

УДК 532.516

**К ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ ОТСОСА — ВДУВА В ВЯЗКОЙ
ЖИДКОСТИ**

БРУТЯН М. А., КРАПИВСКИЙ П. Л.

Рассмотрена задача минимизации сопротивления тела в вязкой жидкости за счет управления отсосом (вдувом). В приближении малых чисел Рейнольдса методом сращиваемых асимптотических разложений построено второе приближение и найдены аналитические решения оптимальной задачи для сферы и кругового цилиндра. Обнаружена качественная перестройка оптимального решения при переходе от безотрывного режима обтекания к отрывному.

Необходимые условия оптимальности в задаче минимизации сопротивления тела в вязкой жидкости за счет управления отсосом (вдувом) выведены в [1]. В [1–3] найдены точные аналитические решения оптимальных задач для тел простой формы в приближении малых и больших чисел Рейнольдса R . Развитый в [1–3] подход при $R \rightarrow 0$ основан на уравнениях Стокса и в силу известного парадокса Стокса [4] неприменим к задачам плоского обтекания. Кроме того, в рамках уравнений Стокса нельзя получить зависимость оптимального решения от числа Рейнольдса даже в ограниченном диапазоне изменения R . Ниже построено второе приближение при $R \rightarrow 0$ и найдены зависящие от R аналитические решения оптимальной задачи как для сферы, так и для кругового цилиндра.

Пусть тело обтекается стационарным потоком вязкой несжимаемой жидкости. Рассмотрим следующую вариационную задачу: найти такое распределение скоростей W отсоса (вдува) вдоль нормали к поверхности, при котором сопротивление тела минимально. При этом будем считать, что полный расход жидкости через поверхность равен нулю.

Уравнения движения и граничные условия в безразмерных переменных имеют вид

$$R(\nabla\nabla)V = \Delta V - \nabla p, \quad \nabla V = 0 \quad (1)$$

$$V|_s = Wn, \quad V|_\infty = v \quad (2)$$

Здесь V — скорость жидкости, p — давление, v — единичный вектор в направлении обтекания, n — единичный вектор внешней нормали.

Уравнения Навье-Стокса (1) обезразмерены таким образом, чтобы в предельном случае стоксовых течений они приобрели наиболее простой вид.

Необходимые условия оптимальности выводятся с помощью обобщенного метода множителей Лагранжа [5, 6] и имеют вид [1]

$$R[(\nabla\nabla)V^* - (\nabla V)V^*] + \Delta V^* - \nabla p^* = 2\Delta V \quad (3)$$

$$\nabla V^* = 0, \quad V^*|_s = V^*|_\infty = 0 \quad (4)$$

$$\left(p^* + 4 \frac{\partial V_n}{\partial n} \right) \Big|_s = \text{const} \quad (5)$$

Здесь V^* , p^* — множители Лагранжа, соответствующие дифференци-

альным связям (1); ∇V — тензор с компонентами

$$(\nabla V)_{ij} = \frac{\partial V_j}{\partial x_i}, \quad [(\nabla V)V^*]_i = \sum_j \left(\frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) V_j^*$$

Отметим также, что сопряженная краевая задача (3), (4) возникает и при решении других вариационных задач в вязкой жидкости [7, 8], а условие (5) отражает специфику рассматриваемой задачи.

Рассмотрим теперь задачу оптимизации отсоса (вдува) при $R \rightarrow 0$ на примерах сферы и кругового цилиндра. При этом, следуя [9, 10], воспользуемся методом сращиваемых асимптотических разложений [11].

В случае обтекания сферы уравнения Навье-Стокса в сферических координатах (r, θ, φ) имеют вид

$$L^2 \psi = \frac{R}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} + 2 \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) L \psi \quad (6)$$

$$L = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)$$

где L — дифференциальный оператор Стокса, ψ — функция тока. Разобьем область течения $r \geq 1$ на две перекрывающиеся подобласти — ближнюю ($r \ll R^{-1}$) и дальнюю ($r \gg 1$). Ограничиваясь приближением второго порядка, решение оптимальной задачи ищем в виде

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_1 + \psi_2, & p &= p_1 + p_2, & \mathbf{V}^* &= \mathbf{V}_1^* + \mathbf{V}_2^*, \\ p^* &= p_1^* + p_2^* \end{aligned} \quad (7)$$

