МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 · 1989

УДК 532.529.5

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В ЖИДКОСТИ С ПУЗЫРЬКАМИ ГАЗА ПРИ УЧЕТЕ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА

БОНДАРЕНКО А. Г., КУДРЯШОВ Н. А.

Предложено уравнение для кинетики массообмена, сопровождающего процесс роста газового пузырька в несжимаемой жидкости. Получено уравнение состояния двухфазной системы, вывод которого основан на механизме массообмена между фазами за счет растворимости атомов газа в жидкости. Для описания нелинейных волн в газосодержащей жидкости выведено эволюционное уравнение, обобщающее обычно используемое уравнение Бюргерса – Кортевега – де Вриза (БКдВ). Приведено решение этого уравнения в виде уединенной волны.

В монографии [1] приведен обзор работ, посвященных исследованию волновых процессов в дисперсных смесях. Нелинейные волны в жидкости, содержащей пузырьки нерастворимого газа [2, 3], в слабонелинейном приближении описываются уравнением БКдВ. Процесс массообмена, сопровождающий фазовый переход первого рода, при распространении волны в парожидкостной среде исследован как численно, так и аналитически в [4, 5] на основе полученного авторами интегродифференциального эволюционного уравнения, обобщающего уравнение БКдВ.

1. При пересыщении жидкости атомами газовой примеси в ней происходит фазовый переход, приводящий к образованию пузырьков с атомами газа. Для такой среды характерны малые по сравнению с жидкостью без пузырьков значения скорости звука [6] из-за определяющей роли сжимаемости газовой фазы в процессах распространения возмущений в смеси. Это обстоятельство приводит к необходимости учета массообмена между фазами при изменении размера пузырька газа, обусловленного колебаниями давления в несжимаемой жидкости.

Следуя [7, 8], используем двухпараметрическую модель для описания фазового перехода в несжимаемой жидкости, в которой свободная энергия двухфазной системы является функцией от двух независимых переменных, например числа (массы) атомов газа в пузырьке и его размера.

В качестве уравнения состояния жидкости с пузырьками газа без учета массообмена в [3] использовалось уравнение Рэлея, которое описывает динамику отдельного пузырька с нерастворимым газом в несжимаемой жидкости. Обобщенное уравнение состояния при учете массообмена получим из системы кинетических уравнений, учитывающих самосогласованное изменение массы газа в пузырьке и его размера.

Рост отдельного пузырька в жидкости обусловлен процессами присоединения и испарения молекул на межфазной поверхности. Скорость массообмена на границе пузырька радиуса r_b описывается следующим уравнением:

$$\dot{n}_b = \frac{N_A}{\mu}\dot{m}_b = 4\pi r_b^2 (J_2 - J_1), \qquad J_2 = Dlc_s(r_b)\exp\left(-\frac{\Delta}{T}\right) \tag{1.1}$$

$$J_1 = Dl^{-1}Ap_b^{\nu}\exp[(\partial F_i/\partial n_b - \Delta - \varepsilon_0)/T]$$

Здесь J_1 и J_2 — плотности потоков атомов газовой примеси прилипших к газовому пузырьку и испаренных с его поверхности, n_b — число атомов газа в пузырьке, m_b — масса газа в нем, μ — молекулярная масса атомов газа, N_A — число Авогадро, ε_0 — энергия растворения газа в жидкости,

D — коэффициент диффузии атомов газа в жидкости, l — длина свободного пробега атомов газа в жидкости, $c_s(r_b)$ — концентрация примеси в жидкости на границе пузырька, Δ — высота пристеночного барьера, F_i — энергия, затрачиваемая на создание межфазной границы, $\nu=1$; 0,5 для одно- и двухатомного газов соответственно.

Вокруг пузырька существует сферически-симметричное поле концентраций газа примеси в жидкости. Поскольку одиночные акты прилипания и испарения обусловлены диффузионной подвижностью атомов примеси в растворе, то их распределение вокруг пузырька определяется решением задачи

$$\frac{\partial c_s}{\partial t}+\frac{\partial(\dot{r}_b c_s)}{\partial r}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial c_s}{\partial r}\right),\qquad c_s(\infty)=c_{s\infty},\qquad D\frac{\partial c_s}{\partial r}\bigg|_{r=r_b}=J_1-J_2 \tag{1.2}$$

Здесь c_s — концентрации примеси, растворенной в жидкости, $c_{s\infty}$ — концентрация примеси на достаточно большом расстоянии от пузырька.

