

УДК 532.516.013.4

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ БЕГУЩИХ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ ВЕРТИКАЛЬНОГО СТЕКАЮЩЕГО СЛОЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

ДЕМЕХИН Е. А., КАПЛАН М. А.

Гравитационное стекание тонкого вязкого слоя по вертикальной поверхности сопровождается волновыми явлениями [1, 2]. Вследствие установления равновесия между эффектами диссипации, подкачки энергии, нелинейности и дисперсии на поверхности слоя жидкости могут распространяться с постоянной скоростью пространственно-периодические волны неизменной формы. Два семейства таких волн найдены и исследованы в [3–6]. При фиксированном числе Рейнольдса семейства являются однопараметрическими, зависящими от волнового числа. В эксперименте реализуются не все решения семейств, а лишь соответствующие некоторым волновым числам. Вопрос о реализации того или иного решения связан с устойчивостью этого решения к возмущениям.

В [3] проведено исследование устойчивости первого семейства волн. Показано, что при достаточно больших числах Рейнольдса решения первого семейства неустойчивы. Минимально неустойчивыми, т. е. имеющими минимальный инкремент нарастания возмущений, оказались волны, переносящие максимум расхода (оптимальные волновые режимы). В [7] исследована устойчивость решений первого семейства при числах Рейнольдса, стремящихся к нулю. Показана устойчивость оптимальных волновых режимов.

В настоящей работе проведено подробное численное исследование устойчивости стационарных бегущих волн первого и второго семейства к бесконечно малым возмущениям с произвольной длиной волны. Установлено существование единственной области устойчивости первого семейства для волновых чисел $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_1')$, соответствующих оптимальному волновому режиму. Найдено несколько областей устойчивости второго семейства $\alpha \in (\alpha_k, \alpha_k')$, $k=2, 3, \dots, 6$, лежащих вблизи локальных максимумов расхода. В областях неустойчивости инкременты нарастания возмущений первого семейства оказались в несколько раз большими, чем второго семейства. Это отличие растет при увеличении числа Рейнольдса. Проведенные расчеты устойчивости позволили объяснить ряд экспериментальных фактов.

1. Уравнения движения пленки вязкой жидкости под действием сил тяжести на вертикальной поверхности имеют вид [3, 4]

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{6}{5} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^2}{h} \right) - \frac{1}{5\delta} \left(h \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + h - \frac{q}{h^2} \right) = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (1.1)$$

где $h(x, t)$, $q(x, t)$ — толщина и расход пленки жидкости; $\delta = 3^{-7/8} \cdot 5^{-1} \cdot \gamma^{-1/8}$. $\cdot R^{1/8}$ — модифицированное число Рейнольдса; $\gamma = \sigma \rho^{-1} \nu^{-4/3} g^{-1/3}$ — параметр, характеризующий физические свойства жидкости (число Капицы); σ , ρ , ν , g — соответственно поверхностное натяжение, плотность, кинематическая вязкость, ускорение свободного падения; R — число Рейнольдса, построенное по среднему расходу при безвольном течении. Величины сделаны безразмерными с использованием плотности жидкости, толщины и средней скорости при отсутствии волн.

Уравнения (1.1) имеют тривиальное решение $h=1$, $q=1$, соответствующее плоскопараллельному течению слоя. При всех δ это решение неустойчиво к малым возмущениям вида $h=1+\varepsilon E$, $\varepsilon \rightarrow 0$, $E = \exp(i\alpha(x-ct))$ [3]. Здесь α — действительное волновое число возмущения, $c=c_R+ic_I$ —

комплексная скорость, определяемая из характеристического уравнения

$$c^2 - c \left(\frac{12}{5} - \frac{i}{5\alpha\delta} \right) + \left(\frac{6}{5} - \frac{\alpha^2}{5\delta} - \frac{3i}{5\alpha\delta} \right) = 0 \quad (1.2)$$

Устойчивость или неустойчивость тривиального решения к возмущению с волновым числом α определяется знаком мнимой части c . Плоскопараллельное течение устойчиво относительно возмущений с $\alpha > \alpha_0 = \sqrt{15\delta}$, $c_I(\alpha) < 0$ и неустойчиво для $0 < \alpha < \alpha_0$, $c_I(\alpha) > 0$. Быстрее всего тривиальное решение при фиксированном числе Рейнольдса разрушается возмущением с максимальным коэффициентом роста

$$\omega = \max_{\alpha \in (0, \alpha_0)} (\alpha c_I(\alpha))$$

Система (1.1) также имеет решения типа стационарных бегущих волн:

$$h(\xi), q(\xi) = q_0 - c + ch, \quad \xi = \alpha(x - ct), \quad \xi \in [0, 2\pi] \quad (1.3)$$

