

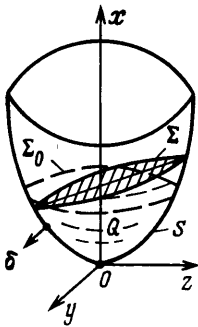
УДК 532.54+534.131.2

## О НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВЫХ ДВИЖЕНИЯХ ЖИДКОСТИ В ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ПОЛОСТЯХ, ПОДВЕРЖЕННЫХ ВИБРАЦИИ

КОВАЛЬЧУК П. С., ПУЧКА Г. Н., ХОЛОПОВА В. В.

Рассматривается задача о нелинейном волновом деформировании свободной поверхности жидкости, обусловленном поступательными движениями несущего ее сосуда. С использованием метода усреднения Н. Н. Боголюбова исследуются характеристики волновых движений жидкости в резонансных зонах в случае сосуда цилиндрической формы. Получены зависимости, характеризующие изменение амплитуды круговой волны от частот внешних возмущений в установившемся волновом процессе; проанализированы условия возникновения и устойчивости таких процессов.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим осесимметричный сосуд (фиг. 1), частично заполненный идеальной несжимаемой жидкостью, совершающий гармонические поступательные колебания в направлении осей  $z$ ,  $y$ ,  $x$  соответственно вида



Фиг. 1

$$\begin{aligned} u &= u(t) = u_{01} \cos \Omega t + u_{02} \sin \Omega t \\ v &= v(t) = v_{01} \cos \Omega t + v_{02} \sin \Omega t \\ w &= w(t) = w_{01} \cos vt + w_{02} \sin vt \end{aligned} \quad (1.1)$$

Декартова система координат  $Oxyz$  предполагается при этом неизменно связанной с телом, причем ось  $x$  направлена вдоль оси сосуда противоположно вектору ускорения силы тяжести  $g$ .

Обозначим область, занимаемую жидкостью, через  $Q$ , возмущенную свободную поверхность этой жидкости —  $\Sigma$ , смачиваемую поверхность сосуда —  $S$ . Предположим, кроме того, что уравнение возмущенной свободной поверхности  $\xi(x, y, z, t) = 0$  можно представить в разрешенном относительно продольной координаты  $x$  виде

$$x = h + \xi(y, z, t), \quad h = \text{const} > 0 \quad (1.2)$$

Тогда потенциал скоростей  $\varphi$  движения жидкости, а также неизвестная форма возмущений свободной поверхности  $\xi(y, z, t)$  будут определяться решением следующей нелинейной краевой задачи [2]:

$$\Delta \varphi = 0, \quad (x, y, z) \in Q \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} S: \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \delta} &= v_0 \times \delta; & \Sigma: \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \delta} &= v_0 \times \delta + u_\delta \\ \Sigma: \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} &+ \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 - \nabla \varphi \cdot v_0 + U &= 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь  $\delta$  — орт внешней нормали к поверхности  $Q$ ,  $v_0$  — вектор поступательной скорости пространственного движения сосуда с компонентами  $\dot{w}$ ,  $\dot{v}$  и  $\dot{u}$ ,  $U$  — потенциал сил тяжести,  $u_\delta$  — относительная нормальная ско-

рость частиц свободной поверхности жидкости, причем

$$u_0 = \frac{\partial \xi}{\partial t} [1 + (\nabla \xi)^2]^{-1/2} \quad (1.5)$$

Давление внутри жидкости  $P$  можно определить из интеграла Лагранжа – Коши [4]

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + U + \frac{P}{\rho} = 0 \quad (1.6)$$

**2. Вывод разрешающих уравнений.** Главное внимание уделим в дальнейшем решению нелинейной задачи об определении движения свободной поверхности жидкости. Для приближенного ее решения воспользуемся методикой [1]. В отличие от [1, 2] возмущение свободной поверхности жидкости  $\xi$  будем искать непосредственно в виде волнового разложения

$$\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}(t) \cos(n\Theta - \alpha_{nm}(t)) R_{nm}(r) \quad (2.1)$$

Здесь  $a_{nm}$ ,  $\alpha_{nm}$  – неизвестные функции времени, имеющие смысл обобщенных координат этой поверхности;  $x$ ,  $\Theta$ ,  $r$  – цилиндрические координаты, относительно которых рассматривается движение жидкости;  $R_{nm}$  – собственные функции однородной краевой задачи

$$\frac{d^2 R_{nm}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_{nm}}{dr} + \left( \lambda_{nm}^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) R_{nm} = 0 \quad (2.2)$$

$$S: \frac{dR_{nm}}{dr} = 0$$

где  $\lambda_{nm}$  – собственное число, отвечающее выбранным параметрам  $m$  и  $n$ .

