного движения жидкости в точности равна скорости распространения длинных центробежных волн по ее поверхности [1–3].

В [4], где исследовался радиус полости на некотором удалении от камеры закручивания в присоединенной к выходному отверстию длинной трубе, было замечено, что в этой ситуации упомянутое условие дает завышенное по сравнению с опытом значение r_0 , что особенно сказывается при малых степенях закрутки. В [5] было предложено при максимизации Q фиксировать не H , а величину потока кинетической энергии T в выходном сечении, где

$$T = 2\pi \int_{r_0}^R \rho \left(\frac{v_z^2}{2} + \frac{v_\varphi^2}{2} \right) v_z r dr \quad (1)$$

или, что то же, минимизировать T при заданных Q и Γ . При этом скорость v_z оказалась меньше скорости поверхностных волн, что в терминах теории гидравлического прыжка характеризует надкритический режим течения [6].

Этот подход, тоже эвристический, давал значительно лучшее согласие с опытами по измерению r_0 . Известна попытка доказать условие минимума кинетической энергии для закрученных потоков в длинных трубах на основе классического принципа виртуальных перемещений [7, 8]. Однако применение этого принципа допустимо только к так называемым механическим системам, для которых, по определению, сумма виртуальных работ связей равна нулю. Выделение в гидродинамике объемов и сил, образующих механическую систему, условно и требует отдельного обоснования.

Так, успех изучения устойчивости фигур равновесия вращающейся жидкости [9] обусловлен возможностью введения системы координат,

в которой жидкость покоится и, следовательно, применимы критерии устойчивости равновесия системы. В случае форсунки такой системы координат нет, если только жидкость не вращается как твердое тело.

Задача настоящей работы — обобщение на случай течения сжимаемого газа вариационных подходов, применяемых в несжимаемой жидкости. Понятие свободной поверхности здесь будет иметь тот же смысл, что в теории газовых струй Чаплыгина [10]. Расчет радиуса свободной границы при истечении из центробежной форсунки принципиально возможен, если известны параметры торможения и давление на разыскиваемой границе.

Рассмотрим разомкнутый режим истечения, когда в приосевой зоне образуется полость, сообщающаяся с внешней средой. Считая в первом приближении газ, находящийся в полости, неподвижным, давление на свободной границе примем равным внешнему. Расчет такого течения от входного сечения камеры, так же как в случае несжимаемой жидкости, требует некоторых дополнительных предположений о характере сопряжения свободной границы с торцевой стенкой камеры и представляет еще большие технические трудности, поэтому применение здесь вариационного принципа особенно привлекательно. В частности, условие максимума расхода использовалось для оценки радиуса полости при истечении потенциального закрученного потока из сопла Лавала [11, 12], но здесь существенно использовалась кривизна стенок сопла и была получена только связь неизвестного радиуса со скоростью истечения. Задача о газовой форсунке рассматривалась в [13]. Вопрос о минимизации (1) для сжимаемых течений не изучался.

Прежде чем обобщить условие минимума кинетической энергии на сжимаемые течения, полезно найти более общую его формулировку, проясняющую физический смысл принятого условия. Дело в том, что в предложенном виде оно неприменимо к плоскому аналогу течения в форсунке — задаче о фонтане тяжелой жидкости [14], где просто не существует минимума кинетической энергии. Именно этот факт дискредитирует попытки доказательства принципа на основе законов механики. Адекватная формулировка вариационного принципа, включающая плоский случай, была найдена с помощью традиционного в гидродинамике лагранжева формализма [15].

Рассмотрим эволюцию плоского горизонтального потока со свободной границей, имеющего постоянную глубину h , при заданном расходе Q . Выделим малый жидкий объем высоты h , ограниченный вертикальными плоскостями. Движение частиц, составляющих этот объем, складывается из их движения как целого вместе с центром тяжести и движения относительно него. Плотность функции Лагранжа составит из двух частей

$$L=L_1+L_2, \quad L_1 = \frac{\rho v_x^2}{2} - \rho g \frac{h}{2} \quad (2)$$

Второй член в L_1 представляет плотность потенциальной энергии выделенного объема в поле тяжести. Функция L_2 включает энергии неупорядоченного относительного движения и взаимодействия отдельных частей объема, в том числе энергию сил давления.