где $h(\xi)$ описывается решением нелинейной краевой задачи на собственные значения c

$$\alpha^3 h^3 h''' + \alpha\delta [6(q_0 - c)^2 - c^2 h^2] h' + h^3 - q_0 - c(h - 1) = 0 \quad (1.4)$$

$$h(\xi) = h(\xi + 2\pi), \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h d\xi = 1 \quad (1.5)$$

Здесь штрих означает производную по ξ , c — скорость бегущей волны, $q_0 > 1$ — средний по периоду расход, (1.5) является условием нормировки — нелинейность искажает не среднюю толщину слоя, а средний расход.

Первое семейство стационарных волн, движущихся со скоростями, меньшими утроенной среднерасходной, $c < 3$ (медленные волны), ответвляется от тривиального решения на кривой нейтральной устойчивости $s = 1$ в сторону меньших волновых чисел и при $\alpha \rightarrow 0$ переходит в отрицательный солитон (типа впадины) [8], где $s = \alpha/\alpha_0$. Второе семейство периодических решений ответвляется от волн первого семейства с удвоенным периодом при $s \approx 0,48 - 0,49$ в сторону больших α , затем при $s_m = \alpha_m/\alpha_0 \approx 0,55 - 0,56$ загибается в сторону меньших α и при $\alpha \rightarrow 0$ переходит в положительный солитон (типа горба) [5, 6]. Исключая небольшую область в окрестности точки ветвления, волна второго семейства представляет из себя по форме горб с пологим задним фронтом, крутым передним и предвестником капиллярной ряби на переднем фронте, $c > 3$ (быстрые волны). При изменении α меняется длина гладкого участка, разделяющего горбы на соседних периодах, форма горба меняется слабо [6]. Задача (1.4) — (1.5) имеет также и другие семейства решений [9], которые, однако, не реализуются на эксперименте.

Рассмотрим вопрос об устойчивости решений типа стационарной бегущей волны. Наложим на решение (1.3) бесконечно малые возмущения вида

$$h(\xi) \rightarrow h(\xi) + \varepsilon f(\xi) e^{\alpha \lambda t}, \quad q(\xi) \rightarrow q(\xi) + \varepsilon u(\xi) e^{\alpha \lambda t}, \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (1.6)$$

При подстановке (1.6) в (1.1) получим задачу на собственные значения λ :

$$\begin{aligned} \lambda u + a_1 f''' + a_2 f' + a_3 f + a_4 u' + a_5 u = 0, \quad \lambda f + u' - c f' = 0 \\ a_1 = -\frac{\alpha^2}{5\delta} h, \quad a_2 = -\frac{6}{5} \frac{q^2}{h^2}, \quad a_3 = -\frac{6}{5} \left(\frac{q^2}{h^2} \right)' - \frac{\alpha^2}{5\delta} h''' - \frac{1}{5\delta} \left(1 + \frac{2q}{h^3} \right) \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$a_4 = -c + \frac{12}{5} \frac{q}{h}, \quad a_5 = \frac{12}{5} \left(\frac{q}{h} \right)' + \frac{1}{5\delta h^2} \sup_{\xi \in R} |u|, \quad |f| < \infty \quad (1.8)$$

где R — множество вещественных чисел. Если у всех λ из спектра решений (1.7) действительная часть $\lambda_R = \text{real}(\lambda) < 0$, то решение типа бегущей стационарной волны (1.3) устойчиво; если хотя бы у одного решения (1.7) $\lambda_R > 0$, то стационарная волна неустойчива.