Функции  $R_{nm} \cos n\Theta$ ,  $R_{nm} \sin n\Theta$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ;  $m=1, 2, \dots$ ), входящие в (2.1), образуют полную ортогональную систему на невозмущенной свободной поверхности  $\Sigma_0$  (при  $x=h$ ).

Потенциал скоростей  $\varphi$  представим в аналогичном разложении (2.1) в виде

$$\varphi = v_0 \times r + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{nm}(t) \cos(n\Theta - \beta_{nm}(t)) K_{nm}(x, r) \quad (2.3)$$

Здесь  $K_{nm}(x, r)$  – система гармонических функций, удовлетворяющих условию неперетекания на смачиваемой поверхности сосуда  $S$ ;  $b_{nm}$ ,  $\beta_{nm}$  – функции времени, определяемые в соответствии с [1, 2] из соотношений

$$b_{nm} = \sqrt{\dot{a}_{nm}^2 + a_{nm}^2 \dot{\alpha}_{nm}^2}$$

$$\operatorname{tg} \beta_{nm} = \frac{\dot{a}_{nm} \sin \alpha_{nm} + a_{nm} \dot{\alpha}_{nm} \cos \alpha_{nm}}{\dot{a}_{nm} \sin \alpha_{nm} - a_{nm} \dot{\alpha}_{nm} \sin \alpha_{nm}} \quad (2.4)$$

Алгоритм построения функций  $K_{nm}(x, r)$  подробно изложен в [2] и заключается в решении последовательности линейных краевых задач с параметром в граничных условиях. Области определения искомым функций при этом фиксированы. Для определения искомым функций  $a_{nm}$ ,  $\alpha_{nm}$ , удовлетворяющих динамическому условию на свободной поверхности, получим следующую бесконечную систему обыкновенных нелинейных диф-

ференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{nm} + (\omega_{nm}^2 - \dot{\alpha}_{nm}^2) a_{nm} &= \varepsilon \Phi_1^{nm}(a_{01}, a_{02}, \dots, \alpha_{01}, \alpha_{02}, \dots) + \\ &+ E_{nm} \left( \frac{d^2 u}{dt^2} \cos \alpha_{nm} + \frac{d^2 v}{dt^2} \sin \alpha_{nm} \right) + N_{nm} a_{nm} \frac{d^2 w}{dt^2} \\ a_{nm} \ddot{\alpha}_{nm} + 2 \dot{\alpha}_{nm} \dot{a}_{nm} &= \varepsilon \Phi_2^{nm}(a_{01}, a_{02}, \dots, \alpha_{01}, \alpha_{02}, \dots) + \\ &+ E_{nm} \left( \frac{d^2 v}{dt^2} \cos \alpha_{nm} - \frac{d^2 u}{dt^2} \sin \alpha_{nm} \right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь  $\omega_{nm}$  — частоты собственных колебаний поверхности жидкости (в неподвижном сосуде);  $\Phi_i^{nm}$  — нелинейные относительно  $a_{nm}$ ,  $\alpha_{nm}$  и их первой и второй производных функций, вид которых определяется количеством удерживаемых в (2.1), (2.3) членов ряда;  $\varepsilon$  — малый параметр, указывающий на малость нелинейных членов, стоящих в правой части (2.5), по сравнению с левыми частями, полученными из решения линейной краевой задачи (1.1), (1.2);  $E_{nm}$ ,  $N_{nm}$  — некоторые постоянные коэффициенты.

