МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 • 1989

УДК 532.5.011:531.552

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА В НЕСТАЦИОНАРНОМ ПОТОКЕ

СЕРГЕЕВ В. С.

Рассматривается задача о движении твердого тела в нестационарном потоке газа с использованием модели обтекания [1], приводящей к описанию движения тела системой интегродифференциальных уравнений. Анализируется случай, когда среди характеристических показателей фундаментальной системы решений линеаризованных уравнений имеется кроме отрицательных один нулевой показатель. Указываются условия неустойчивости, устанавливаемые по членам второго порядка правых частей уравнений. Отметим, что данную задачу можно считать обобщением известной задачи о боковой устойчивости аэроплана в критическом случае, решение которой дано Н. Г. Четаевым в [2, с. 407–408].

1. Исследуем устойчивость горизонтального движения твердого тела с постоянной скоростью $\mathbf{V}$, направление которой совпадает с направлением оси X правой системы координат XYZ с осями неизменного направления и началом, совпадающим с центром масс O тела. Направим ось Y вертикально вверх. Свяжем с главными центральными осями инерции тела систему координат xyz. Будем считать, что ось x направлена вперед навстречу потоку, плоскость xy является плоскостью симметрии тела и ось y направлена вверх. Обозначим через V_i, ω_i, G_i, R_i, M_i ($i=1, 2, 3$) проекции на оси xyz соответственно векторов $\mathbf{V}$, мгновенной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ тела, силы тяжести $\mathbf{G}$, результирующего вектора $\mathbf{R}$ аэродинамических сил, момента $\mathbf{M}$ аэродинамических сил относительно точки O. Пусть mg — вес тела и A_i — его главные центральные моменты инерции, $\Theta=\operatorname{diag}(A_1, A_2, A_3)$, $\mathbf{P}=(P, 0, 0)^T$ — постоянная сила тяги двигателя, заданная в проекциях на подвижные оси.

Уравнения движения запишем в виде

$$m\left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{V}\right)=\mathbf{R}+\mathbf{G}+\mathbf{P} \tag{1.1}$$

$$\frac{d\Theta\boldsymbol{\omega}}{dt}+\boldsymbol{\omega}\times\Theta\boldsymbol{\omega}=\mathbf{M} \tag{1.2}$$

Введем угол атаки α и угол скольжения β, а также β_i, γ_i — направляющие косинусы соответственно осей Y, Z в системе координат xyz. Тогда, полагая $|\mathbf{V}|=V$, будем иметь

$$V_1=V\cos\alpha\cos\beta,\ V_2=-V\sin\alpha\cos\beta,\ V_3=V\sin\beta \tag{1.3}$$

Пусть ψ — угол курса, ϑ — угол тангажа, γ — угол крена [3]. Эти углы связаны с β_1, β_3, γ_1 соотношениями

$$\sin\vartheta=\beta_1,\ \sin\psi=-\gamma_1/\sqrt{1-\beta_1^2},\ \sin\gamma=-\beta_3/\sqrt{1-\beta_1^2}$$

Аэродинамические силы R_i и моменты M_i при учете нестационарности обтекания являются функционалами от α, β, ω_i и их производных [1]. Будем считать α, β, ω_i малыми величинами, изменяющимися в окрестности значений $\alpha=\alpha_0=\text{const}\ll 1$, $\beta=0$, $\omega_i=0$, которые соответствуют установившемуся движению с постоянной скоростью $\mathbf{V}$ в направлении оси X. В невозмущенном движении $\vartheta=\vartheta_0=-\alpha_0$, $\psi=\gamma=0$. Указанным значениям отвечает решение

$$V_1=V_1^0=V\cos\alpha_0,\ V_2=V_2^0=-V\sin\alpha_0,\ V_3=\omega_i=0$$

уравнений (1.1), (1.2), если выполнены соответствующие условия равновесия между $\mathbf{P}$, $\mathbf{G}$, R_i°, M_i°, где R_i°, M_i° — величины R_i, M_i для невозмущенных значений. Будем считать эти условия выполненными. В возмущенном движении положим

$$\alpha'=\alpha-\alpha_0,\ \vartheta'=\vartheta-\vartheta_0,\ v_1=V_1-V\cos\alpha_0,\ v_2=V_2+V\sin\alpha_0,\ v_3=V_3$$

