**МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 • 1989**

УДК 532.59:517.958

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ ДВИЖЕНИИ ТЕЛА С БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ СКОРОСТЬЮ

КУЗНЕЦОВ Н. Г.

В настоящей статье продолжено начатое в [1, 2] изучение нестационарных линейных задач теории поверхностных волн, описывающих процесс волнообразования при поступательном движении объектов, скорость которых претерпевает быстрые изменения (кратковременные или периодические). Благодаря наличию малого параметра к этим задачам применимы методы теории сингулярных возмущений (см., например, [3]).

Рассматриваемая здесь задача описывает волны от полностью погруженного в жидкость тела, скорость движения которого колеблется с малым периодом около некоторого положительного значения. Для потенциала скоростей и возвышения свободной поверхности жидкости найдены первые два члена формальных двухмасштабных асимптотических разложений по степеням малого периода колебаний скорости. Они позволяют выписать асимптотические формулы для волнового сопротивления и других гидродинамических характеристик. Оказывается, что для написания главных членов асимптотик усредненных по периоду гидродинамических характеристик недостаточно знать потенциал скоростей, описывающий движение тела со средней скоростью. Полученные здесь асимптотики гидродинамических характеристик существенно отличаются от имеющих место для поверхностного давления, движущегося с быстро осциллирующей скоростью [1], и для погруженного тела, совершающего резкое ускорение [2].

1. Постановка задачи. Пусть в идеальной, несжимаемой, тяжелой жидкости, заполняющей слой постоянной глубины h (конечной или бесконечной), поступательно движется тело, ограниченное гладкой поверхностью S. Предполагается, что сверху жидкость ограничена свободной поверхностью, на которой пренебрегается поверхностным натяжением, а снизу при $h<\infty$ границей служит твердое дно. Будем считать, что тело полностью погружено в жидкость и начиная с момента времени $t=0$ его скорость равна $v(t/\varepsilon)$. Здесь $\varepsilon>0$, а v — непрерывная, положительная функция, имеющая период, равный единице

$$v(\tau)=\langle v\rangle+\Delta(\tau),\qquad \tau=\frac{t}{\varepsilon},\qquad \langle v\rangle=\int\limits_0^t v(\tau)\,d\tau \tag{1.1}$$

Введем связанную с телом систему координат $X=(x,\ y,\ z)$ так, чтобы ось абсцисс совпала с направлением движения тела, ось ординат была направлена противоположно силе тяжести и свободная поверхность жидкости в положении равновесия описывалась уравнением $y=0$.

В рамках линейной теории поверхностных волн [4] движение жидкости характеризуется потенциалом скоростей $\Phi(X,\ t;\ \varepsilon)$. Следуя [5], удобно ввести в качестве второй неизвестной функции возвышение свободной поверхности $\eta(x,\ z,\ t;\ \varepsilon)$, хотя, вообще говоря, оно выражается через потенциал Φ. В выбранной системе координат Φ и η должны удовлетворять следующей начально-краевой задаче [5, с. 243]:

$$\nabla^2\Phi=0\qquad (X\in W,\ t\geqslant 0)$$

$$\Phi_t - v(\tau)\Phi_x + g\eta = 0; \quad \eta_t - v(\tau)\eta_x - \Phi_y = 0 \quad (y=0,\ t\geqslant 0) \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = v(\tau)\cos(n,x) \qquad (X\in S, t\geqslant 0)$$

$$\Phi_y = 0 \quad (y=-h,\ t\geqslant 0)$$

$$\Phi = f_0; \quad \eta = f_1 \quad (y=0,\ t=0)$$

Здесь W — заполненная жидкостью область, ограниченная плоскостями $y=0$ и $y=-h$ снаружи и поверхностью S изнутри; g — ускорение силы тяжести; $\mathbf{n}$ — единичная нормаль к S, направленная внутрь жидкости. Функции f_0 и f_1 определяются предшествующим (при $t<0$) движением жидкости. В частности, если движение начинается в момент $t=0$ из состояния покоя, то $f_0 \equiv f_1 \equiv 0$. В случае бесконечной глубины жидкости условие на дне $y=-h$ следует заменить требованием, чтобы скорость $|\nabla\Phi|$ достаточно быстро убывала при $y\to-\infty$.

