

УДК 533.6.011.5

О ВЛИЯНИИ ЗАКРУТКИ ПОТОКА ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА НА ФОРМУ ОПТИМАЛЬНОЙ СВЕРХЗВУКОВОЙ ЧАСТИ КОНТУРА ОСЕСИММЕТРИЧНОГО СОПЛА С ИЗЛОМОМ

АФОНИН Г. И., БУТОВ В. Г.

В рамках модели идеального (невязкого и нетеплопроводного) газа исследовано влияние закрутки потока при входе в сопло на форму его оптимальной сверхзвуковой части с изломом в точке пересечения предельной характеристики с контуром. Для численного решения соответствующей вариационной задачи использовался прямой метод, основанный на сведении ее к задаче нелинейного программирования.

Оптимальное профилирование сверхзвуковых частей сопел для закрученных течений идеального невязкого газа рассматривалось в [1–3]. В [1] решение задачи проводилось для течений с постоянным распределением циркуляции, полной энтальпии и энтропийной функции. При входе в сверхзвуковую часть начальные данные удовлетворяли условию радиальной уравновешенности потока. В [2, 3] рассмотрено построение оптимальных контуров для закрученных течений с криволинейной линией перехода и произвольным непрерывным заданием циркуляции при входе в сопло. В отличие от [1] в [2, 3] угловая точка в минимальном сечении заменялась участком максимально допустимой кривизны. Результаты, полученные в [3, 4], указывают на слабую зависимость формы оптимального контура от способа и интенсивности закрутки потока.

Ниже построены два типа оптимальных контуров. Контуров первого типа имеют за угловой точкой зону, где давление растет. Подобные контуры исследовались в [5]. Рост давления в них на начальных участках сверхзвуковых частей связан с сильной неоднородностью потока, из-за внезапного сужения дозвуковых частей. Контуров второго типа строились с учетом ограничения на рост давления на их начальных участках.

Установлено, что оптимальные контуры слабо отличаются по форме и по величине выигрыша по сравнению с контурами, оптимальными для незакрученного течения. Контуров, в которых исключены зоны, где возможен рост давления, отличаются от оптимальных контуров, построенных без учета ограничения на рост давления, только на начальных участках.

1. Пусть закрученный поток газа течет в направлении оси x прямоугольной системы координат, совпадающей с осью симметрии сопла. Ось y , как показано на фиг. 1, проходит через минимальное сечение гладкого контура, о выборе которого будет сказано ниже.

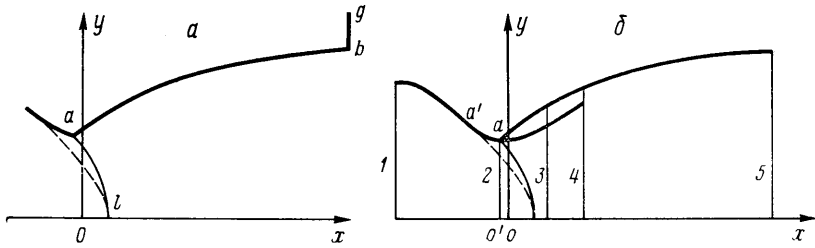
Поставим вариационную задачу о профилировании расширяющейся части контура сопла максимальной тяги при заданном дозвуковом участке образующей и фиксированном давлении окружающей среды $p^+ = \text{const}$. Известно, что форма дозвуковой части сопла при заданных на ее входе распределениях полной энтальпии $H(\psi)$, энтропийной функции $S(\psi)$, циркуляции $\Gamma(\psi)$ (ψ — функция тока) и наклона вектора скорости полностью определяет течение левее предельной характеристики al (фиг. 1, a). В силу этого параметры течения, необходимые для построения оптимальной конфигурации, можно считать на ней известными.

Будем считать также заданными ограничения на максимально допустимую длину X и максимально допустимую ординату Y сопла.

При перечисленных выше условиях требуется построить контур сопла ag , обеспечивающий максимум тяги

$$R = F_0 + F \quad (1.1)$$

где F_0 — поток импульса через сечение $o'a$ (фиг. 1, b), F — интеграл сил



Фиг. 1

давления по контуру ag . Так как F_0 — фиксированная величина, то максимум функционала R достигается одновременно с максимумом функционала

$$F = 2\pi \int_a^g (p - p^+) y y' dx \quad (1.2)$$

Здесь p — давление, а y' — производная контура сопла.