и будем предполагать α', β, ϑ', ψ, γ, ω_i, v_i малыми величинами. Зависимость R_i от переменных задачи возьмем в виде

$$R_i=R_i^\circ+\sum_{k=1}^{3} r_{ik}\omega_k+r_{i4}\alpha'+r_{i5}\beta+\int_{t_0}^{t}\Bigl(\sum_{k=1}^{3}K_{ik}(t-s)\,\omega_k^{\boldsymbol\cdot}(s)+K_{i4}(t-s)\,\alpha'^{\boldsymbol\cdot}(s)+$$
$$+K_{i5}(t-s)\,\beta^{\boldsymbol\cdot}(s)\Bigr)ds+\sum_{k=1}^{3}K_{ik}(t-t_0)\,\omega_k(t_0)+K_{i4}(t-t_0)\,\alpha'(t_0)+$$
$$+K_{i5}(t-t_0)\,\beta(t_0)+\sum_{k=1}^{2}r_{k+5}v_k+mR_i' \tag{1.4}$$

где линейные члены и члены, зависящие от начальных значений $\alpha'(t_0)$, $\beta(t_0)$, $\omega_i(t_0)$, соответствуют форме, принятой в [1, 4]. Выражения для M_i получаются из R_i заменой R_i°, r_{ij}, $K_{ij}(t)$, mR_i' соответственно на 0, m_{ij}, $J_{ij}(t)$, A_iM_i'. В интегральных членах взята линейная зависимость между α', β и v_i, т. е. положено $\alpha'=\alpha^{(1)}(v_1, v_2)$, $\beta=\beta^{(1)}(v_3)$, где согласно (1.3) $\beta^{(1)}(v_3)=v_3/(V_1^{02}+V_2^{02})^{1/2}$. В неинтегральных членах выражений для R_i, M_i будем далее под α', β подразумевать $\alpha^{(1)}$, $\beta^{(1)}$, считая, что нелинейные добавки включены в R_i', M_i'. Величины R_i', M_i' — функции от ω_j, v_i, разложения которых в степенные ряды в окрестности нуля не содержат свободных и линейных членов. Считается, что значения управляющих параметров во все время движения остаются постоянными. Относительно ядер $K_{ij}(t)$, $J_{ij}(t)$ будем предполагать, что они являются экспоненциально убывающими функциями.

Присоединим к уравнениям (1.1), (1.2) кинематические уравнения

$$\frac{d\beta_1}{dt}=\omega_3\beta_2-\omega_2\beta_3,\qquad \frac{d\beta_3}{dt}=\omega_2\beta_1-\omega_1\beta_2$$
$$\frac{d\gamma_1}{dt}=\omega_3\gamma_2-\omega_2\gamma_3,\qquad \beta_1=\beta_{10}+\beta_1',\qquad \beta_{10}=-\sin\alpha_0 \tag{1.5}$$

и геометрические соотношения, связывающие β_i, γ_j. Тогда, выразив β_2, γ_2, γ_3 через β_1', β_3, γ_1, получим замкнутую систему девяти интегродифференциальных уравнений относительно ω_i, v_i, β_1', β_3, γ_1 $(i=1, 2, 3)$. В дальнейшем штрих у β_1' будем опускать.

