

УДК 532.51.013.4:536.25

ВИБРАЦИОННАЯ ТЕПЛОВАЯ КОНВЕКЦИЯ ОКОЛО ОДНОРОДНО НАГРЕТОГО ЦИЛИНДРА

СИРАЕВ Р. Р.

К настоящему времени вибрационная конвекция в условиях невесомости исследована для замкнутых полостей различной геометрической формы (см., например, [1-3]). Однако открытым остается вопрос о вибрационной конвекции, развивающейся возле нагретого тела в неограниченной жидкости. В данной работе рассматривается конвекция в невесомости около однородно нагретого бесконечного цилиндра, совершающего вместе с жидкостью высокочастотные вибрации вдоль направления, перпендикулярного оси цилиндра. Нелинейные уравнения осредненного движения решаются численно методом конечных разностей. Показано, что при больших значениях вибрационного числа Грасгофа формируется течение пограничного типа, имеющее структуру двух симметричных факелов, перпендикулярных направлению вибрации. Определены характеристики течения и теплопереноса.

Рассмотрим бесконечный круговой цилиндр радиуса R с температурой поверхности Θ , помещенный в безграничную вязкую несжимаемую жидкость. Вся система (цилиндр с жидкостью) совершает высокочастотные гармонические вибрации вдоль вектора \mathbf{n} , расположенного в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра, с круговой частотой Ω и амплитудой смещения b . Статическое поле тяжести отсутствует. В этих условиях жидкость около цилиндра под действием периодической архимедовой силы совершает движение, имеющее как пульсирующую, так и осредненную компоненты (см. [4]).

Уравнения, описывающие осредненную конвекцию в высокочастотном поле, получаются из уравнений Буссинеска методом осреднения [5] и имеют вид [4]

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + \varepsilon (\mathbf{w} \nabla) (T \mathbf{n} - \mathbf{w})$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla T = \chi \Delta T, \quad T \mathbf{n} = \mathbf{w} + \nabla \varphi \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{w} = 0$$

Здесь \mathbf{v} , T , p — осредненные поля скорости, температуры и давления; \mathbf{w} — соленоидальная часть векторного поля $T \mathbf{n}$; ρ , ν , χ , β — плотность и коэффициенты кинематической вязкости, температуропроводности и теплового расширения; $\varepsilon = (\beta b \Omega)^2 / 2$ — размерный вибрационный параметр.

Ввиду бесконечной протяженности цилиндра можно считать, что течение происходит в плоскости поперечного сечения цилиндра. Для описания течения используем в этой плоскости полярные координаты (r, θ) , а также введем функции тока для векторов \mathbf{v} и \mathbf{w}

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad w_r = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta}, \quad w_\theta = -\frac{\partial F}{\partial r} \quad (2)$$

Выберем в качестве единиц расстояния, времени, температуры и функции тока соответственно R , R^2/ν , Θ , ν . Система безразмерных уравнений

для осредненных полей ψ , T и F принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} + G_v \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \right) &= \Delta \Delta \psi \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{1}{P} \Delta T, \quad \Delta F = \frac{\partial T}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad \frac{\partial}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad C_v = \frac{1}{2} \left(\frac{b \beta \Omega R \Theta}{\nu} \right)^2, \quad P = \frac{\nu}{\chi} \end{aligned} \quad (3)$$

Оси x и y декартовой системы координат направлены соответственно вдоль и перпендикулярно оси вибрации, угол θ отсчитывается от оси x по часовой стрелке. В систему (3) входят два безразмерных параметра — вибрационный аналог числа Грасгофа G_v и число Прандтля P .

На поверхности цилиндра исчезают осредненная скорость и нормальная составляющая поля w , а температура задана

$$r=1: \quad \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \quad F=0, \quad T=1 \quad (4)$$

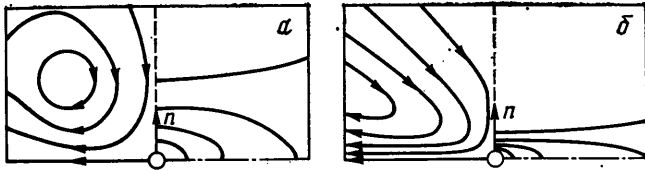
Задача будет решаться численно методом сеток в конечной области $1 \leq r \leq R_\infty$. Поэтому условия на бесконечности ставятся на достаточно большом расстоянии R_∞ . С тем чтобы убедиться в справедливости решения, полученного в такой ограниченной области, решение повторяется для последовательно расширяющихся областей, и полученные результаты сравниваются. На границе $r=R_\infty$, находящейся в дальнейшем поле течения, поставим следующие условия. Предполагается, что жидкость пересекает эту границу в радиальном направлении, т. е. $v_r=0$, $w_\theta=0$, а также отсутствует касательная к границе компонента тензора напряжений: $\partial v_\theta / \partial r=0$. Условия же для температуры зависят от знака радиальной компоненты скорости v_r при $r=R_\infty$. Если $v_r < 0$ (жидкость втекает из бесконечности в зону решения), то можно считать, что ее температура равна температуре на бесконечности ($T=0$). Если же $v_r > 0$ (жидкость притекает к границе из нагретой области), целесообразно поставить более мягкое условие $\partial^2 T / \partial r^2 = 0$, т. е. теплопроводный поток перестает изменяться. Таким образом, при $r=R_\infty$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial r} = 0, \quad T=0 \quad (v_r < 0) \\ \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = 0 \quad (v_r > 0) \end{aligned} \quad (5)$$