Уравнения (1.7) представляют из себя линейные уравнения с периодическими коэффициентами. Тогда, согласно теореме Флоке [10], решение (1.7), (1.8) можно искать в виде $f = F(\xi) \exp(i\kappa\xi) + F^*(\xi) \exp(-i\kappa\xi)$, аналогично для u . Здесь $F(\xi)$ — комплексная периодическая функция того же периода, что и $h(\xi)$; в силу требования ограниченности решения (1.8) κ — действительная величина. Значение κ определено с точностью до целого, кратного единице; будем считать, что $\kappa \in [-1/2, 1/2]$. Как легко заметить, система уравнений для $F(\xi)$, $U(\xi)$ при замене $\kappa \rightarrow -\kappa$ переходит в комплексно сопряженную, что позволяет вдвое уменьшить исследуемый интервал: $\kappa \in [0, 1/2]$.

Для решения задачи разложим функции h , F , U в ряд Фурье

$$h = \sum_{k=-N}^N h_k e^{ikh\xi}, \quad \begin{pmatrix} F \\ U \end{pmatrix} = \sum_{k=-N}^N \begin{pmatrix} F_k \\ U_k \end{pmatrix} e^{ikh\xi} \\ h_{-k} = h_k^*, \quad F_{-k} = F_k^*, \quad U_{-k} = U_k^* \quad (1.9)$$

При постановке (1.9) в (1.7) и выделении членов при одинаковых гармониках получим однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно $4N+2$ комплексных неизвестных F_k , U_k , $k=0, \pm 1, \dots, \pm N$. Для того чтобы система имела нетривиальные решения, необходимо и достаточно, чтобы ее главный определитель был равен нулю. Таким образом, приходим к классической задаче на собственные значения комплексной матрицы $|A - \lambda I| = 0$, где I — единичная матрица. При нахождении элементов матрицы A из исходных уравнений (1.7) использовались подпрограммы прямого и обратного преобразования Фурье. Задача на собственные значения λ решалась численно с помощью QR — алгоритма [11].

Каждому решению того или иного семейства при заданных α и δ соответствует набор собственных значений $\{\lambda^{(k)}(\kappa)\}$, $k=1, 2, \dots, 4N+2$; $\kappa \in [0, 1/2]$. Считаем, что собственные значения пронумерованы в порядке убывания их действительной части:

$\lambda_R^{(1)} > \lambda_R^{(2)} > \lambda_R^{(3)} \dots$. Максимальным инкрементом нарастания возмущения будет величина

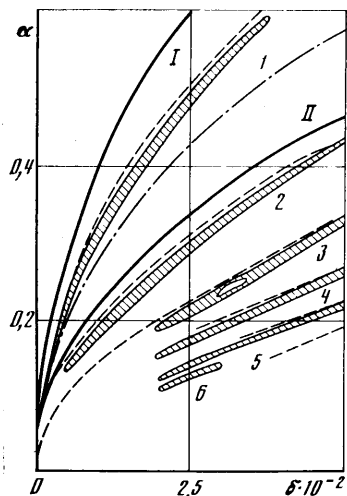
$$\beta = \max_{\kappa \in [0, 1/2]} (\alpha \lambda_R^{(1)}(\kappa))$$

Расчеты были организованы следующим образом. При фиксированном δ для семейства медленных волн бралась область $s \in [0, 1; 1)$, для семейства быстрых волн — область $s \in [0, 1; s_m]$, $s_m \approx 0,55-0,56$. Волновые числа перебирались с шагом по s — 0,005. Для каждого волнового числа α значения κ брались в интервале $\kappa \in [0, 1/2]$ с шагом по κ — 0,025. Для проверки алгоритма некоторые варианты рассчитывались при $\kappa \in [-1/2, 0]$. Число гармоник для первого семейства $N=4\text{antier}(s)$, для второго семейства $N=5\text{antier}(s)$, некоторые из расчетов проводились с большим числом гармоник для контроля точности. Максимальный порядок матрицы A был равен 202.

Если для решения типа бегущей волны при некотором α все $\lambda_R^{(k)}(\kappa) < 0$, $\kappa \in [0, 1/2]$, то решение, соответствующее данному α , считалось устойчивым, в противном случае — неустойчивым. Неустойчивое решение будем характеризовать максимальным инкрементом нарастания возмущения β . При отладке программы проводилось сравнение с результатами [4, 7], показавшее хорошее соответствие этих результатов нашим.