2. Преобразовав интегральные члены в (1.4) интегрированием по частям, запишем уравнения (1.1), (1.2), (1.5) в форме

$$\frac{dx}{dt}=Ax+\int_{t_0}^{t}K(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau+F(x) \tag{2.1}$$

где $x \in R^9$, A — постоянная матрица и $K(t)$ по предположению допускает оценку

$$\|K(t)\| \leqslant C \exp(-\delta t), \ C>0, \ \delta>0 - \text{const} \tag{2.2}$$

Частным случаем матрицы $K(t)$, удовлетворяющей неравенству (2.2), является матрица

$$K(t) = \sum_{k=1}^{m_1} \sum_{p=0}^{m_2} Q^{(k,p)} t^p \exp(-\beta_k t) \tag{2.3}$$

в которой $\beta_k>0$ — const и $Q^{(k,p)}$ — постоянные матрицы.

Изучению уравнений (2.1) при различных предположениях относительно K, F посвящены работы [5, 6], в которых проведен анализ целого ряда свойств (устойчивость, ограниченность, периодичность и др.) решений данных уравнений. В частности показано, что нулевое решение уравнения (2.1), (2.3) асимптотически устойчиво, когда все корни λ_j' характеристического уравнения таковы, что $\operatorname{Re}\lambda_j'<0$, и неустойчиво, когда $\operatorname{Re}\lambda_k'>0$ для некоторого k.

Исследование асимптотической устойчивости решений интегродифференциальных уравнений аэроупругости, не разрешенных относительно производных, содержится в [4, 7], где допускается недифференцируемость интегральных ядер. Построение общего решения уравнений (2.1) – (2.3) в окрестности асимптотически устойчивого нулевого решения первым методом Ляпунова в случае голоморфной F осуществлено в [8, 9], что позволяет дать оценку области притяжения. Подобную оценку в рассматриваемой здесь задаче можно сделать способом, использованным в работе [10].

Из существования у тела плоскости симметрии xy следует [3], что уравнения движения в линейном приближении разделяются на две подсистемы, описывающие продольное движение (переменные v_1, v_2, ω_3, β_1) и боковое движение (переменные v_3, ω_1, ω_2, β_3, γ_1). Будем считать, что интегральные ядра аппроксимируются экспоненциально-полиномиальными функциями, так что справедливо представление (2.3).

Рассмотрим случай, когда характеристические показатели λ_i ($i=1,\ldots,9$) нормальной по Ляпунову фундаментальной системы решений линеаризованных уравнений возмущенного движения удовлетворяют условию $\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_9=0$. При этом корни λ_j' ($j=1,\ldots,N$), занумерованные в порядке неубывания вещественных частей ($\lambda_N'=0$), таковы, что $\operatorname{Re}\lambda_p'<<\lambda_1$ ($p=1,\ldots,N-9$). Будем считать выполненными условия теоремы работы [11], т. е. линеаризованные уравнения являются правильными, матрица фундаментальной системы решений и ее диагональный минор восьмого порядка не выроождены и постоянная Ляпунова $g_2\neq0$.

Пусть нулевой корень характеристического уравнения отвечает подсистеме бокового движения.

Выпишем уравнения бокового движения

$$\frac{dv_3}{dt} = (\rho_{31}-V_2^\circ)\omega_1 + (\rho_{32}+V_1^\circ)\omega_2 - g\beta_3 + \rho_{35}\beta^{(1)} +$$

$$+\int_{t_0}^{t} (K_{31}'(t-s)\omega_1(s) + K_{32}'(t-s)\omega_2(s) + K_{35}'(t-s)\beta^{(1)}(s))\,ds + F_1$$

$$\frac{d\omega_i}{dt} = \mu_{i1}\omega_1 + \mu_{i2}\omega_2 + \mu_{i5}\beta^{(1)} + \int_{t_0}^{t} (J_{i1}'(t-s)\omega_1(s) +$$

$$+J_{i2}'(t-s)\omega_2(s) + J_{i5}'(t-s)\beta^{(1)}(s))\,ds + F_{i+1}, \qquad i=1,2 \tag{2.4}$$

$$\frac{d\beta_3}{dt} = -\beta_{20}\omega_1 + \beta_{10}\omega_2 + F_4, \qquad \frac{d\gamma_1}{dt} = -\omega_2 + F_5$$

$$\rho_{3k}=\frac{r_{3k}+K_{3k}(0)}{m},\qquad \mu_{ik}=\frac{m_{ik}+J_{ik}(0)}{A_i},\qquad K_{3k}'(t)=-\frac{d}{dt}\frac{K_{3k}(t)}{m}$$

$$J_{ik}'(t)=-\frac{d}{dt}\frac{J_{ik}(t)}{A_i},\qquad \beta_{20}=\cos\alpha_0,\qquad k=1,2,5$$