Для закрученного потока, придавая такой же смысл функции L_2 , следует включить в L_1 кинетическую энергию поступательного движения с центром тяжести и дифференциального вращения с заданной циркуляцией

$$L_1 = \frac{2}{R^2 - r_0^2} \int_{r_0}^R \rho \left(\frac{v_x^2}{2} + \frac{v_\theta^2}{2} \right) r dr \quad (3)$$

Если учесть, что в потенциальном потоке скорость не зависит от r и

пропорциональна $(R^2 - r_0^2)^{-1}$, то окажется, что (3) и (1) совпадают с точностью до постоянного множителя. Поэтому условие минимума (1) при заданных Q и Γ эквивалентно уравнению

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L_1 dt = 0 \quad (4)$$

представляющему «усеченный» принцип наименьшего действия. Таким образом, эквивалентная «механическая» формулировка условия минимума (1) состоит в утверждении, что уравнение (4) и уравнение

$$\delta \int_{t_1'}^{t_2'} L_2 dt = 0 \quad (5)$$

выполняются независимо (составляя в сумме принцип наименьшего действия). Такое утверждение не может быть точным, а должно рассматриваться как приближение, смысл которого следующий: локальное возмущение радиуса свободной поверхности (высоты слоя) затухает в заключающем его объеме под действием внутренних сил значительно быстрее, чем волна возмущения распространяется вдоль поверхности. Тогда уравнения (4) и (5) действительно могут рассматриваться на разных временных масштабах и приближенно выполняться независимо.

На основании изложенного можно заключить, что применимость условия (4) может быть оправдана, в частности, для потоков после быстрого прохождения диссипативных процессов, например после гидравлического прыжка. Это согласуется с выводами работы [8] для вращающегося потока.

Применяя (4) к плоскому течению, необходимо учесть, что продольная координата x в L_1 является циклической, поэтому можно исключить скорость v_x , переходя к функции Рауса $R_1 = L_1 - \rho_x v_x$. Обобщенный импульс p_x и скорость v_x выражаются через координату h с помощью условия постоянства расхода, после чего можно получить уравнение для высоты h

$$\frac{d}{dh} \left(\frac{\rho g h}{2} + \frac{\rho Q^2}{2h^2} \right) = 0$$

откуда

$$h = (2Q^2/g)^{1/3}.$$

Полученный режим является подкритическим (в критическом режиме, отвечающем принципу максимума расхода, при заданном напоре $h = (Q^2/g)^{1/3}$, т. е. примерно на 20% ниже). Однако сопряженный надкритический режим, рассчитанный по уравнению гидравлического прыжка, имеет высоту $h = 0,7787(Q^2/g)^{1/3}$, весьма близкую к эксперименту и к решению, полученному в [14] методом узких полос, где $h = 0,7778(Q^2/g)^{1/3}$.

Обобщение (4) на случай сжимаемых течений очевидно: плотность функции Лагранжа (кинетической энергии для закрученного потока) должна рассчитываться на единицу массы.

Ниже представлена удобная для обобщения формулировка задачи о максимуме расхода в потенциальном закрученном потоке несжимаемой жидкости. При заданном напоре H и циркуляции Γ имеем

$$\begin{aligned} \delta Q = 0, \quad \delta \Gamma = 0 \\ \delta H = \delta \left[\frac{P_0 - P(r_0)}{\rho} \right] = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

где P_0 — полное давление на входе в систему.

При заданной удельной кинетической энергии T

$$\begin{aligned} \delta Q &= 0, \quad \delta \Gamma = 0 \\ \delta T &= \delta \left\{ \int_{r_0}^R \frac{P_0 - P(r)}{\rho} \rho v_z r dr \right\} = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

В этой записи три величины в (6) или (7) равноправны и вариационная задача рассматривается как отыскание экстремума любой из них при фиксированных значениях двух других. В последнем соотношении (7) использована теорема Бернулли. Заметим, что это соотношение с помощью теоремы о среднем и условия $\delta Q = 0$ может быть представлено в виде, аналогичном (6)

$$\delta H_* = \delta \left(\frac{P_0 - P(r_*)}{\rho} \right) = 0$$

где r_* — некоторый радиус внутри зоны истечения.