Из постановки задачи непосредственно следует наличие у искомого участка образующей излома в начальной точке a (наклон контура справа от a не обязан совпадать с наклоном заданного участка слева от нее), обтекаемой с образованием волны разряжения. Кроме того, в общем случае оптимальная конфигурация содержит торец bg [6], появляющийся из-за ограничения на длину. В данной постановке считается, что торец не обтекается газом.

2. Для численного решения сформулированной вариационной задачи применим прямой метод [7].

Искомый контур будем искать в виде разложения по базисным функциям с неизвестными коэффициентами

$$y = \sum_{k=0}^N c_k T_k \left(\frac{2x - x_b - x_a}{x_b - x_a} \right) \quad (2.1)$$

Здесь x_a, x_b — абсциссы начальной и конечной точек контура (фиг. 1), T_k — полиномы Чебышева, ортогональные на промежутке $[-1, 1]$. В (2.1) удобно выделить производную контура в точке a y_a' , ординату y_b и производную контура в точке b y_b' . Тогда с учетом требования непрерывности контура в точке a получим следующие выражения для коэффициентов:

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2} (y_a - y_b) + (y_a' - y_b') \frac{x_b - x_a}{16} + \sum_{k=2}^M (k^2 - 1) c_{2k} \\ c_1 &= \frac{9}{16} (y_b - y_a) - (y_a' - y_b') \frac{x_b - x_a}{32} + \frac{1}{8} \sum_{k=2}^M [(2k+1)^2 - 9] c_{2k+1} \\ c_2 &= (y_b' - y_a') \frac{x_b - x_a}{16} - \sum_{k=2}^M k^2 c_{2k} \\ c_3 &= \frac{1}{16} (y_a - y_b) + \frac{1}{32} (y_a' - y_b') (x_b - x_a) - \\ & - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^M [(2k+1)^2 - 1] c_{2k+1} \quad \left(M = \left[\frac{N}{2} \right] \right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Таким образом, для контура, заданного в виде (2.1), получим

$$F = F(y'_a, y_b, y'_b, c_1, \dots, c_N) \quad (2.3)$$

и вариационная задача поиска оптимального контура сводится к определению параметров $y'_a, y_b, y'_b, c_1, \dots, c_N$, при которых F имеет максимум.

Ниже будет показано, что при учете ограничения на рост давления за точкой a искомую оптимальную конфигурацию необходимо представлять в виде двух участков. В этом случае каждый участок аппроксимируется аналогично (2.1). В (2.3), кроме коэффициентов разложений для каждого участка, должна входить абсцисса точки стыковки [7].

В [5] для обеспечения безотрывности течения принималось условие недопустимости роста давления на начальном участке сверхзвуковой части сопла в виде неравенства для градиента давления вдоль контура

$$dp/dx \quad (2.4)$$

В рамках прямого метода аналогичное ограничение введем с помощью штрафной функции

$$\Phi = \int_a^b \varphi(x) dx$$

$$\varphi(x) = dp/dx, \quad dp/dx > 0$$

$$\varphi(x) = 0, \quad dp/dx \leq 0$$

Ограничение (2.4) играет роль, аналогичную заданию участка максимально допустимой кривизны. Поэтому естественно аппроксимировать искомый контур двумя участками с условием непрерывности углового наклона в точке их стыковки. Это подтверждают расчеты, показавшие, что с помощью единой аппроксимации искомого контура (2.1) при учете ограничения (2.4) построить оптимальный контур эффективно (т. е. используя небольшое число коэффициентов) не удается.

Таким образом, для решения вариационной задачи необходимо найти максимум функции

$$I = F(\mathbf{q}) - k\Phi^2(\mathbf{q}) \quad (2.5)$$

$$\mathbf{q} = (y'_a, x_c, y_c, y'_c, c_1^1, \dots, c_N^1, y_b, y'_b, c_1^2, \dots, c_N^2)$$

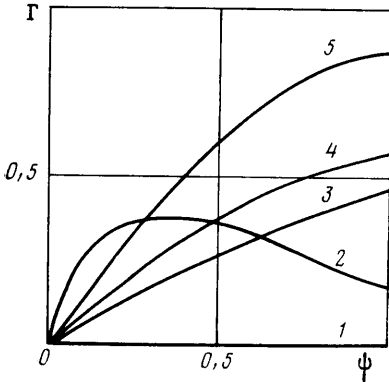
Здесь x_c, y_c, y'_c — абсцисса, ордината и угловой наклон контура в точке стыковки; верхним индексом помечается номер участка, k — коэффициент штрафа ($k > 0$).