где F_p — нелинейные члены, причем входящие в них формы второй степени $F_p^{(2)}$ имеют вид

$$F_1^{(2)}=-v_2\omega_1+v_1\omega_2+\Psi_1,\qquad \Psi_p=v^{(1)}\psi_p^{(1)}+\varphi_p^{(2)}\ (\omega_1,\omega_2,v_3)$$

$$F_2^{(2)}=\frac{A_2-A_3}{A_1}\omega_2\omega_3+\Psi_2,\qquad F_3^{(2)}=\frac{A_3-A_1}{A_2}\omega_3\omega_1+\Psi_3 \tag{2.5}$$

$$F_4^{(2)}=\beta_1\left(\frac{\beta_{10}}{\beta_{20}}\omega_1+\omega_2\right),\qquad F_5^{(2)}=-\frac{\omega_3}{\beta_{20}}(\beta_{10}\gamma_1+\beta_3)$$

$$\psi_1^{(1)}=\frac{\rho_{31}\omega_1+\rho_{32}\omega_2+\rho_{35}\beta^{(1)}/2}{V_1^{\circ 2}+V_2^{\circ 2}},\qquad \psi_{i+1}^{(1)}=\frac{\mu_{i1}\omega_1+\mu_{i2}\omega_2+\mu_{i5}\beta^{(1)}/2}{V_1^{\circ 2}+V_2^{\circ 2}}$$

$$v^{(1)}=2V_1^\circ v_1+2V_2^\circ v_2,\qquad i=1,\,2$$

Здесь $\varphi_j^{(2)}+v^{(1)}\psi_j^{(1)}$ — формы второй степени, являющиеся квадратичными членами разложений в степенные ряды для R_3, M_1, M_2.

Переобозначим переменные таким образом: $x_1=v_3$, $x_2=\omega_1$, $x_3=\omega_2$, $x_4=\gamma_1$, $x_5=\beta_3$ и положим $x'=(x_1,\ldots,x_4)^T$. Пусть $X(t-t_0)=(x_{ij}(t-t_0))$, $(X(0)=E_5)$ — 5×5-матрица фундаментальной системы решений линеаризованных уравнений (2.4), $Y'(t-t_0)=(y_{ij}'(t-t_0))$ — матрица, сопряженная нормальной по Ляпунову матрице $X'(t-t_0)$, т. е. $Y'(t-t_0)X'(t-t_0)=E_5$. Способ построения $X(t)$ и $X'(t)$ для случая ядер экспоненциально-полиномиального вида указан в [5]. Выражение для g_2 [11] применительно к данной задаче можно записать в виде

$$g_2=\sum_{i,j=1}^{5}y_{5i}'(\infty)x_{ij}(\infty)g_j'$$

$$g_j'=\frac{\partial^2F_j^{(2)}}{\partial x_5^2}(1+\nu w)^2-2\frac{\partial^2F_j^{(2)}}{\partial x'\,\partial x_5}w(1+\nu w)+w^T\frac{\partial^2F_j^{(2)}}{\partial x'^2}w$$

$$w=(w_1,\ldots,w_4)^T,\qquad w_k=g\int_0^\infty x_{k1}(s)\,ds$$

$$\nu=(y_{51}'(\infty),\ldots,y_{54}'(\infty)),\ k=1,\ldots,4$$

На основании (2.5) получаем

$$g_j'=2\varphi_j^{(2)}(w_2,w_3,w_1),\ g_4'=g_5'=0,\ j=1,\,2,\,3$$

Таким образом если вторые вариации аэродинамических сил и моментов этих сил таковы, что

$$\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{3}y_{5i}'(\infty)x_{ij}(\infty)\varphi_j^{(2)}(w_2,w_3,w_1)\neq0$$

то рассматриваемое движение неустойчиво. Отсюда следует, что если

$\varphi_j^{(2)}(w_2, w_3, w_1)=0$ $(j=1, 2, 3)$, то вопрос об устойчивости или неустойчивости решается членами третьего или более высокого порядка правых частей уравнений.

