

УДК 532.517.2

ВСПЛЫВАЮЩЕЕ ВИХРЕВОЕ КОЛЬЦО В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

БЕРЕЗОВСКИЙ А. А., КАПЛАНСКИЙ Ф. Б.

Большинство теоретических результатов для термиков, движение которых определяется сложным взаимодействием динамики с плавучестью, получено численно [1-4]. Аналитические решения для конвективного элемента ограничивались рассмотрением автомодельного режима [5]. В то же время имеется аналитическое описание предавтомодельной стадии развития вихревого кольца динамического происхождения [6].

В настоящей работе этот подход распространен на всплывающее вихревое кольцо. Модификация традиционной постановки задачи в этом случае позволяет получить аналитическое решение задачи о «слабом термике» в виде нестационарных полей температуры, завихренности и функции тока, выходящих в пределе на автомодельный режим. Найдена скорость всплывания конвективного кольцевого вихря. Приведено решение для плоского аналога задачи.

1. Постановка задачи. Для определенности будем считать, что плавучесть обусловлена различием температур жидкости внутри и вне вихревого кольца. Используя приближение Буссинеска [5], представим уравнения неразрывности, динамики завихренности и переноса тепла в цилиндрической системе координат в виде [4]

$$\frac{\partial(r^k v)}{\partial r} + \frac{\partial(r^k u)}{\partial x} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}(v \xi) + \frac{\partial}{\partial x}(u \xi) = \nu \left[\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + \frac{k}{r} \frac{\partial \xi}{\partial r} - \frac{k \xi}{r^2} \right] + g \beta \frac{\partial(T - T_\infty)}{\partial r} \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial r} + u \frac{\partial T}{\partial x} = a \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{k}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right] \quad (1.3)$$

Здесь u , v — компоненты вектора скорости в направлении координат x , r соответственно, ξ — завихренность, T — температура, ν — коэффициент кинематической вязкости, g — ускорение силы тяжести, β — коэффициент термического расширения, a — коэффициент температуропроводности, t — время. Значение $k=1$ соответствует осесимметричному, а $k=0$ — плоскому случаю.

Уравнение неразрывности (1.1) позволяет ввести функцию тока

$$v = -\frac{1}{r^k} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad u = \frac{1}{r^k} \frac{\partial \psi}{\partial r} + V(t) \quad (1.4)$$

где $V(t)$ — скорость вихревого кольца как целого. Функция тока и завихренность связаны между собой соотношением

$$-r^k \xi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{k}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (1.5)$$

Граничные условия следуют из симметрии относительно оси x и зату-

хания искомых функций на бесконечности

$$\psi = \zeta = \frac{\partial (T - T_\infty)}{\partial r} = 0, \quad r = 0 \quad (1.6)$$

$$\psi, \zeta, (T - T_\infty) \rightarrow 0, \quad x^2 + r^2 \rightarrow \infty \quad (1.7)$$

Начальные условия определяют большой (R_0) и малый (b_0) радиусы тора, в котором локализовано температурное и вихревое возмущение в начальный момент времени t_0

$$R_0 = (M_0 t_0)^{1/(k+3)}, \quad b_0 = (2\nu t_0)^{1/2} \quad (1.8)$$

где M_0 — начальный импульс вихревого кольца.

Рассматриваемое движение обладает инвариантом

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (T - T_\infty) r^k dr dx = F_0 \quad (1.9)$$

который выражает условие сохранения плавучести. В силу (1.8)–(1.9) значения констант M_0 , F_0 , t_0 должны быть согласованными.

