

УДК 532.59:539.3

**НЕЛИНЕЙНЫЕ УСТАНОВИВШИЕСЯ КОЛЕБАНИЯ УПРУГОЙ  
ПЛАСТИНЫ, ПЛАВАЮЩЕЙ НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ  
КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ**

**ГЛАДУН О. М., ФЕДОСЕНКО В. С.**

Исследуются нелинейные установившиеся волны в идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины, на поверхности которой плавает тонкая упругая пластина. Ранее, в [1-3] рассматривалась аналогичная задача для бесконечно глубокой жидкости. Было отмечено существование спектра резонансных длин волн, при которых решения Стокса не имеют смысла, так как амплитуды нелинейных добавок обращаются в бесконечность. Для первых двух значений из этого спектра найдено, что в окрестности резонансных длин волн происходит бифуркация решения.

Дальнейшие исследования [4] показали, что установившиеся и стоячие изгибно-гравитационные волны и капиллярно-гравитационные волны имеют много сходных свойств. Установлена возможность нелинейного волнового взаимодействия и проанализирован характер этого взаимодействия.

Изучению нелинейного волнового синхронизма изгибно-гравитационных волн посвящены работы [5, 6]. В [6] нелинейные уравнения волнового синхронизма исследовались с помощью методики алгебр и групп Ли - Беклунда.

В данной работе кроме получения решений методом возмущений, показано, что в случае нелинейного волнового взаимодействия при определенном соотношении между параметрами взаимодействующих волн возможно существование установившихся составных волн.

1. Рассмотрим плоское потенциальное движение идеальной несжимаемой жидкости, на поверхности которой плавает тонкая упругая изотропная пластина толщины  $h$ ; ось  $x_1$  совпадает с поверхностью раздела пластины и жидкости в невозмущенном состоянии, ось  $z_1$  направлена вертикально вверх. Снизу жидкость ограничена горизонтальным дном  $z_1 = -H_1$ . Исследуем задачу о свободных волнах установившегося вида на поверхности раздела пластины и жидкости.

В безразмерной форме задача имеет вид [7, 8]

$$\Delta\varphi=0 \quad (|x|<\infty, \quad -H\leq z\leq\varepsilon\zeta) \quad (1.1)$$

$$-\zeta_x+\varepsilon\zeta_x\varphi_x=\varphi_z \quad (z=\varepsilon\zeta) \quad (1.2)$$

$$D\frac{1}{\mu}\zeta_{xxxx}+\kappa\zeta_{xx}-\varphi_x+\frac{1}{2}\varepsilon(\varphi_x^2+\varphi_z^2)+\frac{1}{\mu}\zeta=F(z=\varepsilon\zeta) \quad (1.3)$$

$$\varphi_z=0 \quad (z=-H) \quad (1.4)$$

$$\zeta(x+2\pi)=\zeta(x), \quad \zeta(-x)=\zeta(x), \quad \int_0^{2\pi}\zeta(x)dx=0 \quad (1.5)$$

$$x=k(x_1-ct_1), \quad z=kz_1, \quad H=kH_1, \quad \varphi^*=\frac{c}{k}\varepsilon\varphi, \quad \zeta^*=\frac{1}{k}\varepsilon\zeta$$

$$F^*=c^2\rho\varepsilon F, \quad D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)\rho g}k^4, \quad \kappa=\frac{\rho_1}{\rho}hk, \quad \mu=\frac{kc^2}{g}, \quad \varepsilon=ak$$

Здесь  $\varphi^*$  — потенциал скорости движения жидкости,  $\xi^*$  — прогиб пластины (профиль волны),  $c$  — скорость распространения волны,  $k=2\pi/\lambda$  — волновое число,  $\rho_1$  — плотность пластины,  $\rho$  — плотность жидкости,  $E$  — модуль нормальной упругости,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $a$  — амплитуда линейной волны,  $\varepsilon$  — малый параметр,  $F^*(t_1)$  — произвольная функция времени. Определению подлежат функции  $\varphi^*=\varphi^*(x, z)$  и  $\xi^*=\xi^*(x)$ , фазовая скорость  $c$ , а также функция  $F^*(t_1)$ .

Решение задачи ищем методом возмущений [3, 7]. Опуская промежуточные выкладки, с точностью третьего приближения находим

$$\varphi^*=\varepsilon \frac{c_0}{k} \left[ \sin x \frac{\operatorname{ch}(z+H)}{\operatorname{sh} H} + \varepsilon A_1 \sin 2x \frac{\operatorname{ch} 2(z+H)}{\operatorname{sh} 2H} + \varepsilon^2 A_2 \sin 3x \frac{\operatorname{ch} 3(z+H)}{\operatorname{sh} 3H} \right] \quad (1.6)$$

$$\xi^* = \frac{\varepsilon}{k} [\cos x + \varepsilon B_1 \cos 2x + \varepsilon^2 (B_2 \cos x + B_3 \cos 3x)] \quad (1.7)$$

$$c=c_0(1+\varepsilon^2 c_1), \quad c_0 = \sqrt{\frac{g}{k\theta_0}}, \quad \theta_0 = \frac{\kappa + \lambda_1}{1+D} \quad (1.8)$$