В заключение отметим следующее.

Нестационарность обтекания учитывается в формулах (1.5) линейными интегральными членами. При более точном учете нестационарности необходимо в выражение для R_1 включить также интегральные члены, зависящие от квадратичных функций переменных [12]. Однако такое уточнение не отразится на полученном результате, поскольку оно затрагивает лишь квадратичные члены подсистемы продольного движения. В рассматриваемом же случае постоянная g_2 определяется линейными и квадратичными членами подсистемы бокового движения.

Требование, чтобы интегральные ядра уравнений имели экспоненциально-полиномиальную структуру (2.3), может быть ослаблено и заменено условием непрерывности и экспоненциального убывания (2.2) для уравнений, приведенных к форме (2.1). При этом сохраняются условия, наложенные на характеристические показатели, и добавляется предположение, что матрица фундаментальной системы решений линеаризованных уравнений, ей обратная и производные от этих матриц допускают при $t\to+\infty$ экспоненциальные оценки такого же рода, какие имеют место для указанных матриц в случае интегральных ядер экспоненциально-полиномиального вида. Тогда можно указать величину, аналогичную постоянной g_2, из необращения в нуль которой будет следовать неустойчивость невозмущенного движения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белоцерковский С. М., Кочетков Ю. А., Красовский А. А., Новицкий В. В.* Введение в аэроавтоупругость. М.: Наука, 1980. 383 с.
2. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР. 1962. 535 с.
3. *Бюшгенс Г. С., Студнев Р. В.* Динамика самолета: Пространственное движение. М.: Машиностроение, 1983. 320 с.
4. *Астапов И. С., Белоцерковский А. С., Морозов В. И.* Нелинейные интегродифференциальные уравнения аэроупругости // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 6. С. 61–70.
5. *Быков Я. В.* О некоторых задачах теории интегродифференциальных уравнений. Фрунзе: Изд-во АН КиргССР, 1957. 327 с.
6. *Быков Я. В.* О некоторых вопросах качественной теории интегродифференциальных уравнений // Исследования по интегродифференциальным уравнениям в Киргизии. Фрунзе: Изд-во АН КиргССР, 1961. Вып. 1. С. 3–54.
7. *Астапов И. С.* Об устойчивости решений интегродифференциальных уравнений аэроавтоупругости // Вест. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1981. № 6. С. 89–95.
8. *Сергеев В. С.* Об устойчивости решений интегродифференциальных уравнений в некоторых случаях // Метод функций Ляпунова в анализе динамики систем. Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1987. С. 98–105.
9. *Сергеев В. С.* Об устойчивости решений для одного класса интегродифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. № 3. С. 518–523.
10. *Сергеев В. С.* Об устойчивости положения равновесия в одной задаче динамики твердого тела // Некоторые задачи теории устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ АН СССР, 1986. С. 35–46.
11. *Сергеев В. С.* О неустойчивости решений одного класса интегродифференциальных уравнений в критическом случае нулевого корня // Задачи исслед. устойчивости и стабилизации движения. М.: ВЦ АН СССР. 1985. С. 54–84.
12. *Морозов В. И.* Математические модели динамики аэроупругого летательного аппарата // Исследование авиационной техники с помощью ЭВМ. Тр. ВВИА им. Н. Е. Жуковского. 1981. Вып. 1310. С. 39–51.

Москва

Поступила в редакцию
26.II.1988