Для диффузионного режима течения характерным масштабом длины является $L = \sqrt{2\nu t}$. Поскольку он зависит от времени, то система координат, нормированная этим масштабом

$$\rho = \frac{r}{L}, \quad \eta = \frac{x - x_0(t)}{L}, \quad \tau = \frac{R_0}{L} \quad (1.10)$$

оказывается расширяющейся. Здесь $x_0(t)$ — высота подъема точки максимума завихренности в кольце. Для выявления определяющих параметров задачи введем в рассмотрение безразмерные искомые функции

$$\omega = \frac{\zeta}{\zeta_0}, \quad \zeta_0 = A (M_0) t^{-\alpha} t_0^{\alpha-1}, \quad \Phi = \frac{\psi}{\zeta_0 L^{k+2}},$$

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} t^\gamma t_0^{-\gamma} \quad (1.11)$$

где α и γ — показатели степени, определяемые в процессе решения, $A = \text{const}$. В безразмерных переменных (1.10), (1.11) уравнения (1.2) и (1.3) принимают вид

$$-2\alpha\omega - \left(\rho \frac{\partial \omega}{\partial \rho} + \eta \frac{\partial \omega}{\partial \eta} + \tau \frac{\partial \omega}{\partial \tau} \right) + \text{Re} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(-\frac{1}{\rho^k} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \omega \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{1}{\rho^k} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \omega \right] \right] =$$

$$= \frac{\partial^2 \omega}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + \frac{k}{\rho} \frac{\partial \omega}{\partial \rho} - \frac{k\omega}{\rho^2} + \frac{\text{Gr}}{\text{Re}} \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \quad (1.12)$$

$$-2\gamma\theta - \left(\rho \frac{\partial \theta}{\partial \rho} + \eta \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \tau \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \right) + \text{Re} \left(\frac{1}{\rho^k} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \frac{\partial \theta}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^k} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) =$$

$$= \frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho^2} + \frac{k}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \right) \quad (1.13)$$

Соотношение между завихренностью и функцией тока (1.5) и граничные условия (1.6) и (1.7) в новых переменных сохраняют свою форму. Таким образом, определяющими параметрами задачи оказываются числа

Рейнольдса, Грасгофа и Прандтля

$$\text{Re} = \frac{\xi_0 L^2}{\nu} = 2At_0^{\alpha-1} t^{-\alpha+1} \sim \tau^{2(\alpha-1)} \quad (1.14)$$

$$\text{Gr} = \frac{g\beta(T_0 - T_\infty)L^3}{\nu^2} t^{-1} t_0^{-1} \sim \tau^{2\gamma-3}, \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{a}$$

Особенностью сформулированной задачи является зависимость определяющих параметров Re и Gr от времени.

2. Решение при малых числах Рейнольдса. Первое приближение. Диффузия приобретает определяющую роль при малых значениях числа Рейнольдса. В силу (1.14) число Рейнольдса уменьшается со временем при $\alpha > 1$. При выполнении этого условия все вихри рано или поздно попадают в диффузионный режим. Если же $\alpha = 1$, то число Рейнольдса должно быть малым с самого начала.

Решение задачи при малых числах Рейнольдса будем искать в виде асимптотических разложений

$$\omega(\rho, \eta, \tau; \text{Re}) = \omega_1(\rho, \eta, \tau) + \text{Re} \omega_2(\rho, \eta, \tau) + \dots \quad (2.1)$$

$$\theta(\rho, \eta, \tau; \text{Re}) = \theta_1(\rho, \eta, \tau) + \text{Re} \theta_2(\rho, \eta, \tau) + \dots$$

$$\Phi(\rho, \eta, \tau; \text{Re}) = \Phi_1(\rho, \eta, \tau) + \text{Re} \Phi_2(\rho, \eta, \tau) + \dots$$

справедливых при $\text{Re} \rightarrow 0$ для фиксированных ρ, η, τ . Подстановка разложений (2.1) в уравнения динамики завихренности (1.12) и переноса тепла (1.13) позволяет получить для первого приближения линейные уравнения при $\text{Gr} = O(\text{Re})$

$$\begin{aligned} -2\alpha\omega_1 - \left(\rho \frac{\partial \omega_1}{\partial \rho} + \eta \frac{\partial \omega_1}{\partial \eta} + \tau \frac{\partial \omega_1}{\partial \tau} \right) &= \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial \eta^2} + \\ &+ \frac{k}{\rho} \frac{\partial \omega_1}{\partial \rho} - \frac{k\omega_1}{\rho^2} + \frac{\text{Gr}}{\text{Re}} \frac{\partial \theta_1}{\partial \rho} \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$-2\gamma\theta_1 - \left(\rho \frac{\partial \theta_1}{\partial \rho} + \eta \frac{\partial \theta_1}{\partial \eta} + \tau \frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} \right) = \frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \eta^2} + \frac{k}{\rho} \frac{\partial \theta_1}{\partial \rho} \right) \quad (2.3)$$