Подставляя (7) в (1)–(6), находим, что в первом приближении в дальней области решение тривиально (однородный поток)

$$\psi_1 = \frac{1}{2} r^2 \sin^2 \theta, \quad \mathbf{V}_1^* = 0 \quad (8)$$

а в ближней области течение стоксово и решение имеет вид [1]

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \left(\frac{1}{2} r^2 - \frac{2}{3} r + \frac{1}{3} r^{-1} \right) \sin^2 \theta, & p_1 &= -\frac{4}{3} r^{-2} \cos \theta \\ \mathbf{V}_1^* &= 0, & p_1^* &= -2p_1 \end{aligned} \quad (9)$$

Во втором приближении для функции ψ_2 в дальней области получаем уравнение Озеена

$$\left(M - \cos \theta \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\sin \theta}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) M \psi_2 = 0 \quad (10)$$

где введена внешняя переменная $\rho = Rr$, а оператор M получается из L заменой r на ρ . Решение (10) хорошо известно [9–11] и имеет вид

$$\psi_2 = \operatorname{const} \alpha^+ [1 - \exp(-\frac{1}{2} \rho \alpha^-)], \quad \alpha^\pm = 1 \pm \cos \theta \quad (11)$$

Значение постоянной находится путем сращивания внешнего решения $\psi_1 + \psi_2$ из (8), (11) с внутренним решением (9) и оказывается равным $-\frac{4}{3} R^{-1}$. Сопряженные уравнения Навье-Стокса (3) в дальней области (в приближении Озеена) имеют вид

$$\Delta \mathbf{V}_2^* - \nabla p_2^* + R [(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{V}_2^*] = 2 \Delta \mathbf{V}_2 \quad (12)$$

Рассмотрим теперь наряду с прямым потоком $\mathbf{V} = \mathbf{v} + \mathbf{V}_2$ обращенный поток $\mathbf{V}' = \mathbf{v}' + \mathbf{V}_2'$, $\mathbf{v}' = -\mathbf{v}$. Функции \mathbf{V}_2 , \mathbf{V}_2' являются решениями соответствующих уравнений Озеена. Из них конструируется точное решение уравнений (12)

$$\mathbf{V}_2^* = \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_2', \quad p_2^* = p_2' - p_2 \quad (13)$$

Тот факт, что подстановка (13) дает точное решение сопряженных уравнений Озеена (12), впервые отмечен в [7] для задачи оптимизации формы тела в рамках уравнений Озеена. Из (11), (13) находим решение в дальней области

$$\psi_2^* = \frac{1}{3} R^{-1} \{ \alpha^- [1 - \exp(-\frac{1}{2} r \alpha^+)] - \alpha^+ [1 - \exp(-\frac{1}{2} r \alpha^-)] \} \quad (14)$$

из которого следует любопытный факт — след для сопряженного уравнения Навье-Стокса (3) распространяется как вниз, так и вверх по потоку. Этот вывод относится к любым числам Рейнольдса и особенно важен при изучении течений погранслоного типа ($R \rightarrow \infty$). Заметим, что эффект распространения следа вверх по потоку при определенных условиях имеет место в магнитной гидродинамике [12].

Осталось найти ψ_2 , ψ_2^* в ближней области. Уравнение для ψ_2 получается после подстановки первого приближения (9) в конвективные члены (6) и имеет вид

$$L^2 \psi_2 = -4 R (r^{-2} - \frac{1}{3} r^{-3} + \frac{2}{3} r^{-5}) \sin^2 \theta \cos \theta \quad (15)$$

Решая (15), находим

$$R^{-1} \psi_2 = (-\frac{1}{6} r^2 + \frac{2}{9} r + \frac{1}{9} r^{-1} + C_1 + C_2 r^{-2}) \sin^2 \theta \cos \theta + (C_3 r^2 + C_4 r + C_5 r^{-1}) \sin^2 \theta \quad (16)$$

Сращивание (16) с решением в дальней области (8), (11) показывает, что при $r \gg 1$ должно иметь место равенство $R^{-1} \psi_2 = \frac{1}{6} r^2 \alpha^- \sin^2 \theta$, т. е. $C_3 = \frac{1}{6}$. Наконец, равенство нулю касательной скорости $\partial \psi_2 / \partial r = 0$ на сфере $r=1$ дает $C_2 = -\frac{1}{9}$, $C_5 = C_4 + \frac{1}{3}$.