Таким образом, вариационная формулировка (7) сводится к (6), но с другим перепадом давления.

При обобщении (6) и (7) на случай изоэнтропического потенциально-го течения сжимаемого газа получим

$$\begin{aligned} \delta H &= \delta [a_0^2 - a^2(r_0)] = 0 \\ \delta G &= 0, \quad \delta \Gamma = 0, \quad \delta P_0 = 0, \quad \delta \rho_0 = 0, \\ \delta T &= \delta \left[\rho_0 v_z \int_{r_0}^R \frac{\rho}{\rho_0} \left(\frac{a_0^2 - a^2(r)}{\kappa - 1} \right) r dr \right] = \frac{G}{\kappa - 1} \delta [a_0^2 - a^2(r_*)] = 0 \\ \delta G &= 0, \quad \delta \Gamma = 0, \quad \delta P_0 = 0, \quad \delta \rho_0 = 0 \end{aligned}$$

Здесь G — массовый расход, a_0 — скорость звука торможения, $a(r)$ — местная скорость звука. Последние два условия означают стационарность параметров торможения. Это обобщение, хотя и представляется разумным, не является единственно возможным, поэтому требуется тщательный анализ результатов и сравнение с экспериментом. Сопряжение со случаем несжимаемой жидкости очевидно.

Заметим, что уравнениями (8) зафиксировано отношение давлений $\beta(r_0) = P(r_0)/P_0$, тогда как в (9) фиксируется $\beta(r_*) = P(r_*)/P_0$, что допускает такую же интерпретацию, как и в случае (7).

Для удобства математической постановки задачи определяется набор безразмерных параметров: $\alpha = \Gamma/(Ra_0)$ — параметр крутки; $\Lambda = G/(\pi \Gamma R \rho_0)$ — параметр, в случае несжимаемой жидкости совпадающий с величиной $\Lambda = Q/(\pi \Gamma R)$, введенной в [14]; $\xi = r_0/R$ — искомый относительный радиус

границы зоны истечения; $\zeta = \Lambda / \left(2 \int_{\xi}^1 \rho(x)/\rho_0 x dx \right) = v_z/v_0(R)$ — геометри-

ческая характеристика истечения.

Варируемые выражения для расхода и кинетической энергии можно представить в виде

$$\Lambda = \frac{G}{\pi \Gamma R \rho_0} = 2\zeta \int_{\xi}^1 [\beta(x)]^{1/\kappa} x dx \quad (10)$$

$$t = \frac{2TR}{\pi \Gamma^3 \rho_0} = 2\zeta \int_{\xi}^1 \left(\frac{1}{x^2} + \zeta^2 \right) [\beta(x)]^{1/\kappa} x dx \quad (11)$$

$$\beta(x) = \left[1 - \frac{\kappa-1}{2} \alpha^2 \left(\frac{1}{x^2} + \zeta^2 \right) \right]^{\kappa/(\kappa-1)} \quad (12)$$

Условия (8) для отыскания ξ сводятся к системе равенств

$$\delta\Lambda = \left(\frac{\partial\Lambda(\xi, \zeta)}{\partial\xi} + \frac{\partial\Lambda(\xi, \zeta)}{\partial\zeta} \frac{d\zeta}{d\xi} \right) \delta\xi = 0 \quad (13)$$

$$\beta(\xi) = \text{const}, \quad \alpha = \text{const}$$

При этом параметры торможения фиксированы и известны, а ζ считается известной функцией ξ , определяемой из (12) по фиксированным $\beta(\xi)$ и α .