В предположении, что жидкость имеет бесконечную глубину, а скорость v постоянна, доказаны существование и единственность решения задачи (1.2) в классе функций, отвечающих волновым движениям жидкости, полная энергия которых конечна [6]. Развитые в [6] методы позволяют доказать однозначную разрешимость и для рассматриваемого здесь случая ($h<\infty$, скорость v имеет вид (1.1)). Однако это выходит за рамки настоящей работы.

2. Построение асимптотического разложения для Φ и η. Покажем, что при $\varepsilon\to 0$ имеют место асимптотические формулы

$$\Phi(X,t;\varepsilon) = \Phi^{(0)}(X,t,\tau) + \varepsilon\Phi^{(1)}(X,t,\tau) + O(\varepsilon^2)$$

$$\eta(x,z,t;\varepsilon) = \eta^{(0)}(x,z,t) + \varepsilon\eta^{(1)}(x,z,t,\tau) + O(\varepsilon^2)$$

$$\Phi^{(0)} = \langle\Phi^{(0)}\rangle(X,t) + \Delta(\tau)u^{(0)}(X)$$

$$\Phi^{(1)} = \langle\Phi^{(1)}\rangle(X,t) + (\Gamma\Delta)(\tau)u^{(1)}(X,t)$$

$$\eta^{(0)} = \langle\eta^{(0)}\rangle(x,z,t) \tag{2.1}$$

$$\eta^{(1)} = [\langle\eta^{(0)}\rangle_x(x,z,t) + u_y^{(0)}(x,0,z)](\Gamma\Delta)(\tau)$$

$$\langle\Phi^{(k)}\rangle = \int_0^1 \Phi^{(k)}\,d\tau; \qquad \langle\eta^{(k)}\rangle = \int_0^1 \eta^{(k)}\,d\tau$$

$$(\Gamma\Delta)(\tau) = \int_0^1 \Gamma(\tau,\sigma)\Delta(\sigma)\,d\sigma \qquad (0\leqslant\tau\leqslant 1)$$

Здесь $\Gamma(\tau,\sigma) = \theta(\tau-\sigma) - (\tau-\sigma) - 2^{-1}$, θ — функция Хевисайда. На полуось $\tau>1$ функция $(\Gamma\Delta)(\tau)$ продолжается периодически. Пара функций $\langle\Phi^{(k)}\rangle$ и $\langle\eta^{(k)}\rangle$ ($k=0, 1$) является решением начально-краевой задачи

$$\nabla^2\langle\Phi^{(k)}\rangle = 0 \qquad (X\in W,\ t\geqslant 0)$$

$$\langle\Phi^{(k)}\rangle_t - \langle v\rangle\langle\Phi^{(k)}\rangle_x + g\langle\eta^{(k)}\rangle = 0; \qquad \langle\eta^{(k)}\rangle_t -$$

$$-\langle v\rangle\langle\eta^{(k)}\rangle_x - \langle\Phi^{(k)}\rangle_y = 0 \quad (y=0,\ t=0)$$

$$\frac{\partial\langle\Phi^{(k)}\rangle}{\partial n} = \delta_{0k}\langle v\rangle\cos(n,x) \quad (X\in S, t\geqslant 0) \tag{2.2}$$

$$\langle\Phi^{(k)}\rangle_y = 0 \qquad (y=-h,\quad t\geqslant 0)$$

$$\langle\Phi^{(k)}\rangle = [-(\Gamma\Delta)(0)]^k \frac{\partial^k f_0}{\partial x^k}; \qquad \langle\eta^{(k)}\rangle = [-(\Gamma\Delta)(0)]^k \left(\frac{\partial^k f_1}{\partial x^k} + \delta_{1k}u_y^{(0)}\right)$$

$$(y=0,\ t=0)$$

Здесь δ_{jk} — символ Кронекера.