2. Рассмотрим и проанализируем результаты расчетов. На фиг. 1 в координатах α — δ изображены границы существования и устойчивости различных решений. Линия I — кривая нейтральной устойчивости плоско-

параллельного течения $\alpha_0 = \sqrt{15\delta}$, от которой в сторону меньших α отходят волновые решения первого семейства; II — кривая $\alpha = \alpha_m(\delta)$ является границей существования решений второго семейства (на этой кривой происходит бифуркация типа «рождение — смерть» в сторону меньших α). Штрихпунктирная линия — кривая, на которой коэффициент нарастания возмущений плоскопараллельного течения достигает максимального значения $\alpha_{c1} = \omega$. Штриховые линии соответствуют волновым числам, при которых расход $q_0(\alpha)$ имеет локальный максимум, заштрихованы области устойчивости стационарных бегущих волн. Верхняя область, обозначенная I, с границами $\alpha_1(\delta)$, $\alpha_1'(\delta)$ относится к семейству медленных волн, как и лежащая несколько выше I штриховая линия. Остальные пять областей устойчивости (α_2, α_2') , (α_3, α_3') , ..., (α_6, α_6') , обозначенные на фигуре цифрами 2, 3, ..., 6, относятся к семейству быстрых волн.



Фиг. 1

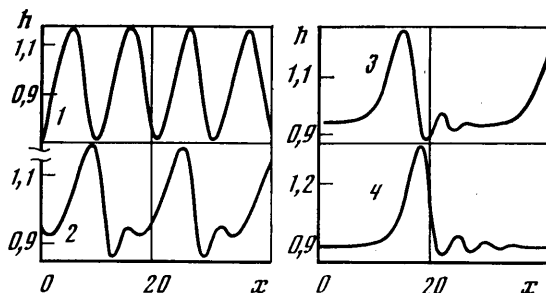
На фиг. 2 показаны формы устойчивых волн при $\delta = 0,04$: 1 — первое семейство, $s = 0,8$; остальные профили $h(x)$ для $s = 0,505$; $0,305$; $0,2$ (кривые 2—4) относятся ко второму семейству.

Настоящие расчеты подтвердили принцип устойчивости или минимальной неустойчивости режимов первого семейства, близких к оптимальным, т.е. переносящих максимум расхода q_0 [3, 4]. При фиксированном δ первое семейство имеет один большой и один малый максимумы зависимости q_0 от α [5] (второй максимум на фиг. 1 не показан). Большой максимум существует при $\delta \in (0, \infty)$, а малый — при увеличении δ от нуля постепенно разглаживается и при $\delta \approx 0,05$ исчезает. Решения с волновым числом, соответствующим большому максимуму q_0 , названы в [3] оптимальными режимами. Существует единственная область устойчивости $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_1')$, лежащая вблизи большо-

го максимума q_0 . Эта область начинается при $\delta = 0$ и заканчивается при $\delta = 0,037$. При $\delta > 0,037$ первое семейство теряет устойчивость, однако линия $\alpha = f(\delta)$, где медленные волны минимально неустойчивы, находится вблизи оптимальных волновых режимов. Длина волны устойчивых режимов первого семейства, как видно из фиг. 1, меньше длины волны, соответствующей максимальному коэффициенту роста плоскопараллельного течения. Для практических нужд можно приближенно определять длину волн, реализующихся на эксперименте, из условия, что при этой длине волны переносится максимум расхода q_0 .

Перейдем к анализу областей устойчивости семейства быстрых волн. При $\alpha \in (\alpha_k, \alpha_k')$, $k = 2, \dots, 6$ решения этого семейства устойчивы; все области начинаются с конечных δ ; внутри второй области устойчивости (α_3, α_3') имеется небольшая подобласть неустойчивости, как это показано на фиг. 1. Немного выше каждой из областей устойчивости лежит кривая максимальных расходов, как это имело место для первого семейства.

Зависимость $q_0(\alpha)$ при фиксированном δ для второго семейства имеет осциллирующий характер и соответственно несколько максимумов. При изменении δ возможно разглаживание одних максимумов и появление других. С этим связана конечная длина последних трех штриховых кривых на фиг. 1. Первые два максимума $q_0(\alpha)$ являются относительно большими, причем, при $\delta \leq 0,04$ первый максимум больше второго. При увеличении δ до $0,04$ максимумы сначала выравниваются по величине, первый максимум при дальнейшем увеличении δ постепенно уменьшается и при