$$B_1 = \frac{3\lambda_1^2 - 1}{4(R+2\lambda_2)}, \quad c_1 = \frac{5\lambda_1^4 - 2\lambda_1^2 - 4R\lambda_1(\lambda_1^2 - 2) + 9}{16(R+2\lambda_2)(\kappa + \lambda_1)}$$

$$B_2 = \frac{3\lambda_1^4 + 2\lambda_1^2 - 6R\lambda_1 - 9 + 2\kappa [4\lambda_1^3 - R(2\lambda_1^2 - 1)]}{16(R+2\lambda_2)(\kappa + \lambda_1)}$$

$$B_3 = \frac{3\lambda_3 [4\lambda_1^4 - 2\lambda_1^2 - R\lambda_1(2\lambda_1^2 + 1) - 2] + \lambda_1^5 - 12\lambda_1^3 - R\lambda_1^2(2\lambda_1^2 - 9) + 15}{8\lambda_1(R+2\lambda_2)(3\lambda_3 - P)}$$

$$R = -\theta_0(16D+1) + 4\kappa, \quad P = \theta_0(81D+1) - 9\kappa$$

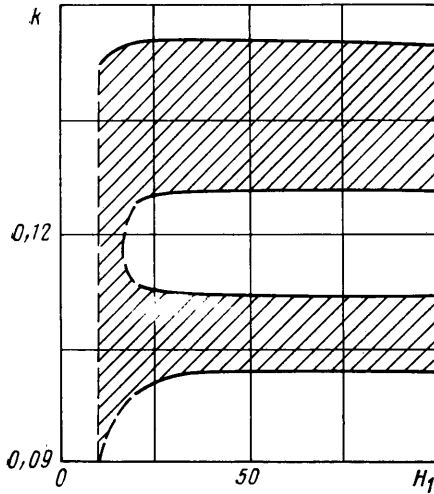
$$\lambda_n = \operatorname{cth} nH, \quad n=1, 2, \dots$$

Коэффициенты  $A_{1,2}$  здесь не выписываются. Отметим только, что они имеют ту же структуру, что и  $B_{1,3}$ .

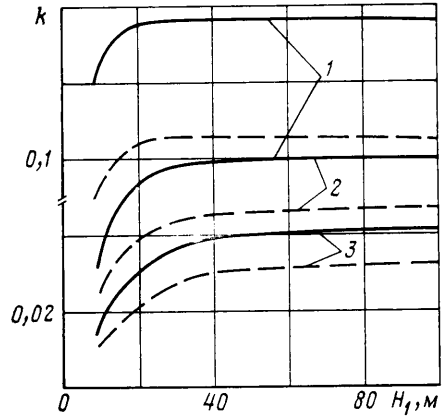
Анализ выражений (1.7), (1.8), проведенный аналогично [3], позволяет установить ряд особенностей, присущих прогрессивным изгибно-гравитационным волнам. Во-первых, если  $B_1 > 0$  ( $B_1 < 0$ ), амплитуда гребня больше (меньше) амплитуды впадины, гребень уже (шире), впадина шире (уже); во-вторых, в зависимости от знака величины  $B_2 + B_3$  высота волны  $H^* = \xi^*(0) - \xi^*(\pi)$  может быть как больше, так и меньше высоты линейной волны; в-третьих, фазовая скорость может быть как больше, так и меньше скорости линейной волны. Указанные свойства обусловлены тем, что трансцендентные уравнения  $R+2\lambda_2=0$  и  $3\lambda_3-P=0$  имеют по одному положительному действительному корню  $k_1$  и  $k_2$  соответственно, причем  $k_2 < k_1$ .

Отметим, что в малых окрестностях волновых чисел  $k_1$  и  $k_2$  решение (1.6)–(1.8) непригодно, ибо амплитуды соответствующих нелинейных приближений становятся сравнимы с амплитудой линейного приближения. Для определения промежутков непригодности решения были проведены численные расчеты. На фиг. 1 заштрихована область непригодности решения для  $h=0,2$  м,  $\varepsilon \geq 0,1$ . В каждой точке указанной области хотя бы одна из величин  $|A_1|$ ,  $|A_2|$ ,  $|B_1|$ ,  $|B_2+B_3|$ ,  $|c_1| \geq 4$ . Интересно, что в случае битого льда ( $E=0$ ) имеем  $R+2\lambda_2 > 0$ ,  $3\lambda_3 - P > 0$ , т. е. резонансных длин волн не существует.