Покажем, что для $\text{Pr} = 1$ существует точное решение уравнений (2.2), (2.3), удовлетворяющее граничным условиям (1.6) и (1.7) и условию сохранения плавучести (1.9). Действительно, в плоском случае (при $k = 0$) решение уравнения (2.3) для температуры имеет вид

$$\theta_1(\rho, \eta, \tau) = C_1 \exp\left(-\frac{\rho^2 + \eta^2 + \tau^2}{2}\right) \text{ch}(\rho\tau) \quad (2.4)$$

Этому решению соответствует показатель степени $\gamma = 1$. Подставляя полученное решение для температуры (2.4) в уравнение для завихренности (2.2) будем иметь

$$\begin{aligned} -2\alpha\omega_1 - \left(\rho \frac{\partial \omega_1}{\partial \rho} + \eta \frac{\partial \omega_1}{\partial \eta} + \tau \frac{\partial \omega_1}{\partial \tau} \right) - \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial \rho^2} - \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial \eta^2} &= \\ = C_1 \frac{\text{Gr}}{\text{Re}} \exp\left(-\frac{\rho^2 + \eta^2 + \tau^2}{2}\right) (-\rho \text{ch}(\rho\tau) + \tau \text{sh}(\rho\tau)) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Решение однородного уравнения для завихренности известно [6]

$$\omega_{10} = C_2 \exp\left(-\frac{\rho^2 + \eta^2 + \tau^2}{2}\right) \text{sh}(\rho\tau) \quad (2.6)$$

Оно соответствует показателю степени $\alpha=1$. Полученные значения показателей степени α и γ приводят к зависимости отношения чисел Грасгофа и Рейнольдса от времени

$$\frac{\text{Gr}}{\text{Re}} \sim \frac{1}{\tau} \quad (2.7)$$

Тем не менее точное решение неоднородного уравнения для завихренности существует

$$\omega_{11} = C_1 \exp\left(-\frac{\rho^2 + \eta^2 + \tau^2}{2}\right) \frac{\text{Gr}}{\text{Re}} (-\rho \text{ch}(\rho\tau) + \tau \text{sh}(\rho\tau)) \quad (2.8)$$

Объединяя полученные результаты, представим общее решение уравнения для завихренности в виде

$$\omega_1 = \exp\left(-\frac{\rho^2 + \eta^2 + \tau^2}{2}\right) \left[C_2 \text{sh}(\rho\tau) + \frac{C_1}{2} \frac{\text{Gr}}{\text{Re}} (-\rho \text{ch}(\rho\tau) + \tau \text{sh}(\rho\tau)) \right] \quad (2.9)$$

Нетрудно проверить, что приведенные решения (2.6) и (2.9) удовлетворяют граничным условиям. Значения констант C_1 и C_2 определяются из условия сохранения плавучести (1.9) и начальных условий (1.8).

В осесимметричном случае решения находятся аналогично. Сначала определяется решение уравнения для температуры (2.3)

$$\theta_1(\rho, \eta, \tau) = C_3 \exp\left(-\frac{\rho^2 + \eta^2 + \tau^2}{2}\right) I_0(\rho\tau) \quad (2.10)$$

Этому решению соответствует значение показателя степени $\gamma=3/2$. Точно такое же значение параметра α получается из условия существования решения однородного уравнения для завихренности [6]. Для чисел Грасгофа и Рейнольдса остается справедливым соотношение (2.7). В результате общее решение уравнения для завихренности (2.2) в осесимметричном случае принимает вид

$$\omega_1(\rho, \eta, \tau) = \exp\left(-\frac{\rho^2 + \eta^2 + \tau^2}{2}\right) \left[C_4 I_1(\rho\tau) + \frac{C_3}{2} \frac{\text{Gr}}{\text{Re}} (-\rho I_0(\rho\tau) + \tau I_1(\rho\tau)) \right] \quad (2.11)$$

Константы C_3 и C_4 , как и прежде, определяются условиями (1.8) и (1.9).