Функция $u^{(k)}$ $(k=0, 1)$ определяется из краевой задачи

$$\begin{gathered}\nabla^2 u^{(k)}=0 \quad (X\in W);\quad u^{(k)}=\delta_{1k}\langle\Phi^{(0)}\rangle_x \quad (y=0)\\ \frac{\partial u^{(k)}}{\partial n}=\delta_{0k}\cos(n,x) \quad (X\in S);\quad u_y^{(k)}=0 \quad (y=-h)\end{gathered} \tag{2.3}$$

Задача (2.2) при $k=0$ может быть формально получена из исходной задачи (1.2) заменой осциллирующей скорости $v(t/\varepsilon)$ средней скоростью $\langle v\rangle$. Тем самым функции $\langle\Phi^{(0)}\rangle$ и $\langle\eta^{(0)}\rangle$ описывают поверхностные волны, возникающие при поступательном движении тела со средней скоростью $\langle v\rangle$ из того же начального состояния жидкости, что и в исходной задаче (1.2).

Условие на свободной поверхности жидкости $y=0$ в задаче (2.3) при $k=0$ может быть формально получено из условия $u_{xx}^{(0)}+gu_y^{(0)}=0$, если в последнем положить $g=0$. Поэтому $u^{(0)}$ можно интерпретировать как потенциал скоростей в невесомой жидкости, в которой движется тело с единичной поступательной скоростью. Это означает, что главная быстро осциллирующая составляющая потенциала скоростей $\Delta(\tau)u^{(0)}(X)$ описывает движение жидкости, для которого влиянием силы тяжести можно пренебречь.

Для получения асимптотических формул (2.1) представим решение задачи (1.2) в виде асимптотических рядов

$$\Phi(X,t;\varepsilon)=\sum_k \varepsilon^k\Phi^{(k)}(X,t,\tau)$$

$$\eta(x,z,t;\varepsilon)=\sum_k \varepsilon^k\eta^{(k)}(x,z,t,\tau)$$

где $\Phi^{(k)}$ и $\eta^{(k)}$ — 1-периодические по τ функции. Подставляя эти ряды в соотношения (1.2) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, приходим к равенствам

$$\nabla^2\Phi^{(k)}=0 \quad (X\in W;\ t,\ \tau\geqslant 0) \tag{2.4}$$

$$\begin{gathered}\Phi_\tau^{(0)}=0;\quad \Phi_\tau^{(k+1)}+\Phi_t^{(k)}-v(\tau)\Phi_x^{(k)}+g\eta^{(k)}=0\\ \eta_\tau^{(0)}=0;\quad \tau_\tau^{(k+1)}+\eta_t^{(k)}-v(\tau)\eta_x^{(k)}-\Phi_y^{(k)}=0 \quad (y=0;\ t,\tau\geqslant 0;\ k=0,1,\ldots)\end{gathered} \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial\Phi^{(k)}}{\partial n}=\delta_{0k}v(\tau)\cos(n,x) \quad (X\in S;\ t,\tau\geqslant 0) \tag{2.6}$$

$$\Phi_y=0 \quad (y=-h;\ t,\tau\geqslant 0)$$

$$\Phi^{(k)}=\delta_{0k}f_0;\ \eta^{(k)}=\delta_{0k}f_1 \quad (y=0,\ t=\tau=0) \tag{2.7}$$

Вследствие (2.4) функции $\langle\Phi^{(k)}\rangle$ удовлетворяют уравнению Лапласа в W при всех k. Из первого и третьего соотношений (2.5) и условия периодичности по τ вытекает, что имеют место равенства

$$\Phi^{(0)}=\langle\Phi^{(0)}\rangle,\quad \eta^{(0)}=\langle\eta^{(0)}\rangle \quad (y=0) \tag{2.8}$$

Запишем второе соотношение (2.5) для $k=0$ с учетом (2.8)

$$\Phi_\tau^{(1)}+\langle\Phi^{(0)}\rangle_t-v(\tau)\langle\Phi^{(0)}\rangle_x+g\langle\eta^{(0)}\rangle=0 \quad (y=0;\ t,\tau\geqslant 0)$$