Заметим, что вычисление каждого из последующих приближений решения задачи будет сопровождаться появлением одной резонансной длины волны, отличной от предыдущих. Получаемый (при фиксированных



Фиг. 1



Фиг. 2

$h, H_1$ ) спектр резонансных значений волнового числа есть решение последовательности трансцендентных уравнений

$$n^2(n^2-1)D_1\kappa_1 k^5 + n(n^3 \operatorname{cth}(kH_1) - \operatorname{cth}(nkH_1))D_1 k^4 + (1-n^2)\kappa_1 k + \operatorname{cth}(kH_1) - n \operatorname{cth}(nkH_1) = 0, \quad n=2, 3, \dots \quad (1.9)$$

$$D_1 = \frac{D}{k^4}, \quad \kappa_1 = \frac{\kappa}{k}$$

каждое из которых имеет один положительный действительный корень  $k_{n-1}$ , причем

$$k_{n-1} < (n^2 D_1)^{-1/4}$$

На фиг. 2 приведены графики зависимости  $k_1$  (сплошная линия) и  $k_2$  (штриховая линия) от глубины бассейна для различных значений толщины пластины ( $h=0,2$  м — кривые 1,  $h=0,6$  м — 2,  $h=1$  м — 3). Из графиков видно, что для бассейна малой глубины резонансные значения волнового числа уменьшаются, при уменьшении толщины пластины  $k_1$  и  $k_2$  увеличиваются. Теория глубокой воды дает приемлемые результаты уже при  $kH_1 \approx 2,4-4$  (в зависимости от толщины пластины), т. е. при  $\lambda/H_1 \approx 1,6-3$ . Последнее формально объясняется наличием пятой степени при  $k$  в уравнениях (1.9), а физически соответствует более быстрому затуханию изгибно-гравитационных волн с глубиной в отличие от гравитационных волн на «чистой воде». Указанный факт неоднократно встречается в линейной теории [8].

Введем два малых параметра  $\varepsilon_1 = a/H_1$  и  $\varepsilon_2 = kH_1$ . Предположим, что  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2^n$ ,  $n=3, 4, \dots$ . Тогда из (1.7) с точностью до членов порядка  $\varepsilon_2^n$  получаем выражение для профиля длинных волн

$$\zeta^* = a \left[ \cos x + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2^2} \frac{3}{4(1+3d_2)} \cos 2x + \varepsilon_1 \frac{45d_1+3d_2+2}{4(1+3d_2)^2} \cos 2x + \frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_2^4} f(n) \frac{27}{64(1+3d_2)^2} \cos 3x \right] \quad (1.10)$$

$$f(n) = \begin{cases} 0, & n \geq 5 \\ 1, & n = \{3, 4\} \end{cases}, \quad d_1 = \frac{D_1}{H_1^4}, \quad d_2 = \frac{\kappa_1}{H_1}$$

Отметим, что разложение (1.10) справедливо вне малых окрестностей  $k_1$  и  $k_2$ .

Очевидно, что в окрестности резонансных длин волн необходимо проводить дополнительные исследования.

Заметим, что уравнение (1.9), которое при  $n=2, 3, \dots$  определяет спектр резонансных длин волн, эквивалентно равенству

$$n\sigma_0(k) = \sigma_0(nk) \quad (1.11)$$

где  $\sigma_0$  — частота линейной волны. Последнее есть частный случай нелинейного волнового синхронизма  $n+1$  взаимодействующих волн, характерного для диспергирующих сред [9, 10].

Так как собственным функциям

$$\varphi_1 = \sin x \frac{\text{ch}(z+H)}{\text{sh} H}, \quad \varphi_n = \sin nx \frac{\text{ch} n(z+H)}{\text{sh} nH}$$

линейной задачи, соответствующей (1.1)–(1.5), отвечают собственные числа  $\mu_1$  и  $\mu_n$ , равные между собой при  $k=k_{n-1}$ , что следует из (1.11), то первое (линейное) приближение для  $\varphi$  при  $k=k_{n-1}$  по методу возмущений следует искать в виде

$$\varphi_0 = \sin x \frac{\text{ch}(z+H)}{\text{sh} H} + \alpha_n \sin nx \frac{\text{ch} n(z+H)}{\text{sh} nH} \quad (1.12)$$

2. Проведем исследование при  $k=k_1$ . Первое приближение для  $\varphi$  ищем в виде (1.12) при  $n=2$ . При нахождении каждого из приближений для  $\varphi$  и  $\xi$  получаем один неопределенный коэффициент, который определяется при вычислении последующих приближений. Коэффициент  $\alpha_2$  определяем, вычисляя второе приближение. Опуская промежуточные выкладки, с точностью второго приближения находим

$$\xi_{\pm} = \cos x + \alpha_2 \cos 2x + \varepsilon (B_1 \cos x + B_2 \cos 2x + B_3 \cos 3x + B_4 \cos 4x) \quad (2.1)$$

$$\alpha_2 = \pm \left( \frac{c_{\pm} = c_0(1 + \varepsilon c_1)}{4(2\kappa + \lambda_2)} \right)^{1/2}, \quad c_1 = \alpha_2 \frac{3\lambda_1^2 - 1}{4(\kappa + \lambda_1)}$$

$$B_1 = \alpha_2 \frac{\lambda_1^3 + 2\kappa(2\lambda_1^2 + 1) + 3\lambda_1}{4\lambda_1(\kappa + \lambda_1)}, \quad B_2 = \frac{2}{3\lambda_1^2 - 1} \left\{ \alpha_2^4 [2\lambda_2^3 + 2A_1(1 - 3\lambda_1^2) + 4\lambda_2 + 2] + \right.$$