3. Остановимся на расчете течения в области правее предельной характеристики al (фиг. 1, б), параметры которого необходимы для вычисления I . Так как течение в начальных сечениях сверхзвуковой части сопла носит трансзвуковой характер, то использовался метод [8] расчета течений в до- и трансзвуковой частях сопел с угловой точкой. При этом методом установления с использованием известной схемы Мак-Кормака осуществляется решение прямой задачи для некоторого гладкого контура в области между сечениями I и 4 [9], показанными на фиг. 1, б. Затем по полученным параметрам течения определяются точки a' и a пересечения его со звуковой линией $a'l$ и предельной характеристикой al соответственно. Точка a является началом сверхзвуковой части сопла. Ее положение в дальнейшем расчете не меняется, а при вариациях сверхзвуковой части контура она становится точкой его излома, обтекаемого с образованием волны разряжения.

Далее расчет проводится следующим образом. Для заданного положения угловой точки, используя полученное поле течения в качестве начального, методом установления проводится расчет трансзвукового тече-

ния в области между сечениями 2 и 4 (см. фиг. 1, б). Это оправдано, так как при вариациях контура ab течение левее сечения 2 не меняется.

Течение в окрестности точки a в процессе установления на каждом шаге по времени рассчитывается методом характеристик и затем «сшивается» на следующем слое по x (за сечением 2 на фиг. 1, б) разностной сетки для схемы Мак-Кормака. Начиная с сечения 3, в котором течение полностью сверхзвуковое, расчет проводится маршевым методом с использованием стационарного аналога схемы Мак-Кормака.



Фиг. 2

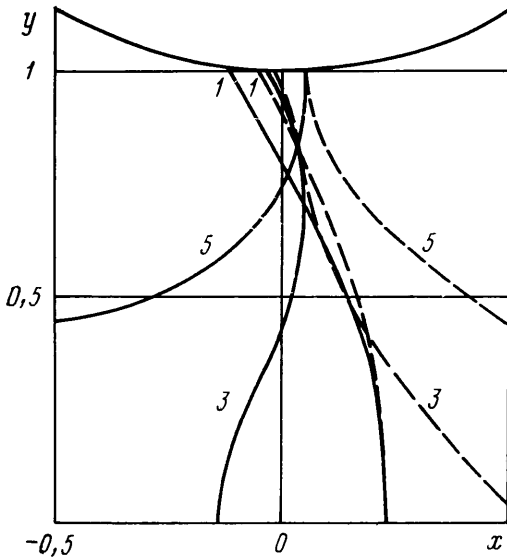
$K=0$ в (2.5). В аппроксимации этих контуров (2.1) оказалось достаточно выбрать $N=3$. В (2.3) остаются только независимые переменные y'_a , y'_b , а выражение (2.1) является полиномом третьей степени. На хорошую аппроксимацию оптимальных контуров для незакрученных течений полиномами третьей степени указывалось в [10–12]. Законы закрутки (циркуляции $\Gamma(\psi)$) на входе в сопло задавались такими же, как и в [3]. Они изображены на фиг. 2, где n — номер закона закрутки.

На фиг. 3 сплошными и штрихованными линиями изображены соответствующие законам закрутки 1, 3, 5 звуковые линии и предельные характеристики.

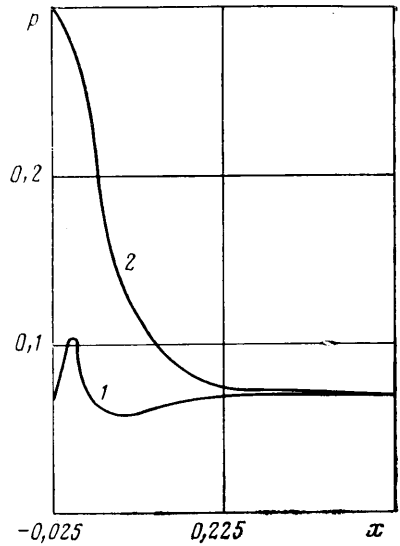
На фиг. 4 кривая 1 — распределение давления вдоль начальной части оптимального контура, построенного для закрученного течения с законом закрутки $n=2$. Видно, что за угловой точкой имеется зона немоного изменения давления с выраженными участками резкого роста и падения. Характеристики таких контуров собраны в табл. 1. В столбцах для законов закрутки n и длины сопла X в соответствии с обозначениями фиг. 1 приводятся: μ — коэффициент расхода; x_a — абсцисса угловой точки; M_a — число Маха в точке a (слева от нее); α — угол наклона контура (в градусах) в точке a (справа от нее); β — угол наклона контура (в градусах) на срезе сопла; y_b — степень расширения сопла; R — тяга сопла (1.1); F — интеграл давления (1.2) вдоль ab ; J — удельный импульс; R° — тяга, рассчитанная для незакрученного течения. Здесь и далее все линейные раз-