**3. Приближенный метод исследования резонансных режимов движения жидкости.** При анализе движения жидкости в подвижных сосудах наибольший интерес представляет изучение резонансных ситуаций, когда собственные частоты колебаний жидкости находятся в определенных соотношениях с частотами принудительных вибраций сосуда. Применительно к системе (2.5) резонансные ситуации, которые могут быть в ней реализованы, имеют вид [5, 6]  $\omega_{nm} \approx (p_1/q_1)\Omega$  или  $\omega_{nm} \approx (p_2/q_2)\nu$ , где  $p_i$ ,  $q_i$  — некоторые взаимно простые числа.

Приведем кратко методику построения периодических резонансных решений данной системы. С этой целью рассмотрим порождающую систему  $\ddot{a}_{nm} + (\omega_{nm}^2 - \dot{\alpha}_{nm}^2) a_{nm} = 0$ ,  $\ddot{\alpha}_{nm} a_{nm} + 2 \dot{a}_{nm} \dot{\alpha}_{nm} = 0$  (3.1) полученную из (2.5) при  $\varepsilon = 0$ ;  $u \equiv v \equiv w \equiv 0$ . Ее решение можно записать в виде [7]

$$\begin{aligned} a_{nm} &= \sqrt{x_{nm}^{(0)} + y_{nm}^{(0)} \sin 2\psi_{nm}^{(0)}(t)} \\ \alpha_{nm} &= \varphi_{nm}^{(0)} + \arctg \frac{x_{nm}^{(0)} \operatorname{tg} \psi_{nm}^{(0)}(t) + y_{nm}^{(0)}}{M_{nm}^{(0)}} \\ \psi_{nm}^{(0)}(t) &= \omega_{nm} t + \vartheta_{nm}^{(0)}, \quad M_{nm}^{(0)} = \sqrt{x_{nm}^{(0)2} - (y_{nm}^{(0)})^2} \end{aligned} \quad (3.2)$$

где  $x_{nm}^{(0)}$ ,  $y_{nm}^{(0)}$ ,  $\vartheta_{nm}^{(0)}$ ,  $\varphi_{nm}^{(0)}$  — постоянные интегрирования.

Полагая далее в соответствии с методом усреднения [5]

$$\begin{aligned} a_{nm}(t) &= \sqrt{x_{nm}(t) + y_{nm}(t) \sin 2\psi_{nm}(t)}, \quad \psi_{nm}(t) = \sigma t + \vartheta_{nm}(t) \\ \alpha_{nm}(t) &= \varphi_{nm}(t) + \operatorname{arctg} \frac{x_{nm}(t) \operatorname{tg} \psi_{nm}(t) + y_{nm}(t)}{M_{nm}(t)} \\ \dot{a}_{nm}(t) &= \frac{\sigma y_{nm}(t) \cos 2\psi_{nm}(t)}{a_{nm}(t)}, \quad \dot{\alpha}_{nm}(t) = \frac{\sigma M_{nm}(t)}{a_{nm}^2(t)}, \\ M_{nm}(t) &= \sqrt{x_{nm}^2(t) - y_{nm}^2(t)} \end{aligned} \quad (3.3)$$

где  $\sigma = (p_1/q_1)\Omega$  или  $\sigma = (p_2/q_2)\nu$ , на основании (2.5) получаем уравнения в стандартной форме

$$\frac{dx_{nm}}{dt} = \frac{\varepsilon F_1 y_{nm} \cos \psi_{nm}}{a_{nm} \sigma} + \frac{\varepsilon F_2 M_{nm}}{a_{nm} \sigma}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy_{nm}}{dt} &= \frac{\varepsilon F_1 x_{nm} \cos \psi_{nm}}{a_{nm} \sigma} - \frac{\varepsilon F_2 M_{nm} \sin \psi_{nm}}{a_{nm} \sigma} \\ \frac{d\theta_{nm}}{dt} &= -\frac{\varepsilon F_1 (x_{nm} \sin \psi_{nm} + y_{nm})}{2a_{nm} \sigma y_{nm}} + \frac{\varepsilon F_2 M_{nm} \cos \psi_{nm}}{2a_{nm} \sigma y_{nm}} \quad (3.4) \\ \frac{d\varphi_{nm}}{dt} &= \frac{\varepsilon F_1}{2a_{nm} \sigma} \left( \frac{\sin \psi_{nm}}{y_{nm}} - \frac{\cos \psi_{nm}}{x_{nm}} \right) + \frac{\varepsilon F_2}{2a_{nm} \sigma} \left( \sin \psi_{nm} + \frac{x_{nm}}{y_{nm}} \cos \psi_{nm} + \frac{y_{nm}}{x_{nm}} \right) \\ \varepsilon F_1 &= \varepsilon \Phi_1^{nm} + \Delta a_{nm} + E_{nm} (\ddot{u} \cos \alpha_{nm} + \ddot{v} \sin \alpha_{nm}) + N_{nm} \dot{w} a_{nm}, \quad \Delta = \omega_{nm}^2 - \sigma^2 \\ \varepsilon F_2 &= \varepsilon \Phi_2^{nm} + E_{nm} (\ddot{v} \cos \alpha_{nm} - \ddot{u} \sin \alpha_{nm}) \end{aligned}$$