3. Функция тока. В плоском случае аналитическое решение для первого приближения можно указать и для функции тока. Оно определяется уравнением Пуассона

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \eta^2} = -\omega_1 \quad (3.1)$$

и может быть построено на основе принципа суперпозиции из известных решений [6]

$$\Phi_1 = C_2 (f(\eta, \rho - \tau) - f(\eta, \rho + \tau)) + \frac{C_1}{2} \frac{\text{Gr}}{\text{Re}} (g(\eta, \rho - \tau) + g(\eta, \rho + \tau))$$

$$f(\eta, \rho) = -\frac{1}{2} [E_1(w) + \ln(w)] \quad (3.2)$$

$$g(\eta, p) = \frac{p}{2w} (1 - e^{-w}), \quad w = \frac{\eta^2 + p^2}{2}$$

где E_1 — интегральная показательная функция.

В осесимметричном случае представим (2.11) в виде степенного ряда. Для экспоненты и бesselевых функций используем разложения

$$e^{-\rho^2/2} = \sum_{m=0}^{\infty} S_m \rho^{2m}, \quad (3.3)$$

$$I_1(\rho\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k (\rho\tau)^{2k+1}$$

$$\rho I_0(\rho\tau) = \frac{1}{\tau} \sum_{k=0}^{\infty} F_k^* (\rho\tau)^{2k+1}$$

где S_m, F_k, F_k^* — постоянные коэффициенты. Переходя к полярной системе координат

$$\eta = R \cos \varphi, \quad \rho = R \sin \varphi$$

получим уравнение для функции тока в виде

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial R^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{R^2} \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} = -e^{-\tau^2/2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} R_k S_m \tau^{2k+1} R^{2m+2k+2} \sin^{2k+2} \varphi$$

$$R_k = C_4 F_k + \frac{Gr}{Re} \frac{C_3}{2} \left(F_k \tau - \frac{F_k^*}{\tau} \right) \quad (3.4)$$

Решение этого уравнения будем искать в форме

$$\Phi_1 = -e^{-\tau^2/2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} R^{2m+2k+4} P_{k,m}(\varphi) + \frac{C_5 R^2}{2} \sin^2 \varphi \quad (3.5)$$

Для определения $P_{k,m}(\varphi)$ для фиксированных m, k , разделяя переменные, получим

$$(2m+2k+4)(2m+2k+3)P_{k,m} + P_{k,m}'' - \text{ctg} \varphi P_{k,m}' = R_k S_m \tau^{2k+1} \sin^{2k+2} \varphi \quad (3.6)$$

Решение этого уравнения описывается рекуррентными формулами

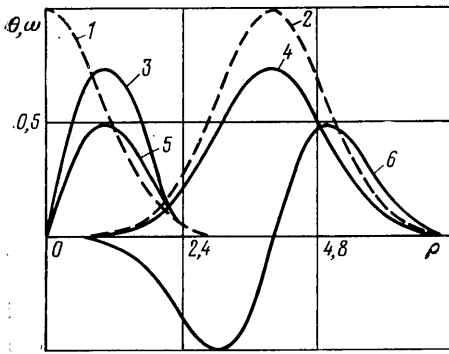
$$P_{k,m}(\varphi) = A_{k,m}^{(k)} \sin^{2(k+1)} \varphi + A_{k,m}^{(k-1)} \sin^{2k} \varphi + \dots + A_{k,m}^{(i)} \sin^{2(i+1)} \varphi + \dots$$