Таблица 1

n	X	μ	x_a	M_a	α	β	y_b	R	F	J	R°
1	10	0,99	-0,0412	1,17	30,4	10,3	4,356	5,1885	1,2265	2,6313	5,1885
2	10	0,84	-0,0231	1,19	32,2	9,9	4,391	4,4094	1,1221	2,6172	5,1814
3	10	0,93	-0,0140	1,07	31,2	10,5	4,375	4,8646	1,2043	2,6216	5,1792
4	10	0,87	0,0179	1,05	31,4	10,3	4,376	4,5512	1,1592	2,6340	5,1794
5	10	0,76	0,0494	1,01	31,6	10,1	4,377	4,0438	1,0746	2,6523	5,1809
1	5	0,99	-0,0412	1,17	26,5	12,4	2,788	4,9587	0,9966	2,5148	4,9587
2	5	0,84	-0,0231	1,19	28,9	12,3	2,829	4,2180	0,9331	2,5050	4,9530
3	5	0,93	-0,0140	1,07	28,5	12,5	2,816	4,6557	0,9954	2,5090	4,9510
4	5	0,87	0,0179	1,05	28,9	12,2	2,812	4,3570	0,9650	2,5217	4,9512
5	5	0,76	0,0494	1,01	29,2	12,1	2,810	3,8682	0,8998	2,5377	4,9513



Фиг. 3



Фиг. 4

меры отнесены к размерному радиусу r_* минимального сечения $o'o$ (фиг. 1, б). Тяга сопла отнесена к $r_*^2 p_0$, где p_0 — размерное давление торможения.

Сравнение оптимальных контуров по геометрическим характеристикам для всех n дает максимальное отличие по α и β для $X=10$ менее 6%, а для $X=5$ — менее 10 и 4% соответственно; степени расширения y_b отличаются менее чем на 1%.

Эффективность построения оптимальных контуров можно оценить по разности значений R° . Максимальная разность составляет 0,16%.

Закруткам с номерами $n=3, 4, 5$ отвечают возрастания интенсивности. В то же время для соответствующих им оптимальных контуров разность между R° и значением тяги оптимального контура для незакрученного течения ($n=1$) убывает с ростом n . Кроме того, в них с ростом n точка a сдвигается вправо, а угол разворота потока в ней уменьшается. Так, для течения с $\Gamma(\psi)=0$ и $X=10$ этот угол равен $32,8^\circ$, а в оптимальном контуре для течения с закруткой по закону $n=5$ и $X=10$ он равен $28,8^\circ$. Это приводит к близким значениям тяги в них, несмотря на меньшую длину варьiruемого участка сопла, построенного для течения с закруткой по закону $n=5$.

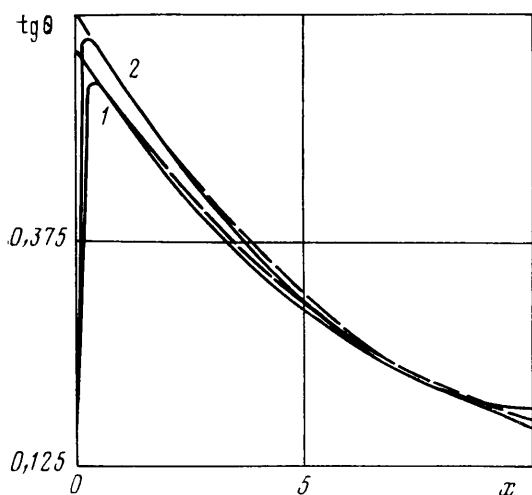
Другая часть расчетов оптимальных контуров проведена с использованием штрафной функции (2.5). На фиг. 4 кривые 1 и 2 — распределения давления на начальной части оптимального контура без учета и учетом ограничения на рост давления за угловой точкой.

Результаты этой серии расчетов приведены в табл. 2. Максимальное отличие приведенных контуров по величине R° составляет 0,12%. Ординаты среза оптимальных контуров различаются менее чем на 3%.