Из постановки задачи следует, что течение симметрично относительно осей x и y . Предварительные расчеты, проведенные в полной области ($1 \leq r \leq R_\infty$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$), подтвердили это предположение. Поэтому основные расчеты проводились в одном квадранте, ограниченном лучами $\theta=0$ и $\theta=\pi/2$. Условия симметрии имеют вид

$$\begin{aligned} \theta=0: \quad \psi=0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0, \quad F=0, \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 \\ \theta = \frac{\pi}{2}: \quad \psi=0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Таким образом, задача сводится к нахождению решения системы не-



Фиг. 1

линейных уравнений (3) в области $1 \leq r \leq R_\infty$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$ с граничными условиями (4)–(6).

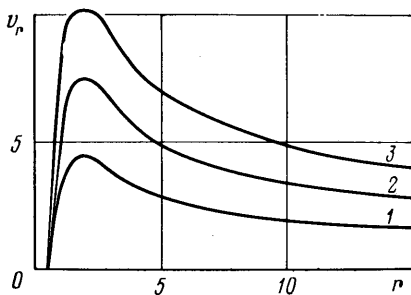
Для численного решения задачи (3)–(6) дифференциальные уравнения аппроксимировались центрально-разностной схемой второго порядка. Однако при больших числах Грасгофа центральные разности в отдельных узлах сетки заменялись на односторонние, что обеспечивало устойчивость численного решения (гибридная схема, см. [6]). При нахождении температуры и вихря скорости $\xi = -\Delta\psi$ использовался итерационный метод Гаусса–Зейделя, а поля функций тока ψ и F вычислялись из уравнений Пуассона с помощью быстрого преобразования Фурье. Решение строилось на равномерной сетке, имеющей 100 узлов по радиальной координате и 32 узла по азимутальной. Граница области интегрирования $r = R_\infty$ варьировалась в зависимости от значения числа Грасгофа в пределах от 20 до 80 радиусов цилиндра ($R_\infty = 20\text{--}80$). Расчеты проводились в интервале значений вибрационного числа Грасгофа $10^2 \leq G_v \leq 5 \cdot 10^4$; число Прандтля фиксировалось: $P = 1$.

В данной задаче механическое равновесие не реализуется и вибрационная конвекция возникает при сколь угодно малом значении G_v . На фиг. 1, а и б приведены картины течения соответственно для $G_v = 10^2$ и $5 \cdot 10^4$. Учтена симметрия течения относительно осей x и y : слева изображены линии тока, а справа – изотермы. Линии тока построены эквидистантно с шагом $\Delta\psi = 0,4$ (фиг. 1, а) и $\Delta\psi = 7,1$ (фиг. 1, б). Поверхности цилиндра соответствует изотерма $T = 1$; остальные изотермы построены с шагом $\Delta T = 0,2$. Жидкость притекает к цилиндру вдоль оси вибрации и растекается вдоль перпендикулярных направлений. При сравнительно малых числах Грасгофа (фиг. 1, а) возникают четыре симметрично расположенных вихря. Картина течения вдоль осей x и y сходна (имеется лишь отличие в знаке скорости). С увеличением числа Грасгофа наблюдается постепенное образование пограничного слоя вдоль оси y , перпендикулярной к направлению вибрации, так что образуются два симметричных факела (фиг. 1, б). Напротив, зона течения вдоль оси вибрации расширяется. Изменения происходят также и с температурным полем. При малых значениях G_v изотермы имеют вид концентрических окружностей; с ростом G_v они все более вытягиваются вдоль оси факела и при больших числах Грасгофа ($G_v > 10^4$) наряду с динамическим образуется тепловой пограничный слой.