$$\dots + A_{k,m}^{(0)} \sin^2 \varphi$$

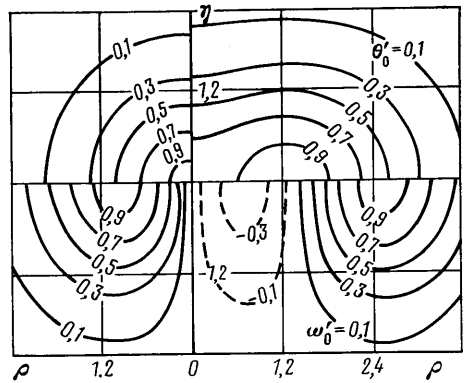
$$A_{k,m}^{(k)} = \frac{\tau^{2k+1} R_k S_m}{(2m+2k+4)(2m+2k+3) - (2k+2)(2k+1)} \quad (3.7)$$

$$A_{k,m}^{(i)} = \frac{2(2(i+1)+2)(i+1)A_{k,m}^{(i+1)}}{(2m+2k+4)(2m+2k+3) - (2i+2)(2i+1)}$$

$$i = k-1, \dots, 0$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Таким образом, в исходных переменных получим решение в виде

$$\Phi_1 = -e^{-\tau^2/2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \tau^{2k+1} R_k S_m (\rho^2 + \eta^2)^{m+k+2} P_{k,m}(q) + \frac{C_5 \rho^2}{2}$$

$$P_{k,m}(q) = \sum_{i=0}^k A_{k,m}^{(i)} q^{2(i+1)}, \quad q = \frac{\rho}{(\rho^2 + \eta^2)^{1/2}} \quad (3.8)$$

где постоянная C_5 должна определяться граничным условием (1.7).

Прямые расчеты по формуле (3.8) затруднительны вследствие неограниченности области изменения аргументов. Поэтому в конкретных расчетах для $\tau \geq 1$ использовались аппроксимации разложений (3.3) с конечным числом членов в интервале $\rho\tau \leq 3,75$ [7]. Для определенности при этом принималось $C_5 = 0$. Тогда скорость в центре вихря (точке, соответствующей максимальной завихренности) совпадает со скоростью вихревого кольца как целого.

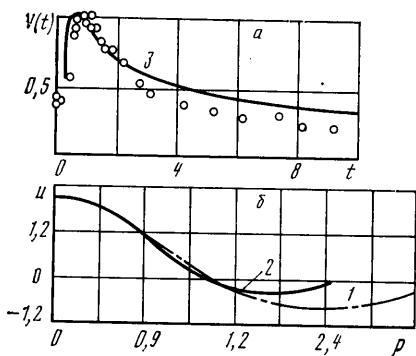
4. Обсуждение результатов и сравнение с экспериментальными данными. На фиг. 1 представлены распределения температуры и завихренности при различных значениях τ в плоском случае для $\eta = 0$. Кривые 1 и 2 соответствуют решению для температуры (2.6) при $\tau = 0,1$ и 4,0; 3, 4 — решению однородного уравнения [6], 5, 6 — решению неоднородного уравнения для завихренности (2.5) при тех же значениях τ .

На фиг. 2 показаны изолинии температуры $\theta'_0 = \theta_0/\theta_{\max}$ и завихренности $\omega'_0 = \omega_0/|\omega_{\max}|$, соответствующие решениям неоднородного уравнения в осесимметричном случае для $\tau = 0,1$ и 1,8.

Найденные поля температуры, завихренности и функции тока при малых τ (большие времена) описывают автомодельную стадию развития всплывающего вихревого кольца. Изоповерхности температуры имеют сферическую (круговую в плоском случае) форму, завихренность имеет форму расплывшегося тора (внутренний радиус сравним с внешним) (фиг. 1, 2, левая часть). Аналитическое описание этой структуры совпадает с известным в литературе [5]. При увеличении τ (уменьшении времени) картина течения меняется. В этом случае наблюдается деформация изоповерхностей температуры, приводящая к ярко выраженной торообразной форме (фиг. 1, правая часть). Промежуточная форма изоповерхности температуры представлена на фиг. 2 (правая часть). Необходимо отметить также появление отрицательной завихренности при больших τ вблизи оси симметрии (фиг. 1, 2, правая часть), ранее наблюдавшаяся только в численном исследовании задачи о термике [1].