Для разрешимости этого дифференциального уравнения относительно

$\Phi^{(1)}$ в классе 1-периодических по τ функций необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие [7, с. 190—192]:

$$\langle\Phi^{(0)}\rangle_t-\langle v\rangle\langle\Phi^{(0)}\rangle_x+g\langle\eta^{(0)}\rangle=0 \quad (y=0,\ t\geqslant 0) \tag{2.9}$$

Осредняя соотношения (2.6), получим справедливые для $t\geqslant 0$ и $k=0, 1,\ldots$ краевые условия

$$\frac{\partial\langle\Phi^{(k)}\rangle}{\partial n}=\delta_{0k}\langle v\rangle\cos(n,x) \quad (X\in S); \quad \langle\Phi^{(k)}\rangle_y=0 \quad (y=-h) \tag{2.10}$$

Из (2.8) и (2.10) вытекает, что имеет место представление

$$\Phi^{(0)}=\langle\Phi^{(0)}\rangle(X,\ t)+\Delta(\tau)u^{(0)}(X) \tag{2.11}$$

При этом функция $u^{(0)}$ является решением задачи (2.3) для $k=0$.

Запишем четвертое соотношение (2.5) для $k=0$, учитывая формулы (2.8) и (2.11)

$$\eta_\tau^{(1)}+\langle\eta^{(0)}\rangle_t-v(\tau)\langle\eta^{(0)}\rangle_x-\langle\Phi^{(0)}\rangle_y-\Delta(\tau)u_y^{(0)}=0 \quad (y=0;t,\tau\geqslant 0)$$

Равенство

$$\langle\eta^{(0)}\rangle_t-\langle v\rangle\langle\eta^{(0)}\rangle_x-\langle\Phi^{(0)}\rangle_y=0 \quad (y=0,\ t=0) \tag{2.12}$$

является необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения для $\eta^{(1)}$ в классе 1-периодических по τ функций (ср. с (2.9)).

Далее, согласно (2.7) и (2.8), имеем

$$\langle\Phi^{(0)}\rangle=f_0; \quad \langle\eta^{(0)}\rangle=f_1 \quad (y=0,\ t=0) \tag{2.13}$$

Таким образом, соотношения (2.9), (2.10), (2.12) и (2.13) в совокупности с уравнением Лапласа образуют начально-краевую задачу (2.2) при $k=0$, из которой определяются функции $\langle\Phi^{(0)}\rangle$ и $\langle\eta^{(0)}\rangle$.

Перейдем к отысканию членов первого порядка в (2.1). Эти члены необходимы для написания асимптотик гидродинамических характеристик. В силу условия (2.9) дифференциальное уравнение, определяющее функцию $\Phi^{(1)}(x,0,z,\ t,\ \tau)$, разрешимо. Его решение имеет вид

$$\Phi^{(1)}=\langle\Phi^{(1)}\rangle+\langle\Phi^{(0)}\rangle_x(\Gamma\Delta)(\tau) \quad (y=0,\ t\geqslant 0,\ 0\leqslant\tau\leqslant 1) \tag{2.14}$$

на полуось $\tau>1$ функция $\Phi^{(1)}$ продолжается периодически. Функция $\Gamma(\tau,\ \sigma)$ является обобщенной функцией Грина 1-периодической краевой задачи для уравнения $u_\tau=f$ [7, с. 190—192]. Постоянная (относительно τ) интегрирования в выражении (2.14) равна $\langle\Phi^{(1)}\rangle$ так как

$$\int_0^1\Gamma(\tau,\sigma)\,d\tau=0 \quad (0\leqslant\sigma\leqslant 1); \quad \Gamma(\tau,\sigma)=-\Gamma(\sigma,\tau) \tag{2.15}$$

Тем же способом, которым была получена формула (2.14), находим, что

$$\eta^{(1)}=\langle\eta^{(1)}\rangle+(\langle\eta^{(0)}\rangle_x+u_y^{(0)})(\Gamma\Delta)(\tau) \quad (y=0,t\geqslant 0,0\leqslant\tau\leqslant 1) \tag{2.16}$$

на полуось $\tau>1$ функцию $\eta^{(1)}$ следует продолжить периодически.