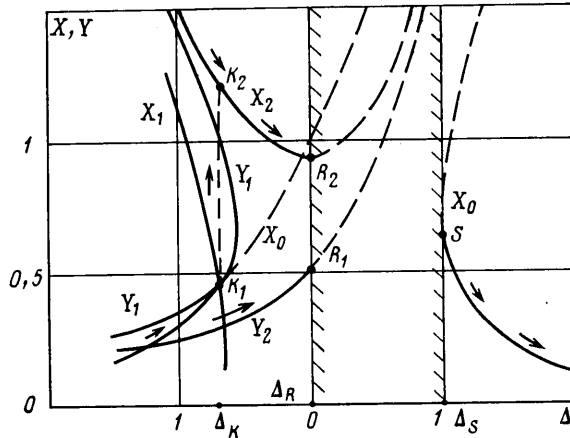
Усредняя затем (3.4) по явно входящему времени  $t$ , получим уравнения, на основании которых можно определить все параметры, характеризующие волновое движение поверхности жидкости.

4. Колебания жидкости в цилиндрическом сосуде. Пусть цилиндрический сосуд радиуса  $R$  имеет недеформируемое днище, заполнен жидкостью до высоты  $h$  и совершает гармонические колебания вдоль осей  $z$  и  $x$ , причем  $u(t) = u_{01} \cos \Omega t$ ;  $w(t) = w_{01} \cos vt$ . В первом приближении в системе (2.5) обнаруживаются всегда резонансы вида  $\omega_{nm} \approx \Omega$  и  $\omega_{nm} \approx v/2$  [5, 8], поэтому в дальнейшем будем считать, что  $\Omega = v/2$ . Это создает предпосылки для реализации резонансных движений по обеим координатам  $x$  и  $z$ . Усредненные уравнения (3.4) при удержании в (2.1) наиболее существенных в энергетическом отношении волн ( $n=0, 1$ ;  $m=1$ ) [1, 2] принимают в данном случае вид

$$\begin{aligned} \frac{dx_{11}}{dt} &= -\frac{E}{2\sigma\sqrt{x_{11}}} [M_{11} \sin \theta_{11} \cos \varphi_{11} + (x_{11} \cos \theta_{11} - y_{11} \sin \theta_{11}) \sin \varphi_{11}] + \\ &\quad + \frac{\mu}{2\sigma} y_{11} \cos 2\theta_{11} \\ \frac{dy_{11}}{dt} &= \frac{E}{2\sigma\sqrt{x_{11}}} [M_{11} \cos \theta_{11} \cos \varphi_{11} + (x_{11} \sin \theta_{11} - y_{11} \cos \theta_{11}) \sin \varphi_{11}] + \\ &\quad + \frac{\mu}{2\sigma} x_{11} \cos 2\theta_{11} \\ \frac{d\theta_{11}}{dt} &= \frac{1}{2\sigma} \left( \Delta + \frac{3\gamma_1}{2} x_{11} - \frac{\mu}{2} \frac{x_{11}}{y_{11}} \sin 2\theta_{11} \right) - \\ &\quad - \frac{E}{4\sigma y_{11} \sqrt{x_{11}}} [M_{11} \sin \theta_{11} \cos \varphi_{11} - (x_{11} \cos \theta_{11} + y_{11} \sin \theta_{11}) \sin \varphi_{11}] \\ \frac{d\varphi_{11}}{dt} &= \frac{E}{4\sigma x_{11} \sqrt{x_{11}} y_{11}} [(M_{11}^2 \sin \theta_{11} - 2x_{11} \cos \theta_{11}) \cos \varphi_{11} - \\ &\quad - M_{11} (y_{11} \sin \theta_{11} + x_{11} \cos \theta_{11}) \sin \varphi_{11}] + \frac{M_{11} \mu}{4x_{11} \sigma y_{11}} (x_{11} \sin 2\theta_{11} - y_{11} \cos 2\theta_{11}) - \frac{M_{11} \gamma_2}{4\sigma} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь  $E$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\mu$  — постоянные коэффициенты, зависящие от параметров  $R$ ,  $h$  и от уровней гармонических вибраций [1, 2]. Уравнения для  $x_{01}$ ,  $y_{01}$ ,  $\theta_{01}$ ,  $\varphi_{01}$  не приводятся — они соответствуют нерезонансным ситуациям.