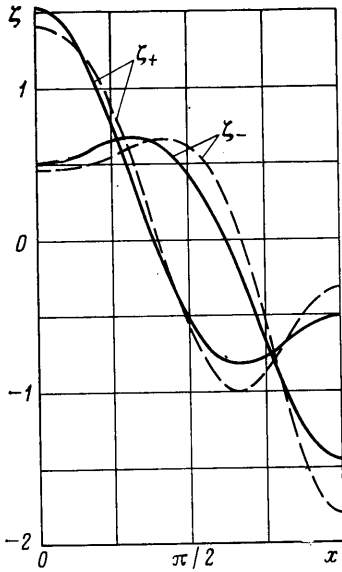
$$\left. + \frac{1}{8} \alpha_2^2 [ \lambda_1^2 (18\lambda_2 + \lambda_1) + 6\lambda_2 + 5\lambda_1 - A_2(6\lambda_3(2\lambda_2 + \lambda_1) + 2\lambda_1^2 - 12) - \right.$$

$$\left. - \frac{(3\lambda_1^2 - 1)^2}{\kappa + \lambda_1} \right] - \frac{1}{16} (8\lambda_1^3 - \lambda_1 + 5) \left. \right\} + \frac{1}{2} \lambda_1$$

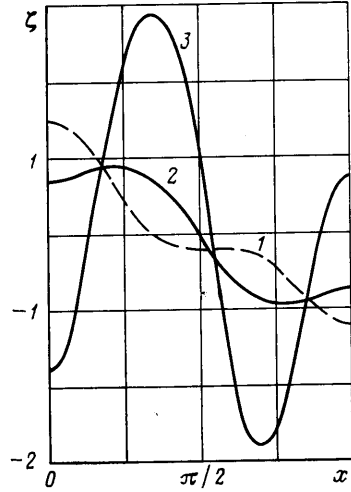
$$B_3 = -\alpha_2 \frac{9\lambda_3(2\lambda_2 + \lambda_1) + 3\lambda_1^2 - 18}{2(24\kappa - 9\lambda_3 + 32\lambda_2 - 13\lambda_1)}, \quad B_4 = \alpha_2^2 \frac{1 - 3\lambda_2^2}{36\kappa - 4\lambda_4 + 34\lambda_2 - 16\lambda_1}$$

$$A_1 = \frac{36\kappa\lambda_2 + 35\lambda_2^2 - 8\lambda_1^2 - 11}{36\kappa - 4\lambda_4 + 34\lambda_2 - 16\lambda_1}, \quad A_2 = \frac{24\kappa(2\lambda_2 + 1) + 64\lambda_2^2 - 7\lambda_1^2 - 15}{2(24\kappa - 9\lambda_3 + 32\lambda_2 - 13\lambda_1)}$$

Таким образом, при  $k=k_1$  происходит ветвление решения: возможно существование двух волн одинаковой длины, но с разными амплитудами и фазовыми скоростями, причем фазовые скорости различаются на величину  $2\varepsilon c_0 |c_1|$ . На фиг. 3 для  $\varepsilon=0,1$  и  $h=1$  м изображены графики  $\xi_{\pm}$  для бесконечно глубокой жидкости (сплошные линии) и для  $H_1=20$  м



Фиг. 3



Фиг. 4

(штриховые линии). Из графиков видно, что при достаточно небольших глубинах бассейна профили  $\zeta_{\pm}$  резонансных волн довольно значительно отличаются от профилей соответствующих волн на глубокой воде. Однако при небольшой толщине пластины ( $h < 0,6$  м) указанное различие незначительно. Последнее может непосредственно следовать из анализа зависимостей, изображенных на фиг. 2.

Решение (2.1) справедливо при  $k = k_1$ . Для нахождения решения в окрестности  $k = k_1$  представим безразмерные параметры  $D$  и  $\kappa$ , зависящие от  $k$ , в виде

$$D = D_0(1 + \varepsilon a_1), \quad \kappa = \kappa_0(1 + \varepsilon b_1), \quad D_0 = D_1 k_1^4, \quad \kappa_0 = \kappa_1 k_1 \quad (2.2)$$

Методом возмущений находим выражения, аналогичные (2.1). Здесь выпишем лишь выражения для коэффициентов  $\alpha_2, c_1$

$$\alpha_2 = \frac{1}{3\lambda_1^2 - 1} \cdot \frac{\kappa_0 + \lambda_1}{2(\kappa_0 + \lambda_2)} \left\{ \alpha^* \pm \left[ \alpha^{*2} + \frac{2\kappa_0 + \lambda_2}{\kappa_0 + \lambda_1} (3\lambda_1^2 - 1)^2 \right]^{1/2} \right\}$$

$$\alpha^* = b_1 \frac{3(4D_0\kappa_0 + 20D_0\theta_0 - \kappa_0)}{D_0 + 1}, \quad \theta_0 = \frac{\kappa_0 + \lambda_1}{D_0 + 1} \quad (2.3)$$

$$c_1 = \frac{1}{2(\kappa_0 + \lambda_1)} \left[ \frac{1}{2} \alpha_2 (3\lambda_1^2 - 1) + b_1 (4D_0\theta_0 - \kappa_0) \right]$$