Уравнение для ψ_2^* получается из (3)

$$L^2 (\psi_2^* - 2\psi) = 0 \quad (17)$$

Структура решения (16) подсказывает, что ψ_2^* надо искать в виде

$$R^{-1} \psi_2^* = f(r) \sin^2 \theta \cos \theta + g(r) \sin^2 \theta \quad (18)$$

$$f(r) = A_1 r^2 + A_2 r + A_3 + A_4 r^{-1} + A_5 r^{-2}, \quad g(r) = B_1 r^2 + B_2 r + B_3 r^{-1}$$

После подстановки (17) в (16) находим $A_1 = -\frac{1}{3}$, $A_2 = \frac{1}{9}$, $A_4 = \frac{2}{9}$. Граничные условия прилипания (4) $\psi_2^* = \partial \psi_2^* / \partial r$ при $r=1$ дают значения недостающих констант $A_3 = -\frac{1}{9}$, $A_5 = -\frac{2}{9}$. Наконец, оказывается $g(r) = 0$, что следует из условия прилипания (4) и сращивания (17) с (14) в дальней области, а именно $R^{-1} \psi_2^* \rightarrow -\frac{1}{3} r^2 \sin^2 \theta \cos \theta$ при $r \gg 1$. Постоянные C_1 , C_4 найдем из условия оптимальности (5). Уравнения для p_2^* получаются из (3) и имеют вид

$$\frac{\partial p_2^*}{\partial r} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} L(\psi_2^* - 2\psi_2), \quad \frac{\partial p_2^*}{\partial \theta} = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} L(\psi_2^* - 2\psi_2)$$

Используя выражения (16) и (18) для ψ_2 и ψ_2^* , а также свойства оператора L

$$L[F(r) \sin^2 \theta \cos \theta] = \left(\frac{d^2 F}{dr^2} - \frac{6F}{r^2} \right) \sin^2 \theta \cos \theta$$

$$L[G(r) \sin^2 \theta] = \left(\frac{d^2 G}{dr^2} - \frac{2G}{r^2} \right) \sin^2 \theta$$

после громоздких вычислений находим

$$R^{-1} p_2^* = 4C_4 r^{-2} \cos \theta + (\frac{2}{9} + 4C_1) r^{-3} (1 - 3 \cos^2 \theta) \quad (19)$$

В первом приближении условие оптимальности (5) выполняется по самому смыслу решения (9), а во втором приближении оно приобрета-

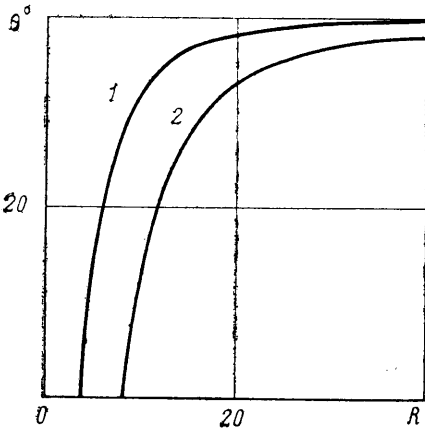
ет вид

$$\left[p_2^* + 4 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi_2}{\partial \theta} \right) \right] = 0 \quad (r=1) \quad (20)$$

Подставляя (16) и (19) в (20), находим $C_1 = 1/6$, $C_4 = -2/9$, $C_5 = 1/9$. Приведем окончательное выражение для оптимального решения в ближней области

$$\begin{aligned} \psi &= (1 + 1/3 R) (1/2 r^2 - 2/3 r + 1/3 r^{-1}) \sin^2 \theta + \\ &+ R (-1/6 r^2 + 2/9 r + 1/9 r^{-1} - 1/9 r^{-2} + 1/6) \sin^2 \theta \cos \theta \\ W &= 1/3 \cos \theta + 1/9 R (1 - 3 \cos^2 \theta + \cos \theta) \end{aligned} \quad (21)$$

Рассмотрим некоторые свойства полученного оптимального решения. Оно оказывается несимметричным в отличие от оптимального решения в



стоксовом приближении и приближении больших чисел R [1–3]. Наиболее интересной представляется качественная перестройка решения при увеличении числа R . Как известно, теория второго приближения в задаче обтекания сферы с условием прилипания предсказывает появление отрывной зоны за сферой при $R > 8$ [9, 10]. Полученные по этой теории результаты хорошо согласуются с экспериментом вплоть до $R = 60$ [11, 13]. Предполагая, что полученные оптимальные решения также могут быть распространены на этот диапазон R , из (21) находим: при $0 < R < 3$ оптимальное решение