Теперь напишем второе соотношение (2.5) при $k=1$, учитывая формулы (2.14), (2.16), (2.9)

$$\Phi_\tau^{(2)}+\langle\Phi^{(1)}\rangle_t-v(\tau)\langle\Phi^{(1)}\rangle_x+g\langle\eta^{(1)}\rangle=$$

$$=\langle\Phi^{(0)}\rangle_{xx}\Delta(\tau)(\Gamma\Delta)(\tau)-gu_y^{(0)}(\Gamma\Delta)(\tau) \quad (y=0;t,\ \tau\geqslant 0)$$

Так как из второго соотношения (2.15) вытекает, что

$$\int_0^1 \Delta(\tau)(\Gamma\Delta)(\tau)d\tau = -\int_0^1 \Delta(\tau)(\Gamma\Delta)(\tau)d\tau = 0 \qquad (2.17)$$

то для разрешимости последнего дифференциального уравнения относительно $\Phi^{(2)}$ в классе 1-периодических по τ функций необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\langle\Phi^{(1)}\rangle_t - \langle v\rangle\langle\Phi^{(1)}\rangle_x + g\langle\eta^{(1)}\rangle = 0 \quad (y=0,\ t\geqslant 0) \qquad (2.18)$$

Здесь использовано также первое равенство (2.15).

Из условий (2.14) и (2.10) вытекает, что справедливо представление

$$\Phi^{(1)} = \langle\Phi^{(1)}\rangle(X,\ t) + (\Gamma\Delta)(\tau)u^{(1)}(X,\ t) \qquad (2.19)$$

аналогичное (2.11). При этом функция $u^{(1)}$ является решением задачи (2.3) для $k=1$, в которую время t входит в качестве параметра, фигурирующего в условии Дирихле на плоскости $y=0$.

Напишем четвертое соотношение (2.5) при $k=1$ с учетом формул (2.19), (2.16) и (2.12)

$$\eta_\tau^{(2)} + \langle\eta^{(1)}\rangle_t - v(\tau)\langle\eta^{(1)}\rangle_x - \langle\Phi^{(1)}\rangle_y = \langle\eta^{(0)}\rangle_{xx}\Delta(\tau)(\Gamma\Delta)(\tau) -$$
$$-[\langle\Phi^{(0)}\rangle_{xy} - u_y^{(1)}](\Gamma\Delta)(\tau) + u_{xy}^{(0)}\, v(\tau)(\Gamma\Delta)(\tau) \quad (y=0;\ t,\tau\geqslant 0)$$

В силу первого равенства (2.15) и (2.17) условие

$$\langle\eta^{(1)}\rangle_t - \langle v\rangle\langle\eta^{(1)}\rangle_x - \langle\Phi^{(1)}\rangle_y = 0 \quad (y=0;\ t\geqslant 0) \qquad (2.20)$$

необходимо и достаточно для разрешимости уравнения для $\eta^{(2)}$ в классе 1-периодических по τ функций.

Начальные условия для функций $\langle\Phi^{(1)}\rangle$ и $\langle\eta^{(1)}\rangle$ получим, полагая $t=\tau=0$ в равенствах (2.14) и (2.16) и учитывая (2.7) и (2.13). Таким образом, согласно (2.18), (2.20) и (2.10), начально-краевая задача для функций $\langle\Phi^{(1)}\rangle$ и $\langle\eta^{(1)}\rangle$ принимает вид (2.2) при $k=1$. Тем самым получены члены первого порядка в асимптотических формулах (2.1).