Таким образом, в окрестности  $k = k_1$  также происходит бифуркация решения задачи. Расчеты показывают, что при  $b_1 \neq 0$ , когда  $|b_1|$  возрастает и  $k = k_1(1 + \varepsilon b_1)$  принадлежит интервалу  $(k_1 - \delta_1; k_1 + \delta_2)$ , входящему в промежутки непригодности решения (1.6)–(1.8), происходит следующее. Амплитуда одной из волн ( $\zeta_-, k > k_1; \zeta_+, k < k_1$ ) убывает по сравнению с амплитудой соответствующей волны, отвечающей решению (2.1), профиль стремится к форме профилей волн, описываемых решением (1.7). Амплитуда другой волны ( $\zeta_+, k > k_1; \zeta_-, k < k_1$ ) возрастает, профиль имеет выраженную «двухгорбую» форму.

3. Найдем решение при  $k = k_2$ . Первое приближение для  $\varphi$  ищем в виде (1.12) при  $n = 3$ . Для определения коэффициента  $\alpha_3$ , вычисляя третье

приближение, получаем кубическое уравнение

$$f(\alpha_3) = f_3 \alpha_3^3 + f_2 \alpha_3^2 + f_1 \alpha_3 + f_0, \quad f_i = f_i(\kappa, H) \quad (3.1)$$

Коэффициенты  $f_i$  ввиду громоздкости не выписываются. Выражения для определения профиля волны и фазовой скорости имеют вид

$$\xi = \cos x + \alpha_3 \cos 3x + \varepsilon (B_2 \cos 2x + B_3 \cos 3x + B_4 \cos 4x + B_6 \cos 6x) \quad (3.2)$$

$$c = c_0 (1 + \varepsilon^2 c_2)$$

$$B_2 = \frac{4[\alpha_3(12\lambda_3\lambda_2 + 6\lambda_3\lambda_1 + 2\lambda_1^2 - 12) + 3\lambda_1^2 - 1]}{24\kappa - 13\lambda_1 + 32\lambda_2 - 9\lambda_3}$$

$$B_4 = -\frac{8\alpha_3[3\lambda_3\lambda_1 + 4\lambda_4(3\lambda_3 + \lambda_1) - 13]}{168\kappa - 64\lambda_4 + 153\lambda_3 - 35\lambda_1}$$

$$B_6 = -\frac{4\alpha_3^2(27\lambda_3^2 - 9)}{1512\kappa - 96\lambda_6 + 777\lambda_3 - 243\lambda_1}$$

$$c_2 = \frac{1}{16(\kappa + \lambda_1)} \{4B_2(3\lambda_1^2 - 1) - 4\lambda_1^3 + 8\lambda_1 + \alpha_3[B_2(4\lambda_1^2 + 12\lambda_3(2\lambda_2 + \lambda_1) - 24) + B_4(16\lambda_4(3\lambda_3 + \lambda_1) + 4(3\lambda_3\lambda_1 - 13)) - 6\lambda_1^2(3\lambda_3 + 1) - 9\lambda_3 + 27\lambda_1] + \alpha_3^2[126\lambda_3 + 74\lambda_1 - 2(3\lambda_3 + \lambda_1)(4\lambda_4(3\lambda_3 + \lambda_1) + 6\lambda_3\lambda_2 + \lambda_1^2)]\}$$

Коэффициент  $B_3$  может быть определен при вычислении четвертого приближения.

Численные расчеты показывают, что уравнение (3.1) имеет три различных действительных корня. Таким образом, при  $k = k_2$  также происходит ветвление решения: возможно существование трех волн одинаковой длины, но с разными амплитудами и фазовыми скоростями.

Численные значения корней (3.1) для  $h = 0,2$  м,  $H_1 \geq 30$  м;  $h = 0,6$  м,  $H_1 \geq 70$  м;  $h = 1$  м,  $H_1 \geq 150$  м следующие:  $\alpha_1^\circ \approx 0,37$ ,  $\alpha_2^\circ \approx -0,28$ ,  $\alpha_3^\circ \approx -2,3$ . На фиг. 4 изображены графики  $\xi$  для  $\varepsilon = 0,1$ ,  $h = 1$  м (кривая  $i$  соответствует  $\alpha_i^\circ$ ). В расчетах полагалось  $B_3 = 0$ .