качественно не отличается от стоксова — на передней части сферы осуществляется отсос, а на задней выдув; при $R > 3$ область отсоса возникает и в окрестности задней кромки ($\theta = 0$). Подобное поведение решения согласуется с известными эмпирическими представлениями об устранении отрыва посредством отсоса. На фигуре показаны зависимости от R размера отрывной зоны θ_s из [9–11] ($\cos \theta_s = 3/4 + 2R^{-1}$, $R \geq 8$, кривая 2) и размера области отсоса в окрестности задней кромки ($\cos \theta_0 = 1/6 + 1/2 R^{-1} + (13/36 + 1/6 R^{-1} + 1/4 R^{-2})^{1/2}$, $R \geq 3$, кривая 1).

Вычисление силы, действующей на сферу с оптимальным распределением отсоса (вдува), дает

$$F = \int_0^\pi (\sigma_{rr} \cos \theta - \sigma_{r\theta} \sin \theta) 2\pi \sin \theta d\theta = \frac{16\pi}{9R} \left(1 + \frac{R}{3} \right)$$

где σ_{rr} , $\sigma_{r\theta}$ — компоненты тензора напряжений.

Рассмотрим теперь обтекание цилиндра при малых числах Рейнольдса. Уравнения Навье-Стокса в полярных координатах (r , θ) имеют вид

$$\Delta^2 \psi = \frac{R}{r} \frac{\partial (\Delta \psi, \psi)}{\partial (r, \theta)}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (22)$$

Вблизи цилиндра течение в первом приближении оказывается стоксовым: $\Delta^2 \psi_1 = 0$. Соответствующее решение имеет вид

$$\psi_1 = (C_1 r \ln r + C_2 r + C_3 r^{-1}) \sin \theta, \quad p_1 = -2C_1 r^{-1} \cos \theta \quad (23)$$

Из условия прилипания касательной скорости и условия оптимальности (5) находим $C_1 = C_3 = C$, $C_2 = 0$.

В дальней области в первом приближении имеем однородный поток $\psi_1 = R^{-1} \rho \sin \theta$. Срачивая (23) с решением для однородного потока, находим $C = (\ln 1/R + k)$, где k — произвольная постоянная. Следуя [14], здесь используется свобода выбора k для того, чтобы (23) было решением и во втором приближении. В дальней области во втором приближении имеем

$$\psi = R^{-1} [\rho \sin \theta + C \psi_2(\rho, \theta)] \quad (24)$$

Подстановка (24) в (22) показывает, что ψ_2 удовлетворяет уравнению Озеена, решение которого приведено в [10, 11]. Для срачивания с (23) из этого решения достаточно получить поведение при $\rho \rightarrow 0$

$$\psi_2 = \text{const} (\ln \rho / 4 + \gamma - 1) \rho \sin \theta + O(\rho^2 \ln \rho)$$

где $\gamma = 0,5772 \dots$ — постоянная Эйлера. Срачивая (23) с (24), находим $\text{const} = 1$, $k = \ln 4 + 1 - \gamma$. Отсюда следует, что разложение Стокса (т. е. разложение в ближней области) надо искать в виде обычного асимптотического ряда по степеням C

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} C^n \Phi_n, \quad \Phi_1 = (r \ln r + r^{-1}) \sin \theta \quad (25)$$

Подстановка (25) в (22) показывает, что Φ_n является решением би-гармонического уравнения при всех n , поскольку нелинейные конвективные члены порядка R малы. Поэтому $\Phi_n = A_n \Phi_1$, причем $A_1 = 1$, $A_2 = 0$ (за счет выбора постоянной k). Окончательно оптимальное решение в ближней области имеет вид

$$\psi = \left(C + \sum_{n=3}^{\infty} A_n C^n \right) (r \ln r + r^{-1}) \sin \theta, \quad C = \left(\ln \frac{R^*}{R} \right)^{-1} \quad (26)$$

$$W = \left(C + \sum_{n=3}^{\infty} A_n C^n \right) \cos \theta, \quad p = -\frac{2 \cos \theta}{r} \left(C + \sum_{n=3}^{\infty} A_n C^n \right)$$

$$R^* = 4 \exp(1 - \gamma) \approx 6,105$$

Решение (26) в отличие от случая обтекания сферы остается симметричным при всех значениях R . При $R < R^*$ распределение отсоса (вдува) имеет обычный вид: на передней части осуществляется отсос, а на задней — выдув; при $R > R^*$ распределение меняется на противоположное. Из решения задачи об обтекании непроницаемого цилиндра при $R \rightarrow 0$ известно, что решение типа (25), не учитывающее малых конвективных членов и поэтому симметричное, на практике оказывается пригодным в весьма узком диапазоне $R \leq 10^{-1}$. Вероятно, это относится и к оптимальному решению (26), так что соображение относительно качественной перестройки решения при $R = R^* \approx 6,105$ носит гипотетический характер.