Метод, использованный для отыскания $\Phi^{(0)}$, $\Phi^{(1)}$, $\eta^{(0)}$ и $\eta^{(1)}$, позволяет получить и дальнейшие члены асимптотических разложений для функций Φ и η. Однако задачи, при помощи которых определяются функции $\Phi^{(k)}$ и $\eta^{(k)}$ $(k=2, 3, \ldots)$, не будут выписаны, так как эти функции не используются в представляющих практический интерес формулах для главных членов асимптотик гидродинамических характеристик. С другой стороны, сложность выражений для $\Phi^{(k)}$ и $\eta^{(k)}$ быстро возрастает с увеличением номера k. Так, уже $\Phi^{(2)}$ представляет собой сумму четырех слагаемых, каждое из которых определяется своей граничной задачей.

3. Асимптотики гидродинамических характеристик волнового движения жидкости. Прежде всего отметим, что главный член асимптотики возвышения свободной поверхности $\langle\eta^{(0)}\rangle$ не зависит от «быстрого» времени τ, т. е. в главном возвышение свободной поверхности при движении тела с быстро осциллирующей скоростью то же, что и при движении с постоянной средней скоростью. Иначе обстоит дело с потенциалом скоростей, главный член асимптотики которого содержит быстро осциллирующее слагаемое $\Delta(\tau)u^{(0)}$.

Для определения гидродинамической силы $\mathbf{F}$ воспользуемся известной формулой [8] (ρ — плотность жидкости)

$$\mathbf{F}(t;\varepsilon) = \rho\int_S (\Phi_t - v\Phi_x)\mathbf{n}\, dS$$

Отсюда и из асимптотики потенциала (2.1) вытекает, что

$$\mathbf{F}(t;\varepsilon)=\varepsilon^{-1}\rho\Delta'(\tau)\int\limits_S u^{(0)}\mathbf{n}\,dS-\rho[\Delta(\tau)]^2\int\limits_S u_x^{(0)}\,\mathbf{n}\,dS+$$

$$+\rho\Delta(\tau)\int\limits_S (u^{(1)}-\langle v\rangle u_x^{(0)}-\langle\Phi^{(0)}\rangle_x)\mathbf{n}\,dS+\rho\int\limits_S (\langle\Phi^{(0)}\rangle_t-\langle v\rangle\langle\Phi^{(0)}\rangle_x)\mathbf{n}\,dS+O(\varepsilon) \tag{3.1}$$

Здесь и далее предполагается, что функция v принадлежит классу C^1. Первые три члена в правой части (3.1) представляют собой быстро осциллирующую составляющую силы, причем величина первого слагаемого неограниченно возрастает при $\varepsilon\to 0$.

Согласно (3.1) и (1.1), асимптотика средней за период силы, действующей на тело, выражается формулой

$$\langle\mathbf{F}\rangle(t;\varepsilon)=\int\limits_0^1 \mathbf{F}(t;\varepsilon)\,d\tau=\rho\int\limits_S (\langle\Phi^{(0)}\rangle_t-\langle v\rangle\langle\Phi^{(0)}\rangle_x)\mathbf{n}\,dS-$$

$$-\rho\left\{\int\limits_0^1 [\Delta(\tau)]^2\,d\tau\right\}\int\limits_S u_x^{(0)}\,\mathbf{n}\,dS+O(\varepsilon) \tag{3.2}$$

Наибольший практический интерес представляет проекция силы $\mathbf{F}$ на ось абсцисс, волновое сопротивление $R(t;\ \varepsilon)$. В силу (2.3) асимптотика волнового сопротивления имеет вид

$$R(t;\varepsilon)=\frac{\rho}{\varepsilon}\Delta'(\tau)\int\limits_S u^{(0)}\frac{\partial u^{(0)}}{\partial n}\,dS+O(1)=$$

$$=-\frac{\rho}{\varepsilon}\Delta'(\tau)\int\limits_W |\nabla u^{(0)}|^2\,dx\,dy\,dz+O(1) \tag{3.3}$$