На фиг. 3 изображено сравнение полученных решений и эксперимен-

гальных данных [8, 9] для радиального распределения вертикальной составляющей скорости при $\eta=0$ и для изменения скорости подъема термика со временем. Сопоставление показывает, что теоретическая кривая 1 (определенная непосредственным дифференцированием (3.8) при $\tau=1$) удачно отражает поведение экспериментальной зависимости [8] (кривая 2, $Pr \approx 10$, $Re \approx 20$, $Gr \approx 10^3$). Кривые перестают совпадать на удалении от оси симметрии, что, возможно, связано с особенностями методики эксперимента, приводящей к появлению там отрицательной завихренности. Кривая 3 иллюстрирует теоретическое изменение скорости всплывания кольца как целого со временем. Точки соответствуют экспериментальным данным при $Pr \approx 10$, $Re \approx 20$, $Gr \approx 10^3$ [9]. Значения отношения определяющих параметров Gr и Re выбирались из условия совпадения максимумов скорости в решении и в эксперименте. Характерно, что ход теоретической зависимости соответствует экс-



Фиг. 3

периментальным данным для неавтономного и автономного режимов развития термика. Ранее полученные аналитические решения [5] эписывали только автономный режим. Полное согласование полученных результатов с экспериментальными осложняется отсутствием экспериментальных данных, соответствующих условию $Pr=1$, при котором получено аналитическое решение. Несмотря на то что найденное аналитическое решение является лишь первым приближением решения сформулированной задачи, оно достаточно полно отражает особенности структур распределений температуры и завихренности реально развивающегося всплывающего вихревого кольца. Это обусловлено тем, что полученные решения (2.4), (2.8), (3.2) при $k=0$ и (2.10), (2.11), (3.8) при $k=1$ удовлетворяют полным уравнениям при любых значениях числа Re для $\eta=0$. Влияние нелинейных членов существенно на начальной инерционной стадии развития, характеризующейся резким расширением вихревого кольца.

В дальнейшем при уменьшении числа Re влияние нелинейности исчезает и на этой стадии процесс описывается полученным решением точно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lilly D. K. Numerical solutions for the Shape-preserving two-dimensional thermal convection element // J. Atmos. Sci. 1964. V. 21. № 1. С. 83–98.
2. Капланский Ф. Б., Эпштейн А. М. Численное исследование свободной конвекции от мгновенного источника тепла в вязкой жидкости // Инж.-физ. журн. 1977. Т. 33. № 4. С. 700–704.
3. Андрущенко В. А., Кестенбойм Х. С., Чудов Л. А. Движение газа, вызванное точечным взрывом в неоднородной атмосфере // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 6. С. 144–151.
4. Гостинцев Ю. А., Солодовник А. Ф. Мощный турбулентный термик в устойчиво-стратифицированной атмосфере. Численное моделирование // ПМТФ. 1987. № 1. С. 47–54.
5. Morton B. R. Weak thermal vortex rings // J. Fluid Mech. 1960. V. 9. № 1. P. 107–118.
6. Березовский А. А., Капланский Ф. Б. Диффузия кольцевого вихря // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 6. С. 10–15.
7. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. Абрамовица М., Стиган И. М.: Наука, 1979. 830 с.
8. Shlien D. J., Brosh A. Velocity field measurements of a laminar thermal // Phys. Fluids. 1979. V. 22. № 6. P. 1044–1053.
9. Shlien D. J., Thompson D. W. Some experiments on the motion of an isolated laminar thermal // J. Fluid Mech. 1975. V. 72. Pt 1. P. 35–47.

Таллинн

Поступила в редакцию
16.II.1988