Из анализа уравнений (4.1) следует, что пространственная круговая волна в жидкости возможна при условии  $x_{11} \neq y_{11}$ . Если, в частности, сосуд совершает лишь поперечные (вдоль оси  $z$ ) колебания, то для определения стационарных значений параметров этой волны  $x_{11}$ ,  $y_{11}$ ,  $\theta_{11}$ ,



Фиг. 2

$\varphi_{11}$  получаем соотношения

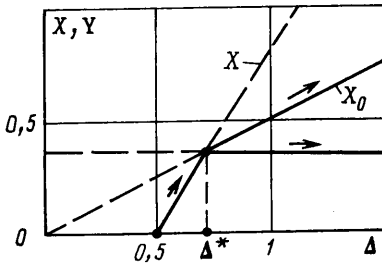
$$\Delta = -\frac{3}{2} \gamma_1 x_{11} + \frac{1}{2} \gamma_2 (x_{11} \pm y_{11}), \quad x_{11} = \mp y_{11} + \frac{E^2}{y_{11}^2 \gamma_2^2} \quad (4.2)$$

$$\sin \vartheta_{11} = \pm \cos \vartheta_{11}, \quad \operatorname{tg} \varphi_{11} = M_{11}/y_{11}, \quad \Delta = \omega_{11}^2 - \Omega^2$$

При осевом возбуждении сосуда вместо (4.2) будем иметь

$$\Delta = -\frac{3}{2} \gamma_1 x_{11} \pm \frac{1}{2} \mu \frac{x_{11}}{y_{11}}, \quad y_{11} = \pm \frac{\mu}{\gamma_2}, \quad \cos 2\vartheta_{11} = 0 \quad (4.3)$$

На фиг. 2, 3 изображены зависимости  $X(\Delta) = x_{11}(\Delta)/R$  и  $y(\Delta) = y_{11}(\Delta)/R$ , построенные по соотношениям (4.2) и (4.3) при следующих исходных данных:  $h=3R$ ;  $E=0,8$ ;  $\mu=0,1$ , индекс 1 соответствует верхнему знаку в (4.2), а 2 — нижнему. Здесь же представлены частотные кривые  $X_0 = X_0(\Delta) = x_{11}(\Delta)/R$ , полученные при условиях  $x_{11} = y_{11} = x_0$ . Устойчивые участки всех кривых отмечены сплошными линиями, неустойчивые — штриховыми.



Фиг. 3

Как видно, пространственное движение жидкости типа круговой волны ( $x_{11} \neq y_{11}$ ) может быть реализовано лишь при определенных частотах внешнего возбуждения сосуда. Так, при поперечных колебаниях сосуда эта волна имеет место в области  $\Delta_k < \Delta < \Delta_R$  (см. фиг. 2), причем

причем

$$\Delta_k = \frac{E^{3/2}}{\sqrt[3]{2} \gamma_2^{3/2}} \left( \gamma_2 - \frac{3}{2} \gamma_1 \right), \quad \Delta_R = \left( \frac{E}{\gamma_2} \right)^{3/2} \frac{1}{2\sqrt[3]{4}} (2\sqrt[3]{2} \gamma_2 - 9\gamma_1) \quad (4.4)$$

В узкой частотной области ( $\Delta_R, \Delta_S$ ) ( $\Delta_* = 1,5 \cdot 18^{-1/3} E^{3/2} \gamma_1^{1/3}$ ) решения системы (4.1) очень сильно зависят от начальных условий и, как показывает аналоговое моделирование, описывают некоторые хаотические процессы типа странных аттракторов [9]. При осевом возбуждении перестройка от режима плоской к режиму круговой волны происходит при  $\Delta^* = 2\mu$ .