Вследствие (3.2), (2.3) и краевого условия на S в (2.2) имеем

$$\langle R\rangle(t;\varepsilon)=\rho\int\limits_S\left(\frac{\langle\Phi^{(0)}\rangle_t}{\langle v\rangle}-\langle\Phi^{(0)}\rangle_x\right)\frac{\partial\langle\Phi^{(0)}\rangle}{\partial n}\,dS-$$

$$-\rho\left\{\int\limits_0^1[\Delta(\tau)]^2\,d\tau\right\}\int\limits_S u_x^{(0)}\frac{\partial u^{(0)}}{\partial n}\,dS+O(\varepsilon)$$

Отсюда при помощи формул Грина, краевых условий и равенства

$$\int\limits_{y=0}\langle\eta^{(0)}\rangle\langle\eta^{(0)}\rangle_x\,dx\,dz=0$$

(являющегося следствием конечности полной энергии жидкости в каждый момент времени) получаем формулу

$$\langle R\rangle(t;\varepsilon)=-\frac{\rho}{2}\left\{\int\limits_0^1[\Delta(\tau)]^2\,d\tau\right\}\int\limits_S|\nabla u^{(0)}|^2\cos(n,x)\,dS-$$

$$-\frac{\rho}{2}\int\limits_S|\nabla\langle\Phi^{(0)}\rangle|^2\cos(n,x)\,dS-$$

$$-\frac{1}{\langle v\rangle}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\rho}{2}\left[\int\limits_W|\nabla\langle\Phi^{(0)}\rangle|^2\,dx\,dy\,dz+g\int\limits_{y=0}\langle\mu^{(0)}\rangle^2\,dx\,dz\right]\right\}+O(\varepsilon) \tag{3.4}$$

Здесь члены, содержащие $\langle\Phi^{(0)}\rangle$ и $\langle\eta^{(0)}\rangle$, выражают волновое сопротивление тела, движущегося со средней скоростью $\langle v\rangle$. Первое слагаемое в правой части (3.4) представляет собой главную часть добавки, возникающей за счет осцилляций скорости.

Мощность $P(t;\ \varepsilon)$, затрачиваемая на преодоление волнового сопротивления, равна $v(\tau)R(t;\ \varepsilon)$. Ее асимптотика легко может быть получена из (3.1). Для средней мощности имеем

$$
\begin{aligned}
\langle P\rangle(t;\varepsilon) = &-\frac{\rho}{2}\left\{\int_0^1[\Delta(\tau)]^3\,d\tau\right\}\int_S|\nabla u^{(0)}|^2\cos(n,x)\,dS+\\
&+\rho\left\{\int_0^1[\Delta(\tau)]^2\,d\tau\right\}\int_S(u^{(1)}-2\langle v\rangle u_x^{(0)}-\\
&-\langle\Phi^{(0)}\rangle_x)\cos(n,x)\,dS-\frac{\rho\langle v\rangle}{2}\int_S|\nabla\langle\Phi^{(0)}\rangle|^2\cos(n,x)\,dS-\\
&-\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\rho}{2}\left[\int_W|\nabla\langle\Phi^{(0)}\rangle|^2\,dx\,dy\,dz+g\int_{y=0}\langle\eta^{(0)}\rangle^2\,dx\,dz\right]\right\}+O(\varepsilon)
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Зависящие от времени t последние два слагаемых в главной части (3.5) выражают мощность, необходимую для преодоления волнового сопротивления при движении тела со средней скоростью $\langle v\rangle$. Остальные слагаемые в правой части (3.5) – это добавка мощности, которую следует затрачивать ввиду осцилляций скорости.

На основании формул (3.2), (3.4) и (3.5) можно сделать следующий вывод. Задачи (2.2) при $k=0$, описывающей движение тела со средней скоростью, недостаточно для нахождения с точностью до малых первого порядка по ε усредненных гидродинамических характеристик тела, движущегося с быстро осциллирующей скоростью. Для определения этих характеристик необходимо решить вспомогательную задачу (2.3) при $k=0,\ 1$.

Отметим, что все асимптотические формулы, приведенные в разд. 2 и 3, справедливы в плоском случае, если опустить в них символы, связанные с зависимостью от координаты z.