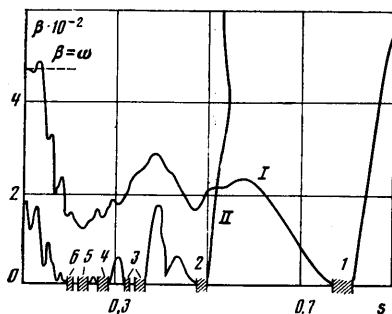
Фиг. 2

$\delta \approx 0,07-0,08$ окончательно разглаживается. При больших значениях δ остается единственный максимум $q_0(\alpha)$. Волновые режимы, соответствующие этому максимуму, были названы в [6] оптимальными волновыми режимами второго семейства. Область устойчивости (α_6, α_6') имеет конечную длину по δ . Пределов существования остальных областей (α_k, α_k') , $k=2, \dots, 5$ по δ нами обнаружено не было.

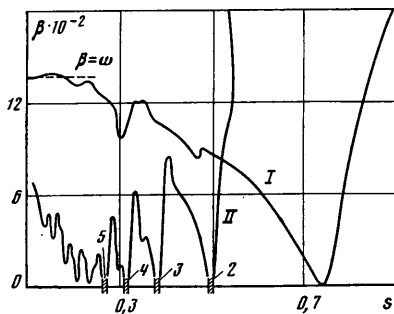
Проанализируем некоторые опытные факты с точки зрения теоретических результатов. В [1, 2] экспериментально получено, что существуют два устойчивых режима стекания слоя: при относительно небольших числах Рейнольдса — это волны, близкие к синусоидальным; при больших числах Рейнольдса — волны типа горбов. Такой вывод следует и из рассмотрения устойчивости волновых семейств.

Существуют два вида возбуждения волн в активных средах: естественное и вынужденное волнообразование. Для стекающих пленок они описаны в [12]. При естественном волнообразовании на входе рабочего участка имеется плоскопараллельное течение, на которое наложены малые случайные возмущения; можно считать, что в спектре этих возмущений имеются с тем или иным весом все волновые числа $\alpha \in (0, \infty)$ со своим декрементом нарастания $\alpha s_1(\alpha)$. Эволюция естественных волн начинается с развития неустойчивости плоскопараллельного течения с длительными переходными процессами и последующим выходом на притягивающее решение — устойчивую бегущую волну или более сложный аттрактор.

При вынужденном волнообразовании на входе рабочего участка возбуждаются возмущения со строго заданным волновым числом α и имеющие достаточно большую амплитуду, близкую к амплитуде стационарной бегущей волны. Можно принять, что при таком возбуждении при $t=0$ задается стационарная волна с наложенными на нее возмущениями. Тогда процесс начинается с развития неустойчивости возмущений, наложенных на стационарную бегущую волну. Если приближенно считать эти возмущения малыми, то их эволюция в конечном итоге определяется спектром собственных значений $\{\lambda^{(k)}\}$ задачи (1.8), (1.9). При $\lambda_R^{(k)} < 0$, $k=1, 2, \dots$ возмущения затухают и на эксперименте реализуется устойчивая бегущая волна того или иного семейства. Если при данном волновом числе α $\lambda_R^{(1)} > 0$, то возможны два случая: а) $\lambda_R^{(1)}$ — достаточно мало, б) неустойчивое собственное значение имеет действительную часть $\lambda_R^{(1)}$ того же порядка, что и устойчивые. В первом случае часть возмущения, соответствующая устойчивым собственным значениям, быстро затухнет, а неустойчивая часть за это время не успеет развиваться. Волна по форме и характеристикам близко подойдет к соответствующей бегущей стационарной волне, которая может пройти довольно большое расстояние, пока неустойчивая мода успеет вырасти и разрушить квазистационарную волну. Во втором случае затухание и рост соответствующих частей возмущения идет с соизмеримой скоростью и стационарная бегущая волна не реализуется на эксперименте. Таким образом, для анализа возбужденных волн требует-



Фиг. 3



Фиг. 4

ся знание не только областей устойчивости, но и значений $\{\lambda^{(k)}\}$ при неустойчивости. Первые собственные значения спектра для решений второго семейства при $\delta=0,03$; $s=0,26$; $0,53$, соответствующих случаям а) и б), представлены в таблице.