Если сосуд совершает более сложное движение, осуществляемое одновременно вдоль осей  $z$  и  $x$ , то на основании уравнений (4.1) получаем бо-

лее сложные выражения амплитудно-частотных характеристик, описывающих волновые процессы в жидкости

$$\Delta + \frac{3}{2} \gamma_1 x_{11} - \frac{1}{2} \mu \pm \frac{E}{\sqrt{2x_{11}}} = 0, \quad x_{11} = y_{11}, \quad \sin \vartheta_{11} = \cos \vartheta_{11}, \quad \cos \varphi_{11} = 0 \quad (4.5)$$

$$\Delta + \frac{3}{2} \gamma_1 x_{11} + \frac{1}{2} \mu = 0, \quad x_{11} = y_{11}$$

$$\sin 2\vartheta_{11} = \frac{1}{\mu} (2\Delta + 3\gamma_1 x_{11}) + \frac{E^2}{\mu^2 x_{11}}, \quad \cos \varphi_{11} = 0 \quad (4.6)$$

$$\Delta + \frac{3}{2} \gamma_1 x_{11} - \frac{1}{2} \mu - \frac{1}{2} \left( \gamma_2 \mp \frac{\mu}{y_{11}} \right) (x_{11} \pm y_{11}) = 0$$

$$\left( \gamma_2 \mp \frac{\mu}{y_{11}} \right)^2 (x_{11} \pm y_{11}) y_{11}^2 = E^2, \quad \operatorname{tg} \varphi_{11} = \frac{M_{11}}{x_{11} \pm y_{11}} \quad (4.7)$$

$$\cos \vartheta_{11} = \pm \sin \vartheta_{11}$$

Решения уравнений (4.5), (4.6) описывают, очевидно, плоские волновые движения жидкости, причем уравнения (4.5) сходны с уравнениями амплитудно-частотных характеристик для вынужденных поступательных движений сосуда с жидкостью вдоль оси  $z$ , а уравнения (4.6) — с уравнениями для поступательных движений вдоль оси сосуда ( $x$ ).

Решения уравнений (4.7) описывают сложное (пространственное) движение жидкости типа круговая волна, обусловленное одновременно двумя типами возбуждения сосуда — продольным и поперечным.

Аналогично можно исследовать поведение жидкости в сосуде, совершающем трехмерное движение вдоль осей  $x, y, z$ .

В заключение отметим, что если сосуд осесимметричный, но не цилиндрический, то задача исследования нелинейных волновых движений жидкости (2.1), заполняющей этот сосуд, может быть решена с помощью введения криволинейных координат и привлечения специального аппарата тензорного анализа [2].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Нариманов Г. С. О колебаниях жидкости в подвижных полостях // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. 1957. № 10. С. 71–74.
2. Нариманов Г. С., Докучаев Л. В., Луковский И. А. Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью. М.: Машиностроение, 1977. 208 с.
3. Рэлей. Теория звука: Пер. с англ. М.: Гостехиздат, 1955. Т. 1. 504 с.
4. Ламб Г. Гидродинамика: Пер. с англ. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
5. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
6. Ганиев Р. Ф., Ковальчук П. С. Динамика систем твердых и упругих тел. Резонансные явления при нелинейных колебаниях. М.: Машиностроение, 1980. 208 с.
7. Бояршина Л. Г., Ковальчук П. С. О волновых формах движения свободной поверхности жидкости, содержащейся в цилиндрическом сосуде // Прикл. механика. 1986. Т. 22. № 3. С. 113–116.
8. Кузьма В. М., Холопова В. В. О колебаниях свободной поверхности жидкости в цилиндрическом сосуде при продольных вибрациях // Прикл. механика. 1983. Т. 19. № 3. С. 71–76.
9. Странные аттракторы: Пер. с англ./Под ред. Синая Я. Г., Шильникова Л. П. М.: Мир, 1981. 253 с.

Киев

Поступила в редакцию  
22.II.1988