4. Сравнение полученных результатов с установленными в [1, 2]. Работа [1] посвящена задаче о системе поверхностных давлений, которая описывается функцией $p(x',\ z')$ в момент $t=0$, а при $t>0$ поступательно движется в положительном направлении оси абсцисс со скоростью вида (1.1). Для рассматриваемого в неподвижной системе координат $X'=(x',\ y',\ z')$ потенциала скоростей в [1] получена асимптотическая формула

$$\Phi(X',\ t;\ \varepsilon)=\langle\Phi^{(0)}\rangle(X',\ t)+\varepsilon\langle\Phi^{(1)}\rangle(X',\ t)+O(\varepsilon^2)$$

Здесь $\langle\Phi^{(k)}\rangle$ $(k=0,1)$ определяются из задачи, которая отличается от (2.2) следующим. Условия на свободной поверхности жидкости заменяются на

$$\langle\Phi^{(k)}\rangle_{tt}+g\langle\Phi^{(k)}\rangle_{y'}=\frac{\langle v\rangle}{\rho}\langle\delta^k\rangle\frac{\partial^k p}{\partial x^k}(x'-\langle v\rangle t,\ z')$$

$$\delta(\tau)=-\int_0^\tau\Delta(\mu)\,d\mu$$

Условие на S однородно при $k=0$, а начальное условие – при $k=1$; вместо начального условия для $\langle\eta^{(k)}\rangle$ ставится условие

$$\langle\Phi^{(k)}\rangle_t=\delta_{0k}f_1\quad(y'=0,\ t=0)$$

где функция f_1 взята из аналогичного условия исходной задачи.

Таким образом, все гидродинамические характеристики системы поверхностных давлений, движущейся с быстро осциллирующей скоростью, с точностью до величин первого порядка по ε такие же, как у системы движущейся со средней скоростью. Тем самым движение системы поверхностных давлений с быстро осциллирующей скоростью принципиально отличается от аналогичного движения погруженного в жидкость тела.

В [2] речь шла о поступательном движении погруженного в жидкость тела, скорость которого при $t \geqslant 0$ имеет вид $v(\tau) = V + \Delta(\tau)$, где $V = \text{const}$, а $\Delta(\tau) = 0$ при $\tau \geqslant 1$. Найденная в [2] асимптотика потенциала скоростей аналогична (2.1) (главные члены полностью совпадают). Однако полученные там добавки к $\langle \Phi^{(k)} \rangle$, зависящие от «быстрого» времени τ, обращаются в ноль при $t \geqslant \varepsilon$. Поэтому асимптотики мгновенных гидродинамических характеристик в [2] имеют такой же вид, как и здесь, но средние значения этих характеристик не имеют смысла. Таким образом, несмотря на внешнее сходство формул, приведенных здесь и в статье [2], соответствующие волновые движения жидкости имеют принципиально различный характер.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кузнецов Н. Г.* Асимптотические разложения для поверхностных волн, возникающих при движении давления с быстро осциллирующей скоростью // Математическое моделирование и автоматизированные системы в судостроении. Л.: изд-е ЛКИ, 1986. С. 60–65.
2. *Кузнецов Н. Г., Мазья В. Г.* Асимптотические разложения для поверхностных волн, вызываемых быстро осциллирующими или ускоряющимися возмущениями // Асимптотические методы. Задачи и модели механики. Новосибирск: Наука, 1987. С. 136–175.
3. *Найфэ А.* Методы возмущений: Пер. с англ. М.: Мир, 1976. 455 с.
4. *Сретенский Л. Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 816 с.
5. *Newman J. N.* The theory of ship motions // Adv. Appl. Mech. New York. e. a., 1978. V. 18. P. 221–283.
6. *Hamdache K.* Forward speed motions of a submerged body. The Cauchy problem // Math. Meth. Appl. Sci. 1984. V. 6. № 3. P. 371–392.
7. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Пер. с нем. М.: Наука, 1971. 576 с.
8. *Ремез Ю. В.* Качка корабля. Л.: Судостроение, 1983. 327 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
26.II.1988