На фиг. 3 и фиг. 4 представлены зависимости максимального инкремента нарастания возмущений β от α при $\delta=0,03$ и $0,06$ для первого и второго семейств (обозначены I и II). Заштрихованные зоны, обозначенные цифрами $1, \dots, 6$, показывают области устойчивых волновых чисел $(\alpha_1, \alpha_1'), \dots, (\alpha_6, \alpha_6')$. Заметим, что при тех α , для которых одновременно существуют семейства быстрых и медленных волн, для последних β больше: быстрые волны в целом менее неустойчивы, чем медленные. Эта разница сглаживается при $\delta \rightarrow 0$ и увеличивается при росте δ .

Проанализируем графики на фиг. 3, двигаясь по α от нейтрального волнового числа α_0 . При $\alpha \in (\alpha_0, \alpha_1)$ решения первого семейства сильно неустойчивы. Максимальный инкремент нарастания возмущений при потере устойчивости плоскопараллельного течения $\omega=0,0473$, в то время как для бегущих волн вблизи точки ветвления α_0 $\beta \approx 0,05-0,06$. Возмущения разваливают волну быстрее, чем плоскопараллельное течение. Этим объясняется тот факт, что на эксперименте ([12], рис. 10), при вынужденном волнообразовании волны первого семейства не реализуются для $\alpha \in (\alpha_0, \alpha_1)$. В области $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_1')$ волны первого семейства устойчивы, они реализуются как при естественном, так и при вынужденном волнообразовании.

При $\alpha \in (\alpha_1', \alpha_2)$ волны первого семейства неустойчивы. Однако инкременты их нарастания относительно малы, и при задании на входе возмущения достаточно большой амплитуды на некотором расстоянии от входа могут существовать стационарные бегущие волны с вышеуказанными длинами волн [12]. Такая волна до своего развала проходит несколько своих длин.

α	$\lambda^{(1)}$	$\lambda^{(2)}$	$\lambda^{(3)}$	$\lambda^{(4)}$
$s=0,26$				
0	0	0	$-0,03725-i0,5185$	$-0,2763$
0,2	$0,003290+i0,004028$	$-0,01363+i0,07640$	$-0,04626-i0,4262$	$-0,2704+i0,009213$
0,3	$0,005796+i0,003767$	$-0,02678+i0,1235$	$-0,04991-i0,3635$	$-0,2643+i0,009499$
0,5	0,008266	$0,04709+i0,2381$	$-0,04709+i0,2381$	$-0,2573$
$s=0,53$				
0	0	0	$-0,09080-i0,01106$	$-0,1095+i0,4128$
0,2	$0,06582+i0,01015$	$-0,07524+i0,1424$	$-0,1358-i0,09370$	$-0,2114+i0,3613$
0,3	$0,07927+i0,008096$	$-0,0641+i0,2230$	$-0,1883-i0,1219$	$-0,2953+i0,3026$
0,5	0,08843	$-0,02945+i0,3080$	$-0,3979-i0,1715$	$-0,5035$

Волны второго семейства при $\alpha \in (\alpha_m, \alpha_2)$ имеют большой инкремент β и не реализуются даже при вынужденном волнообразовании.

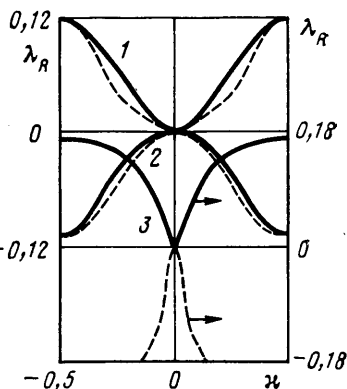
При $\alpha < \alpha_2$ на опыте могут наблюдаться только волны второго семейства. При естественном их образовании они соответствуют волновым числам $(\alpha_2, \alpha_2'), \dots, (\alpha_6, \alpha_6')$. При вынужденном волнообразовании волны второго семейства могут реализовываться при всех $\alpha \in (\alpha_2, \alpha_6')$. Это подтверждается экспериментами [12]. Инкременты нарастания в неустойчивых областях (α_2, α_6') относительно малы.

При $\alpha < \alpha_6'$ β резко возрастает при уменьшении волнового числа и при $s=0,1$ достигает значений порядка 0,02 для быстрых волн и порядка ω для медленных. При $\alpha < \alpha_6'$ на эксперименте даже при вынужденном волнообразовании не реализуются волны ни первого, ни второго семейства. Граница $\alpha = \alpha_6'(\delta)$ была названа в [12] нижней границей существования волновых режимов.