Представляя  $D$  и  $\kappa$  в виде

$$D = D_0(1 + \varepsilon^2 a_1), \quad \kappa = \kappa_0(1 + \varepsilon^2 b_1), \quad D_0 = D_1 k_2^4, \quad \kappa_0 = \kappa_1 k_2 \quad (3.3)$$

методом возмущений находим решение в окрестности  $k = k_2$ . Коэффициент  $\alpha_3$  определяется из уравнения

$$f(\alpha_3) + \frac{3b_1}{20(\kappa_0 + \lambda_1)} [192\kappa_0^2 + 4\kappa_0(21\lambda_3 + 33\lambda_1) + (3\lambda_3 - \lambda_1)(27\lambda_1 - \lambda_3)] \alpha_3 = 0 \quad (3.4)$$

Численный анализ (3.4) при  $b_1 \neq 0$ , таких, что  $k = k_2(1 + \varepsilon^2 b_1)$  принадлежит интервалу  $(k_2 - \delta_1', k_2 + \delta_2')$ , входящему в промежуток непригодности решения (1.6)–(1.8), показывает следующее. Если  $k > k_2$ , то  $\alpha_1 > \alpha_1^\circ$ ,  $\alpha_2^\circ < \alpha_2 < 0$ ,  $\alpha_3 < \alpha_3^\circ$ . При  $k < k_2$  существует такое  $k^*$ , что если  $k > k^*$ , то  $0 < \alpha_1 < \alpha_1^\circ$ ,  $\alpha_3^\circ < \alpha_3 < \alpha_2 < \alpha_2^\circ < 0$ , если  $k = k^*$ , то  $\alpha_3 = \alpha_2 < 0$ ,  $0 < \alpha_1 < \alpha_1^\circ$ , а если  $k < k^*$ , то (3.4) имеет один действительный корень  $0 < \alpha_1 < \alpha_1^\circ$ . Для  $h = 1$  м,  $H_1 = \infty$ , например,  $k^* \approx 0,03162$ .

Таким образом, если волновое число равно или близко к одному из критических значений  $k_{1,2}$ , определяющихся из (1.9) при  $n = 2$  и 3 соответственно, происходит ветвление решения задачи. Можно показать, что при  $n \geq 4$  ветвления решения не происходит. Решение при  $n \geq 2$  фактически представляет собой составную волну. Следует заметить, что коэффициент  $\alpha_n$  в (1.12) не является произвольной величиной, а определяется

при вычислении  $n$ -го приближения и зависит от исходных параметров задачи, в том числе и от амплитуды первой гармоники, следовательно, происходит взаимодействие между первой и  $n$ -й гармониками.

4. Проведем исследование нелинейного взаимодействия между первой и второй гармониками с точки зрения волнового синхронизма. Записывая граничные условия (1.2)–(1.4) в обычной форме для нестационарного движения, вводя безразмерные  $x=kx_1$ ,  $t=\sigma_1 t_1$ ,  $\sigma=\sigma_1/\sqrt{gk}$ ,  $\xi^*=a\xi$ ,  $\varphi^*=a\sqrt{g/k}\varphi$ , где  $\sigma_1$  – частота линейной волны, представляя  $D$  и  $\kappa$  в виде (2.2) (случай неполного согласования длин первой и второй гармоник), ищем решение методом возмущений. Первое приближение  $\xi$  и  $\varphi$  представляем в виде

$$\begin{aligned} \xi_0 &= \sum_{n=1}^2 [A_n(\tau)e^{in\tau} + A_n^*(\tau)e^{-in\tau}], \quad \gamma = x - t, \quad \tau = \varepsilon t \\ \varphi_0 &= \sum_{n=1}^2 [B_n(\tau)e^{in\tau} + B_n^*(\tau)e^{-in\tau}] \frac{\operatorname{ch} n(z+H)}{\operatorname{sh} nH} \end{aligned} \quad (4.1)$$

где  $A_n^*$  и  $B_n^*$  – комплексно-сопряженные с  $A_n$  и  $B_n$ .

Подставляя (4.1) в (1.2)–(1.4), из первого приближения находим  $\sigma$  и зависимость между  $B_n$  и  $A_n$ , при этом  $\sigma = (1+D_0)/(\lambda_1 + \kappa_0)$ ,  $B_n = -i\sigma A_n$ , а зависимость  $A_n$  от  $\tau$  находится из второго приближения и определяется из следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$A_1' = -i\omega_1 A_2 A_1^* - i\omega_2 b_1 A_1, \quad A_2' = -i\omega_3 A_1^2 - i\omega_4 b_1 A_2 \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{3\lambda_1^2 - 1}{2(\lambda_1 + \kappa_0)}, & \omega_2 &= \frac{4D_0\theta_0 - \kappa_0}{2(\lambda_1 + \kappa_0)} \\ \omega_3 &= \frac{3\lambda_1^2 - 1}{4(\lambda_2 + 2\kappa_0)}, & \omega_4 &= \frac{2(16D_0\theta_0 - \kappa_0)}{\lambda_2 + 2\kappa_0} \end{aligned}$$

где штрих означает дифференцирование по  $\tau$ .

Представляя  $A_n$  в виде  $A_n = r_n e^{i\varphi_n}$ ,  $n=1, 2$ , имеем

$$\begin{aligned} r_1' &= \omega_1 r_1 r_2 \sin \theta, \quad \varphi_1' = -\omega_1 r_2 \cos \theta - b_1 \omega_2 \\ r_2' &= -\omega_3 r_1^2 \sin \theta, \quad \varphi_2' = -\omega_3 \frac{r_1^2}{r_2} \cos \theta - b_1 \omega_4 \\ \theta &= \varphi_2 - 2\varphi_1 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Система (4.3) допускает два интеграла

$$r_1^2 + \frac{\omega_1}{\omega_3} r_2^2 = c_1, \quad r_1^2 r_2 \cos \theta - \frac{\omega}{2\omega_1} b_1 r_1^2 = c_2, \quad \omega = \omega_4 - 2\omega_2$$

где  $c_{1,2}$  – произвольные константы.