Условия (9) требуют выполнения равенств

$$\delta\Lambda = \frac{\partial\Lambda}{\partial\xi} \delta\xi + \frac{\partial\Lambda}{\partial\zeta} \delta\zeta = 0, \quad \delta t = \frac{\partial t}{\partial\xi} \delta\xi + \frac{\partial t}{\partial\zeta} \delta\zeta = 0 \quad (14)$$

$$\alpha = \text{const}$$

Условие постоянства t оказалось удобнее использовать в дифференциальной форме, так как ζ из (11) элементарно не выражается. Для того чтобы система (14) имела нетривиальное решение, необходимо, чтобы равнялся нулю Якобиан

$$\frac{D(\Lambda, t)}{D(\xi, \zeta)} = 0 \quad (15)$$

При непосредственных расчетах в (15), так же как в (13), можно считать известными (но не фиксированными при варьировании) значение $\beta(\xi) = \beta$ и соответственно $\zeta[\alpha, \beta(\xi)]$. Вообще говоря, известными можно считать любые два параметра из совокупности $(\alpha, \beta(\xi), \Lambda, \zeta, \xi)$. Предельный случай несжимаемой жидкости получается при $a_0 \rightarrow \infty$. При этом $\alpha \rightarrow 0$, $\beta(\xi) \rightarrow 1$, $\zeta \rightarrow \Lambda(1 - \xi^2)$ и ξ определяется единственным параметром Λ , что соответствует [14].

Результаты численных расчетов по моделям (8) и (9) представлены на фиг. 1, 2 соответственно штриховыми и сплошными линиями. На фиг. 1 построены зависимости $\xi(\Lambda)$ при $\beta(\xi) = 0,99; 0,5; 0,1; 0,01; 0,001$, обозначенные номерами 1-5 соответственно. Кривые 1, соответствующие $\beta(\xi) = 0,99$, совпадают с зависимостями $\xi(\Lambda)$, построенными в [14]. С ростом сжимаемости величина ξ уменьшается, при этом кривые, полученные по двум вариационным принципам, сближаются. Однако информация, представленная на этой фигуре, недостаточна, так как теперь в задаче есть еще один определяющий параметр. Полное представление о течении может быть получено из совместного рассмотрения фиг. 1, 2. На фиг. 2 представлена зависимость от β относительного расхода $g = G/(\pi R^2 a_0 \rho_0) = \alpha \Lambda$ при $\alpha = 1; 0,5; 0,1; 0,01$ (кривые 1-4).

Для анализа качественного различия результатов, полученных по двум моделям, вернемся к аналитическим формулам. Согласно (10), (12)

$$g = 2\alpha\zeta \int_{\xi}^1 \left[1 - \frac{\kappa-1}{2} \alpha^2 \left(\frac{1}{x^2} + \zeta^2 \right) \right]^{1/(\kappa-1)} x dx$$

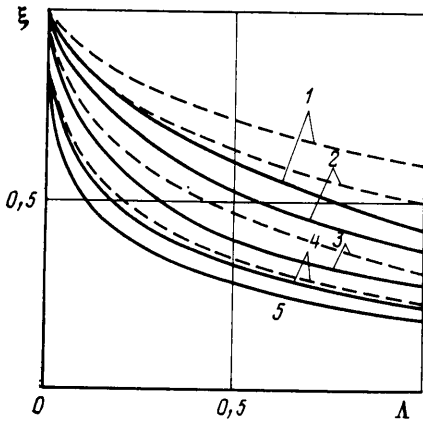
$$\zeta^2 = \frac{1 - \beta^{(\kappa-1)/\kappa}}{(\kappa-1)\alpha^2/2} - \frac{1}{\xi^2}, \quad \beta = \beta(\xi)$$

Легко убедиться, что при заданном ξ функция $g(\beta)$ имеет максимум, причем осевая скорость в этой ситуации достигнет местной скорости звука внутри интервала $(\xi, 1)$. Действительно, из условия $dg/d\beta = (dg/d\zeta) (d\zeta/d\beta) = 0$ получаем

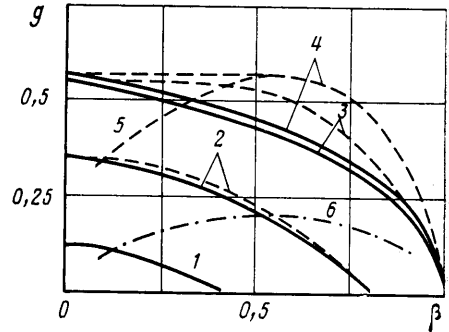
$$\int_{\xi}^1 \left\{ 1 - \zeta^2 \alpha^2 \left[1 - \frac{\kappa-1}{2} \alpha^2 \left(\frac{1}{x^2} + \zeta^2 \right) \right]^{-1} \right\} \left[1 - \frac{\kappa-1}{2} \alpha^2 \left(\frac{1}{x^2} + \zeta^2 \right) \right]^{1/(\kappa-1)} x dx = 0 \quad (16)$$