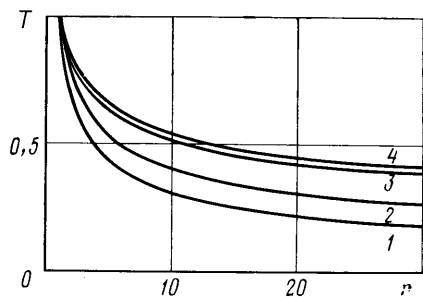
На фиг. 2 и 3 приводятся распределения радиальной компоненты скорости и температуры вдоль оси y , которая с ростом G_v становится осью факела. Кривые 1–3 на фиг. 2 соответствуют $G_v = 5 \cdot 10^2$; $2 \cdot 10^4$; $5 \cdot 10^4$; кривые 1–4 на фиг. 3 – $G_v = 250$; 10^3 ; 10^4 ; $5 \cdot 10^4$. Расчеты показывают, что, начиная с некоторого расстояния от оси цилиндра (которое с ростом G_v убывает), радиальная компонента скорости и температура на оси факела убывают с радиальной координатой r по законам $v_r \sim r^{-m}$, $T \sim r^{-s}$. Значения показателей m и s по данным численных расчетов приведены ниже

G_v	$2,5 \cdot 10^2$	10^3	$5 \cdot 10^3$	10^4	$2 \cdot 10^4$	$5 \cdot 10^4$
m	–	–	0,561	0,542	0,530	0,519
s	0,507	0,384	0,311	0,293	0,278	0,266

С ростом G_v значения показателей m и s стремятся соответственно к $1/2$ и $1/4$. Это свидетельствует о том, что при достаточно больших значениях вибрационного числа Грасгофа ($G_v > 10^4$) обнаруживается автомодельное поведение решения. Область автомодельности начинается на не-



Фиг. 2



Фиг. 3

котором расстоянии от цилиндра; при $G_v = 5 \cdot 10^4$ оно составляет примерно 8 радиусов цилиндра и уменьшается с ростом G_v .

В расчетах получены также профили осредненных характеристик течения в разных поперечных сечениях пограничного слоя. Профили для сечения $y = 15$ при $G_v = 2 \cdot 10^4$ представлены на фиг. 4; кривая 1 соответствует v_x , 2 — v_y , 3 — T . Как видно, при больших числах Грасгофа ($G_v > 10^4$) продольные компоненты осредненной скорости v_y значительно больше, чем поперечные компоненты v_x , что также свидетельствует о погранслоном характере течения.

Важной характеристикой пограничного слоя является его толщина δ . Поскольку профиль продольной компоненты скорости, как видно из фиг. 4 (кривая 2), в любом сечении пограничного слоя имеет точку смены знака,

в качестве δ можно принять расстояние от оси факела до этой точки. Расчеты приводят к зависимостям $\delta \sim r^{3/4}$, $\delta \sim G_v^{-1/4}$.

Для характеристики теплоотдачи от цилиндра введем среднее число Нуссельта

$$Nu = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left| \frac{\partial T}{\partial r} \right| d\theta$$

В режиме чистой теплопроводности $Nu = 1$. Величина $Nu = 1$ дает меру вклада вибрационной конвекции в теплоперенос. Расчеты показывают, что с ростом G_v число Нуссельта монотонно возрастает. Так, при $G_v = 10^4$ и $3 \cdot 10^4$ имеем соответственно $Nu = 1,55$ и $1,67$. При больших значениях числа Грасгофа ($G_v > 10^4$) имеет место асимптотическая формула $Nu = 1 + 0,121 G_v^{1/4}$.

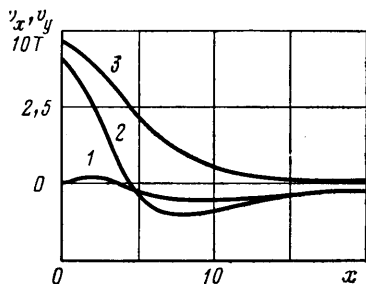
Автор благодарит Е. М. Жуховицкого за руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Вибрационная тепловая конвекция в невесомости // Гидромеханика и процессы переноса в невесомости. Свердловск, 1983.
2. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Шарифулин А. Н. Вибрационная тепловая конвекция в цилиндрической полости // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, 1983. Т. 14. № 4. С. 21–33.
3. Сираев Р. Р. О вибрационной конвекции в прямоугольной полости // Конвективные течения. Пермь, 1987. С. 55–61.
4. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. О свободной тепловой конвекции в вибрационном поле в условиях невесомости // Докл. АН СССР. 1979. Т. 249. № 3.
5. Зеньковская С. М., Симоненко И. Б. О влиянии вибрации высокой частоты на возникновение конвекции // Изв. АН СССР. МЖГ. 1966. № 5. С. 51–55.
6. Kuehn T. H., Goldstein R. J. Numerical solution to the Navier – Stokes equations for laminar natural convection about a horizontal isothermal circular cylinder // Int. J. Heat Mass Transfer. 1980. V. 23. № 7. P. 971–979.

Пермь

Поступила в редакцию
22.III.1988



Фиг. 4