Как видно из табл. 1 и 2, интегральные характеристики соответствующих контуров отличаются не более чем на 0,05%. Тем не менее опти-

Таблица 2

n	X	α	β	y_b	R	F	J	R°
1	10	10,02	10,65	4,239	5,1863	1,2243	2,6302	5,1863
2	10	5,21	10,19	4,364	4,4086	1,1224	2,6182	5,1798
5	10	15,88	9,48	4,284	4,0434	1,0750	2,6526	5,1797



Фиг. 5

мальные контуры второй группы предпочтительнее, так как в них исключена возможность отрыва пограничного слоя.

На фиг. 5 штриховыми и сплошными линиями показаны распределения $\text{tg } \theta$ (θ — угол наклона вектора скорости к оси x) для законов закрутки $n=1$ и 2, отвечающих $K=0$ и $K \neq 0$ в (2.5). Оптимальные контуры (см. также табл. 1, 2) существенно отличаются друг от друга только в окрестности начальной точки a . Тем не менее разности значений F для них малы. Этот факт можно объяснить, рассмотрев подынтегральную функцию $(p-p^+) \times$

$\times y u'$ в выражении (1.2) для функционала F . В контурах первого типа значение $y u'$ выше, а $p-p^+$ ниже в окрестности точки a по сравнению с соответствующими значениями в контурах второго типа (см. фиг. 4, 5), что ведет к слабому отличию значений $(p-p^+) y u'$ между ними.

Таким образом, проведенные расчеты оптимальных контуров показали, что их форма незначительно отличается для различных законов закрутки. Необходимость профилирования в рассмотренной постановке определяется тем, является ли существенной для практики величина выигрыша по тяге порядка 0,15%.

В заключение авторы благодарят Н. И. Тилляеву и А. Н. Крайко за обсуждения, а также А. А. Глазунова за помощь при выполнении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Наумова И. Н., Шмыглевский Ю. Д. Увеличение тяги сопла вращением потока // Изв. АН СССР. МЖГ. 1967. № 1. С. 34–37.
2. Guderley K. G., Tabak D., Breiter M. C., Bhutani O. P. Continuous and discontinuous solutions for optimum thrust nozzles of given length // J. Optimization Theory and Applications. 1973. V. 12. № 6. P. 588–628.
3. Тилляева Н. И. О профилировании сверхзвуковых частей осесимметричных сопел для неравномерных и закрученных течений // Изв. АН СССР. МЖГ. 1975. № 3. С. 124–131.
4. Крайко А. Н., Тилляева Н. И. Об учете неравномерности потока в минимальном сечении при оптимальном профилировании расширяющейся части сопла // Изв. АН СССР. МЖГ. 1982. № 1. С. 184–186.
5. Крайко А. Н., Тилляева Н. И., Щербаков С. А. Сравнение интегральных характеристик и формы профилированных контуров сопел Лавала с «плавным» и с «внезапным» сужениями // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 4. С. 129–137.
6. Крайко А. Н. Вариационные задачи газовой динамики. М.: Наука, 1979. 447 с.
7. Бутов В. Г., Васенин И. М., Шелуха А. И. Применение методов нелинейного программирования для решения вариационных задач газовой динамики // ПММ, 1977. Т. 41. Вып. 1. С. 59–64.
8. Афонин Г. И., Бутов В. Г. Расчет двумерных течений идеального газа в соплах Лавала с угловой точкой в минимальном сечении // Газотермодинамика многофазных потоков в энергоустановках. Харьков, 1982. С. 19–21.
9. Афонин Г. И., Бутов В. Г., Глазунов А. А. К численному решению задачи о смешанном течении закрученного потока идеального газа в сопле Лавала // Численные методы механики сплошной среды. 1986. Т. 17. № 4. С. 3–12.
10. Rao G. V. Approximation of optimum thrust nozzle contour // ARS J. 1960. V. 30. № 6. P. 561–562.
11. Дригов Г. В., Тишин А. П. О профилировании сопел, работающих на газе с частицами конденсата // Изв. АН СССР. МЖГ. 1971. № 1. С. 170–175.
12. Афонин Г. И., Бутов В. Г. К применению методов нелинейного программирования для решения вариационных задач профилирования сопел // Газ. динамика. Томск: Изд-во Том. Ун-та, 1984. С. 38–40.

Томск

Поступила в редакцию
22.III.1988