и по теореме о среднем находим

$$\zeta^2 \alpha^2 = 1 - \frac{\kappa-1}{2} \alpha^2 \left(\frac{1}{x_*^2} + \zeta^2 \right) \quad (17)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

где x_* принадлежит интервалу $(\xi, 1)$. Левая часть (17) представляет собой отношение $(v_z/a_0)^2$, а правая — $(a/a_0)^2$. Поэтому в точке x_* имеем $v_z=a$. Для иллюстрации на фиг. 2 проведена кривая 6, показывающая зависимость $g(\beta)$ при $\xi=0,8$ и $\alpha=0,5$.

Если ξ определяется из условия максимума расхода по (8), то

$$\frac{\partial g}{\partial \xi} + \frac{\partial g}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = \frac{1}{\zeta \xi^3} \frac{\partial g}{\partial \zeta} + \frac{\partial g}{\partial \xi} = 0 \quad (18)$$

Когда ξ заметно меньше единицы, а с уменьшением β , как видно из фиг. 1, ξ уменьшается, второй член в правой части (18), пропорциональный ξ , значительно меньше первого и уравнение (18) приближенно сводится к условию $\partial g/\partial \zeta=0$, которое совпадает с (16) и (17).

Таким образом, для каждого α , начиная с некоторого достаточно малого значения β , равенство $v_z=a$ выполняется во внутренней точке интервала $(\xi, 1)$. Далее и

$$\frac{\partial g}{\partial \beta} = \frac{\partial g}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \beta} + \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \beta} \right) + \frac{\partial g}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \beta} = \left(\frac{\partial g}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} + \frac{\partial g}{\partial \xi} \right) \frac{\partial \xi}{\partial \beta} + \frac{\partial g}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial \beta} = \frac{\partial g}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial \beta}$$

С той же точностью можно считать, что относительный расход не зависит от β . Это видно на фиг. 2 (штриховые кривые). Кривой 5 показан расход в тех точках (α, β) , при которых осевая скорость достигает звуковой на границе ξ . Соответствующие точки определяются из уравнения

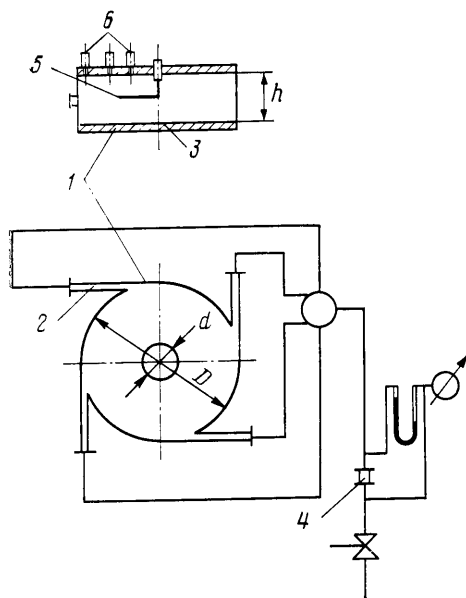
$$\beta_* = \left[1 - \frac{\alpha-1}{2} \left(\frac{\alpha^2}{\xi^2} + \beta_*^{(\kappa-1)/\kappa} \right) \right]^{\kappa/(\kappa-1)}$$

которое следует из (17) при $x_*=\xi$. Можно убедиться, что при $\alpha=0$ и $\kappa=1,4$ $\beta=0,528$.

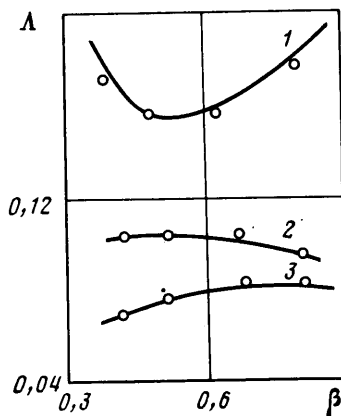
Сплошные линии на фиг. 2, рассчитанные по модели (9), показывают, что относительный расход всегда меньше максимального и растет с уменьшением β вплоть до $\beta=0$. При этом осевая скорость нигде не превышает звуковую.