Понять поведение возмущения при малых волновых числах можно из простых качественных рассуждений. При $\alpha \rightarrow 0$ периодические волны как первого, так и второго семейств стремятся к солитонным решениям соответственно типа впадины или горба [5]. Для такой периодической волны имеется длинный гладкий участок, разделяющий волны, при $\alpha \rightarrow 0$ его длина неограниченно растет. Плоскопараллельное течение неустойчиво с максимальным коэффициентом нарастания возмущений ω . Разумно ожидать, что при $\alpha \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow \omega$, так как волна, близкая к уединенной, будет разваливаться возмущениями на плоскопараллельных участках, а вклад этих участков в неустойчивость волны будет расти при $\alpha \rightarrow 0$. В этом одно из отличий солитонов в консервативных средах. В последних плоскопараллельный участок солитона нейтрально устойчив к возмущениям, и распад солитона может произойти только от внутренней неустойчивости горба или впадины.

На фиг. 4 изображено поведение β при $\delta=0,06$, $\omega=0,1376$. Область устойчивости первого семейства исчезла, однако вблизи оптимального режима β имеет ярко выраженный минимум, $\beta=0,00151$. При меньших значениях α для семейства медленных волн наблюдается более равномерный рост $\beta(\alpha)$, чем при $\delta=0,03$; при $s=0,1$ β совпадает с тремя значащими цифрами с ω , выходя на асимптоту. Второе семейство волн теперь имеет четыре области устойчивости (α_k, α_k') , $k=2, 3, 4, 5$. При $\alpha < \alpha_4$ β сильно осциллирует и при некоторых значениях подходит довольно близко к нулю. При дальнейшем уменьшении α β резко возрастает и при $\alpha \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow \omega$.

Рассмотрим более тонкие характеристики поведения возмущения. При фиксированных δ и α $\lambda^{(k)}$ являются функциями второго волнового числа κ . На фиг. 5 показаны зависимости $\lambda_R^{(1)}(\kappa)$ (сплошная кривая) и $\lambda_R^{(2)}(\kappa)$ (штриховая кривая) вблизи смены устойчивости первым семейством, $\lambda_R^{(1)} > \lambda_R^{(2)}$ $\delta=0,03$, $s=0,6; 0,8; 0,9$ (кривые 1–3). В первом и последнем случае течение неустойчиво, во втором — устойчиво. Кривые $\lambda_R^{(1)}(\kappa)$, $\lambda_R^{(2)}(\kappa), \dots$ симметрично продолжаются в области отрицательных κ , $\lambda_R^{(k)}(-\kappa) = \lambda_R^{(k)}(\kappa)$ и имеют период $1/2$. При этом ветви $\lambda^{(k)}$ для сохранения периодичности следует выбирать таким образом, что в точках $\kappa=0, \pm 1/2, \pm 1$ функции $\lambda^{(k)}(\kappa)$ могут быть недифференцируемы, фиг. 5, $s=0,9$.



Фиг. 5

Рассмотрим малую окрестность $\kappa=0$. При $\kappa=0$, т. е. для возмущений того же периода, что и основное решение, $\lambda^{(1)}=\lambda^{(2)}=0$. Одному из нулевых собственных значений соответствует собственная функция $(f, u)=(h', q')$; существование второго связано с возможностью понижения порядка возмущенной системы на единицу при $\kappa=0$. Характеристический полином матрицы A $a_0(\kappa)+\lambda a_1(\kappa)+\lambda^2 a_2(\kappa)+\dots=0$ зависит от κ четным образом — вследствие того, что $h(\xi)$ действительная функция и $h_k=h_{-k}^*$. Так как $\lambda^{(1)}(0)=\lambda^{(2)}(0)=0$, то $a_0(0)=a_1(0)=0$ и $a_0=a_{02}\kappa^2+\dots$, $a_1=a_{12}\kappa^2+\dots$, $a_2=a_{20}+a_{22}\kappa^2+\dots$. Асимптотический анализ при $\kappa\rightarrow 0$, подобный проделанному в [7], показывает, что a_{02} и a_{20} — действительные числа. Резюмируя сказанное, можно показать, что $\lambda^{(1,2)}=\pm\kappa\sqrt{-a_{02}/a_{20}}+O(\kappa^2)$. Если $a_{02}/a_{20}<0$, то один из корней всегда неустойчив, $\lambda_R^{(1)}>0$; в окрестности $\kappa=0$ действительные части λ ведут себя линейно: $\lambda_R^{(1,2)}=\pm\text{const}\cdot\kappa+\dots$. Этот случай иллюстрируется на фиг. 5, $s=0,9$. При $a_{02}/a_{20}>0$ $\lambda_R^{(1,2)}=\text{const}\cdot\kappa^2+\dots$ и возможны как устойчивый (фиг. 5, $s=0,8$), так и неустойчивый (фиг. 5, $s=0,6$) случаи.