Подробное исследование таких систем проведено в [9, 10]. Для рассматриваемой задачи в случае трехволнового взаимодействия система, аналогичная (4.2), впервые получена в [5]. При  $\theta \neq 0, \pm\pi/2, \pm\pi$  решение системы (4.3) выражается через эллиптические функции, имеющие период  $T$ . Первая и вторая гармоники периодически обмениваются энергией между собой. При  $\theta = \pm\pi/2$  решение выражается через гиперболические функции, а  $T = \infty$ . В этом случае при  $t \rightarrow \infty$  вся энергия первой гармоники переходит во вторую. Ниже будет показано, что кроме указанных решений система (4.2) при полном согласовании фаз допускает решение

с постоянными амплитудами и фазовыми функциями, линейно зависящими от времени.

Пусть  $\sin \theta = 0$ . Если  $\theta = 0$ , то из (4.3) следует

$$r_{1,2} = \text{const}, \quad \varphi_{1,2} = \varphi_{1,2}^{\circ} \tau + p_{1,2} \quad (4.4)$$

$$\varphi_1^{\circ} = -\omega_1 r_2 - b_1 \omega_2, \quad \varphi_2^{\circ} = -\omega_3 \frac{r_1^2}{r_2} - b_1 \omega_4$$

В силу симметрии волн относительно вертикали, проходящей через вершину гребня движущейся первой гармоники, константы интегрирования  $p_{1,2} = 0$ . Для определения  $r_2$  имеем квадратное уравнение

$$2\omega_1 r_2^2 - \omega b_1 r_2 - \omega_3 r_1^2 = 0 \quad (4.5)$$

Так как  $r_{1,2} > 0$ , то из (4.5) находим

$$r_{21} = d_1 [\alpha^* + (\alpha^{*2} + 4r_1^2 d_2)^{1/2}] \quad (4.6)$$

$$d_1 = \frac{\lambda_1 + \kappa_0}{4(3\lambda_1^2 - 1)(\lambda_2 + 2\kappa_0)}, \quad d_2 = \frac{\lambda_2 + 2\kappa_0}{\lambda_1 + \kappa_0} (3\lambda_1^2 - 1)^2 \quad (4.7)$$

где  $\alpha^*$  дается формулой (2.3).

При  $\theta = \pm \pi$  аналогично получаем второе значение для  $r_2$

$$r_{22} = d_1 [-\alpha^* + (\alpha^{*2} + 4r_1^2 d_2)^{1/2}] \quad (4.8)$$

Для первого приближения  $\zeta$  теперь имеем

$$\zeta_0 = 2r_1 \cos \gamma_1 + 2r_{21} \cos 2\gamma_1, \quad \gamma_1 = x - t(1 + \psi_1 \varepsilon) \quad (4.9)$$

$$\zeta_0 = 2r_1 \cos \gamma_2 - 2r_{22} \cos 2\gamma_2, \quad \gamma_2 = x - t(1 + \psi_2 \varepsilon)$$

$$\psi_k = b_1 \omega_2 - (-1)^k \omega_1 r_{2k}, \quad k = 1, 2$$

Переходя в (4.9) к тем же переменным, что и в разд. 1, полагая  $r_1 = 1/2$ , получаем, формулы, в точности совпадающие с аналогичным выражением для  $\zeta_0$ , полученным в разд. 2 обычным методом возмущений.

5. При исследовании взаимодействия между первой и третьей гармониками представляем  $D$  и  $\kappa$  в виде (3.3) и ищем первое приближение  $\zeta$  в виде

$$\zeta_0 = \sum_{n=1,3} [A_n(\tau) e^{in\tau} + A_n^*(\tau) e^{-in\tau}], \quad \tau = \varepsilon^2 t$$

Представление для  $\varphi_0$  аналогично (4.1). Проводя вычисления так же, как разд. 4, из первого приближения находим  $\sigma$  и  $B_n$ , имеющие тот же вид, что и в разд. 4. Из второго приближения находим такое представление  $\zeta_1$

$$\zeta_1 = \sum_{n=2,3,4,6} [M_n e^{in\tau} + M_n^* e^{-in\tau}]$$

где  $M_{2,4,6}$  — известные величины, зависящие от  $A_{1,3}$  и  $A_{1,3}^*$ , а  $M_3$  определяется только из четвертого приближения. Ввиду громоздкости  $M_{2,4,6}$  здесь не выписываются. Зависимость  $A_{1,3}$  от  $\tau$  определяется из третьего приближения. Представляя  $A_{1,3}$  в виде  $A_n = r_n e^{i\varphi_n}$ ,  $n = 1, 3$ , для  $r_n$  и  $\varphi_n$  получаем следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$r_1' = m_1 r_1^2 r_3 \sin \theta, \quad \varphi_1' = -[m_1 r_1 r_3 \cos \theta + m_2 r_1^2 + m_3 r_3^2 + m_4 b_1] \quad (5.1)$$