Для экспериментальной проверки применимости модели (9) к описанию истечения сжимаемого газа была использована вихревая камера, показанная на фиг. 3. Камера 1 имела диаметр $D=0,134$ м, высоту $h=0,024$ м, тангенциальные подводящие щели 2 и центральное отверстие 3 в одной из плоских торцевых крышек. Температура торможения и массовый расход измерялись в подводящем трубопроводе 4. Полное давление измерялось трубкой Пито 5 на расстоянии радиуса выходного отверстия. На этом же расстоянии через дренажные отверстия 6 в глухой торцевой крышке измерялось статическое давление. Это позволило вычислить модуль скорости и (в пренебрежении радиальной скоростью) циркуляцию. Ошибка от пренебрежения радиальной скоростью составляла не более 5%.

В трех вариантах опытов использовались крышки с диаметрами центрального отверстия $d=0,03$; 0,05 и 0,07 м. Измеренная зависимость $g(\beta)$, где β — отношение атмосферного давления к полному, использовалась для



Фиг. 3



Фиг. 4

вычисления Λ по (10), (15). Результаты расчетов показаны кривыми 1–3 на фиг. 4. Там же нанесены значения Λ , вычисленные по измеренным расходу и циркуляции.

Согласие расчетов с экспериментом позволяет рекомендовать модель (9) для обобщения опытных данных и количественных расчетов в широком диапазоне изменения параметра сжимаемости для сильно закрученных потоков с разомкнутым режимом истечения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамович Г. Н.* Теория центробежной форсунки // Промышленная аэродинамика. М.: Бюро Новой Техники НКАП. ЦАГИ, 1944. С. 18–26.
2. *Абрамович Г. Н.* Прикладная газовая динамика. М.: Гостехтеориздат, 1953. 136 с.
3. *Battmet K.* Die Kern – Abmessungen in Kreisenden strömungen // ZVD J. 1950. V. 92. № 28. S. 777–784.
4. *Гольдштик М. А., Зыкин Г. П., Петухов Ю. И., Сорокин В. Н.* Об определении радиуса воздушного вихря в центробежной форсунке // ПМТФ. 1969. № 4. С. 107–111.
5. *Гольдштик М. А., Леонтьев А. К., Палеев И. И.* Аэродинамика вихревой камеры // Теплоэнергетика. 1961. № 2. С. 40–45.
6. *Бенджамин Т. Б.* Сущность явления распада вихря // Тр. Амер. о-ва инж.-мех. Теоретические основы инженерных расчетов. 1965. № 2. С. 299–307.
7. *Каменьщиков Ф. Т.* Некоторые вопросы гидродинамики вращающихся потоков применительно к задачам интенсификации теплообмена и сепарации // Вопр. атомной науки и техники. Сер. Физика и техника ядерных реакторов. 1978. Вып. 1 (21). Ч. 2. С. 65–75.
8. *Каменьщиков Ф. Т., Решетов В. А., Рябов А. А. и др.* Вопросы механики вращающихся потоков и интенсификация теплообмена в ЯЭУ. М.: Энергоатомиздат, 1984
9. *Ляпунов А. М.* Об устойчивости эллипсоидальных форм вращающейся жидкости. Собр. соч. Т. 3. М.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 5–113.
10. *Чаплыгин С. А.* О газовых струях // Избр. труды. Механика жидкости и газа. Математика. Общая механика. М.: Наука, 1976. С. 11–96.
11. *Binnie A. M.* The passage of a perfect fluid through a critical cross-section of «Throat» // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1949. V. 197. P. 545–555.
12. *Lewellen W. S., Burns W. J., Strickland H. J.* Transonic swirling flow // AIAA J. 1969. V. 7. № 7. P. 1290–1297.
13. *Скобелкин В. И.* Теория и расчет центробежной форсунки // Труды Мин. авиац. пром-сти. 1948. № 17.
14. *Гольдштик М. А.* Вихревые потоки. Новосибирск: Наука, 1981. 366 с.
15. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.; Л.: ОГИЗ Гостехиздат, 1947. 928 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию
24.XII.1987