Поведение $\lambda_R(\kappa)$ в окрестности областей устойчивости второго семейства такое же, как для первого семейства.

Сделаем здесь замечание. Перед тем, как основное решение станет устойчивым, появляется нейтральное значение $\kappa_0(\alpha)$, такое что $\lambda_R^{(1)}(\kappa_0)=0$; $\lambda_R^{(1)}(\kappa)>0$ при $\kappa<\kappa_0$; $\lambda_R^{(1)}(\kappa)<0$ при $\kappa>\kappa_0$. При приближении к границе устойчивости $\kappa_0(\alpha)$ непрерывно меняется от $1/2$ до 0, проходя рациональные и иррациональные числа. Первый случай соответствует ответвлению нового периодического решения от исходного, в частности, при $\kappa_0=1/2$ происходит ответвление периодического решения через бифуркацию удвоения периода. Во втором случае ответвляется двухпериодическое решение, представляющее из себя в пространстве коэффициентов Фурье тор. В [13] ответвление торов от периодических решений обсуждалось с точки зрения решений типа стационарной бегущей волны; в [14] некоторые решения типа тора найдены аналитически; в [15] двухпериодические решения наблюдались в численном эксперименте моделирования нестационарных волн.

Авторы выражают благодарность В. Я. Шкадову за постоянное внимание к работе; А. Г. Куликовскому и А. А. Бармину, а также участникам их семинара, за плодотворное обсуждение и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Капица П. Л. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости // ЖЭТФ. 1948. Т. 18. Вып. 1. С. 3–28.
2. Капица П. Л., Капица С. П. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости // ЖЭТФ. 1949. Т. 19. Вып. 2. С. 105–120.
3. Шкадов В. Я. Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести // Изв. АН СССР. МЖГ. 1967. № 1. С. 43–51.
4. Шкадов В. Я. К теории волновых течений тонкого слоя вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1968. № 2. С. 20–25.
5. Бунов А. В., Демехин Е. А., Шкадов В. Я. О неединственности нелинейных волновых решений в вязком слое // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 4. С. 691–696.
6. Демехин Е. А., Шкадов В. Я. Режимы двумерных волн тонкого слоя вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 3. С. 63–67.
7. Непомнящий А. А. Устойчивость волновых режимов пленки, стекающей по наклонной плоскости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1974. № 3. С. 28–34.
8. Шкадов В. Я. Уединенные волны в слое вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1977. № 1. С. 63–66.
9. Бунов А. В., Демехин Е. А., Шкадов В. Я. Бифуркации уединенных волн в стекающем слое жидкости // Вестн. МГУ. Сер. мат.-мех. 1986. № 2. С. 73–78.
10. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984. 271 с.
11. Уилкинсон Дж. Алгебраическая проблема собственных значений. Пер. с англ. М.: Наука, 1970. 561 с.
12. Алексеенко С. В., Накоряков В. Е., Покусеев Б. Г. Волны на поверхности вер-

тикально стекающей пленки жидкости: Препринт № 36-79. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1979. 52 с.

13. Демехин Е. А. Ветвление решения задачи о стационарных бегущих волнах в слое вязкой жидкости на наклонной плоскости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. № 5. С. 36-44.
14. Демехин Е. А., Шкадов В. Я. О солитонах в диссипативных средах // Гидродинамика и тепломассообмен течений жидкости со свободной поверхностью. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1985. С. 32-48.
15. Демехин Е. А., Токарев Г. Ю., Шкадов В. Я. Двумерные нестационарные волны на вертикальной пленке жидкости // Теорет. основы хим. технологии. 1987. Т. 21. № 2. С. 177-183.

Москва,
Краснодар

Поступила в редакцию
23.II.1988