$$r_3' = -m_1 r_1^3 \sin \theta, \quad \varphi_3' = -\left[ n_1 \frac{r_1^3}{r_3} \cos \theta + n_2 r_1^2 + n_3 r_3^2 + n_4 b_1 \right]$$

$$\theta = \varphi_3 - 3\varphi_1$$



Выражения для  $m_k$  и  $n_k$ ,  $k=1, 4$ , ввиду громоздкости не выписываются. Система (5.1) имеет следующие первые интегралы:

$$r_1^2 + \frac{m_1}{n_1} r_3^2 = c_1, \quad r_1^3 r_3 \cos \theta + N_1 r_1^4 + N_2 r_3^2 + N_3 r_1^2 = c_2$$

$$N_1 = \frac{3m_2 - n_2 - 1}{4m_1}, \quad N_2 = \frac{n_1(n_3 - 3m_3) - m_1}{2n_1}, \quad N_3 = \frac{(3m_4 - n_4)b_1 + c_1}{2m_1}$$

где  $c_{1, 2}$  — произвольные константы.

Подобная система уравнений также исследовалась в [9]. Она имеет решения, выражающиеся в зависимости от  $\theta$  через эллиптические или гиперболические функции, которые по своим свойствам близки к описанным в разд. 4.

При  $\theta=0$  ( $\varphi_3=3\varphi_1$ ) для определения  $r_3$  ( $r_3>0$ ) имеем кубическое уравнение

$$(3m_3 - n_3)r_3^3 + 3m_1 r_1 r_3^2 + (3m_2 r_1^2 - n_2 r_1^2 + 3m_4 b_1 - n_4 b_1)r_3 - n_1 r_1^3 = 0 \quad (5.2)$$

которое при  $r_1=1/2$ ,  $r_3=\alpha_3/2$  полностью совпадает с уравнением (3.4)

При  $\theta=\pm\pi$  для определения  $r_3$  ( $r_3>0$ ) находим уравнение, которое получается из (5.2) заменой  $r_3$  на  $-r_3$ .

Проводя дальнейшие рассуждения точно так же, как и в разд. 4, получаем, что и в этом случае решение совпадает с описанным в разд. 3, т. е. имеет три ветви. Полагая в формулах (4.1) — (4.9) и (5.1) — (5.2)  $b_1=0$ , получаем решение для полного согласования длин взаимодействующих волн.

В заключение укажем, что численные расчеты проводились при следующих параметрах:  $E=3 \cdot 10^9$  Н/м<sup>2</sup>,  $\rho=1080$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_1=870$  кг/м<sup>3</sup>,  $\nu=0,34$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Гладун О. М., Федосенко В. С.* Нелинейное установившееся движение упругой пластины, плавающей на поверхности жидкости // Тр. Всесоюз. совещ. «Волновые процессы в морях и океанах», Севастополь, 30–31 марта, 1983. Деп. в ВИНТИ. 09.09.84, № 281-84. С. 30–33.
2. *Гладун О. М., Федосенко В. С.* Нелинейные колебания упругой пластины, плавающей на поверхности идеальной жидкости // Тез. лекций и докл. Всесоюз. школы молодых ученых «Вычислительные методы и математическое моделирование», Минск, 1984. М., 1984. С. 212.
3. *Гладун О. М., Федосенко В. С.* О нелинейном установившемся движении упругой пластины, плавающей на поверхности жидкости бесконечной глубины // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 2. С. 119–123.
4. *Гладун О. М., Федосенко В. С.* О характере ветвления решений некоторых нелинейных задач гидродинамики волн // 6-й Всесоюз. съезд по теорет. и прикл. механике: Аннот. докл. Ташкент, 24–30 сентября 1986 г. Ташкент: Нац. Ком-т по теорет. и прикл. механике, 1986. С. 196.
5. *Марченко А. В., Сибгатуллин Н. Р.* О резонансном взаимодействии волн в тяжелой жидкости, находящейся под упругой пластиной // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1986. № 4. С. 94–97.
6. *Марченко А. В., Сибгатуллин Н. Р.* Об эволюции волновых пакетов при трехволновом взаимодействии в тяжелой жидкости под ледяным покровом // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 6. С. 57–64.
7. *Алешков Ю. З.* Теория волн на поверхности тяжелой жидкости. Л.: Изд-во ЛГУ, 1981. 196 с.
8. *Хейсин Д. Е.* Динамика ледяного покрова. Л.: Гидрометеиздат, 1967. 215 с.
9. *Бломберген Н.* Нелинейная оптика: Пер. с англ. М.: Мир, 1966. 424 с.
10. *Филлипс О. М.* Динамика верхнего слоя океана: Пер. с англ. Л.: Гидрометеиздат, 1980. 319 с.

Минск

Поступила в редакцию  
18.1.1988