Вычисление силы, действующей на цилиндр с оптимальным распределением отсоса (вдува), дает

$$F = \int_0^{2\pi} (\sigma_{rr} \cos \theta - \sigma_{r\theta} \sin \theta) d\theta = \frac{4\pi C}{R}$$

В заключение на примере цилиндра рассмотрим изменения, к которым ведет наличие дополнительного ограничения на мощность N управляющего устройства

$$N = \int_0^{2\pi} W^2 r d\theta$$

Условие оптимальности в ближней области, где течение стоксово, в данном случае имеет вид

$$\left(p-2\frac{\partial u}{\partial r}\right)=4\lambda W \quad (r=1)$$

где $\lambda = \text{const}$ — множитель Лагранжа, соответствующий ограничению на N . Приведем только окончательные выражения для оптимального решения во втором приближении

$$\psi = C \left(r \ln r + \frac{\lambda r}{1-2\lambda} + \frac{1-\lambda}{1-2\lambda} \frac{1}{r} \right) \sin \theta \quad (27)$$

$$W = \frac{C}{1-2\lambda} \cos \theta, \quad C = \left(\ln \frac{4}{R} - \gamma + \frac{1-\lambda}{1-2\lambda} \right)^{-1}$$

$$N = \pi C^2 (1-2\lambda)^{-2}, \quad F = 4\pi C R^{-1}$$

При $\lambda=0$ решение (27) превращается в оптимальное решение (26), а при $\lambda=\infty$ получаем классическое решение задачи о непротекаемом цилиндре [9, 10].

Изложенный метод получения оптимальных решений естественным образом распространяется на другие тела простой формы (эллипсоиды, эллиптические цилиндры и т. д.) и на случай произвольного фиксированного расхода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Брутян М. А., Крапивский П. Л. Об оптимальном управлении потоком вязкой несжимаемой жидкости // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 6. С. 929–934.
2. Брутян М. А., Крапивский П. Л. Оптимальное управление потоком вязкой несжимаемой жидкости с целью уменьшения энергетических затрат // Изв. АН АрмССР. Механика. 1987. Т. 40. № 1. С. 49–59.
3. Брутян М. А., Крапивский П. Л., Сычев В. В. Оптимальное управление вязким потоком при больших числах Рейнольдса // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 3. С. 174–176.
4. Хэппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. Пер. с англ. М.: Мир, 1976. 630 с.
5. Баничук Н. В. Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980. 255 с.
6. Лурье К. А. Оптимальное управление в задачах математической физики. М.: Наука, 1975. 478 с.
7. Миронов А. А. К задаче оптимизации формы тела в вязкой жидкости // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 2. С. 103–108.
8. Брутян М. А., Крапивский П. Л. О минимальном моменте, действующем на вращающееся в вязкой жидкости тело // Докл. АН СССР. 1986. Т. 287. № 2. С. 299–301.
9. Kaplan S., Lagerstrom P. A. Asymptotic expansions of Navier-Stokes solutions for small Reynolds numbers // J. Math. and Mech. 1957. V. 6. № 5. P. 585–593.
10. Proudman I., Pearson J. R. A. Expansions at small Reynolds numbers for the flow past a sphere and a circular cylinder // J. Fluid Mech. 1957. V. 2. P. 237–262.
11. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. Пер. с англ. М.: Мир, 1967. 310 с.
12. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика. М.: Физматгиз, 1962. 246 с.
13. Taneda S. Studies on wake vortices (III). Experimental investigation of the wake behind a sphere at low Reynolds numbers // Repts. Res. Inst. Appl. Mech. Kyushu Univ. 1956. V. 4. № 16. P. 99–105.
14. Kaplan S. Low Reynolds number flow past a circular cylinder // J. Math. and Mech. 1957. V. 6. № 5. P. 595–603.

Москва

Поступила в редакцию
15.III.1988