При установившемся распределении атомов примеси вокруг пузырька приходим к следующему соотношению на его поверхности:

$$\frac{\partial c_s}{\partial r}\bigg|_{r=r_b}=\frac{c_s(r_b)-c_{s\infty}}{r_b} \tag{1.3}$$

Используя условия (1.2), (1.3), переменную $c_s(r_b)$ можно исключить из уравнения (1.1)

$$\dot{n}_b=\frac{4\pi r_b{}^3\dot{r}_b c_{s\infty}[1-\exp(\nu\partial F/T\partial n_b)]}{[1-\exp(-r_b\dot{r}_b/D)][r_b+l\exp(\Delta/T)]} \tag{1.4}$$

$$F=F_b+F_s+F_i+F_0,\ F_b=n_b\ln(e\rho_b/\rho_0),\ F_s=(n_t-n_b)[\ln(ec_{s\infty}/c_0)+\varepsilon_0],\ F_i=4\pi\sigma r_b{}^2$$

Здесь F — свободная энергия двухфазной системы, F_b — энергия газа в пузырьке, F_s — энергия атомов примеси в растворе, F_i — энергия, необходимая для создания межфазной границы, F_0 — энергия жидкости без атомов примеси (при фазовом переходе F_0 остается неизменной). Переменная ρ_b — плотность газа в пузырьке; параметры: σ — коэффициент поверхностного натяжения, n_t — общее количество атомов примеси в растворе, приходящихся на один пузырек; величины ρ_0 и c_0 — нормировочные константы. В случае неидеальности пузырьковой фазы в выражение для F_b, следуя [7], можно добавить соответствующие поправки.

Из выражения (1.4) следует, что в стационарной точке скорость массообмена равна нулю. Подставив F в выражение для $\dot{n}_b$, приходим к кинетическому уравнению для массообмена на поверхности пузырька

$$\dot{n}_b=\frac{4\pi r_b{}^3\dot{r}_b(c_{s\infty}-c_s)}{[r_b+l\exp(\Delta/T)][1-\exp(-r_b\dot{r}_b/D)]},\qquad c_s=c_0(p_b/p_0)^\nu\exp(-\varepsilon_0/T) \tag{1.5}$$

Здесь c_s — так называемая изотерма растворимости. Постоянная A в выражении (1.1) выбирается в соответствии с этой изотермой ($p_0=10^5$ Н/м^2, c_0 — нормировочные константы). Уравнение (1.6), описывающее кинетику массообмена при двухпараметрическом фазовом переходе, вместе с уравнением для динамики изменения размера газового пузырька, полученным ниже, позволяет замкнуть описание двухфазной системы, рассматриваемой в данной работе.

2. При расширении газового пузырька жидкость вокруг него приходит в движение. Условие несжимаемости жидкости и закон сохранения ее импульса приводят к динамическому уравнению Рэлея

$$p_b=p_l+\frac{2\sigma}{r_b}+\rho_l r_b\ddot{r}_b+\frac{3}{2}\rho_l\dot{r}_b{}^2+\frac{2\eta\dot{r}_b}{r_b} \tag{2.1}$$

В уравнении (2.1) и условии несжимаемости учтен факт малости относительного количества атомов примеси, растворенных в жидкости.

В случае газового пузырька постоянной массы (при отсутствии фазового перехода) для замыкания уравнения (2.1) обычно используют уравнение политропы для газа примеси в пузырьковой фазе $p_b/p_b^\circ=(\rho_b/\rho_b^\circ)^n$. Дополнительные виды диссипации (тепловую, из-за фазовых переходов, акустическую и т. п.) учитывают, как правило, путем введения в (2.1) вместо вязкости жидкости η эффективной вязкости η_e. Однако в рассматриваемом случае фазовый переход обусловливает подкачку энергии в систему, что приводит к необходимости вместо уравнения политропы использовать закон сохранения энергии двухфазной среды как целого

$$d\varepsilon+pdV=Qdt \tag{2.2}$$

где ε и V — удельные внутренняя энергия и объем жидкости с пузырьками газа, $p=p_b-p_l-2\sigma/r_b$ — суммарное давление в двухфазной среде, Q — удельная мощность тепловых источников.

Рассмотрим двухтемпературное приближение с пренебрежимо малым теплообменом между фазами. В этом случае

$$\begin{gathered} Q=0,\quad d\varepsilon=d(n\varepsilon_b/\rho)=(n^\circ/\rho)\,d\varepsilon_b \\ d\varepsilon_b=\varepsilon_0\,dn_b+\frac{3}{2}\,d(p_bv_b) \end{gathered} \tag{2.3}$$

где n — плотность пузырьков, ρ — средняя плотность среды. Первое слагаемое в (2.3) определяет подкачку энергии в систему при фазовом переходе, второе — энергию, идущую на нагрев газа в пузырьке.

3. Плотность жидкости ρ_l связана со средней плотностью двухфазной среды и плотностью пузырьков n следующими соотношениями:

$$\rho=\rho_l\left(1-\frac{4}{3}\pi r_b^3 n\right),\qquad \frac{n}{n^\circ}=\frac{\rho}{\rho^\circ} \tag{3.1}$$

Из выражения (3.1) следует

$$\begin{gathered} \left(\frac{r_b}{r_b^\circ}\right)^3=\frac{1}{\varkappa^\circ}\,\frac{\rho_l-\rho}{\rho}\,\frac{\rho^\circ}{\rho_l},\qquad \dot r_b=-\frac{r_b}{3\varkappa}\,\frac{\dot\rho}{\rho} \\ \ddot r_b=-\frac{r_b}{3\varkappa}\,\frac{\ddot\rho}{\rho}-\frac{2r_b(1-3\varkappa)}{9\varkappa^2}\,\frac{\dot\rho^2}{\rho} \end{gathered} \tag{3.2}$$

где $\varkappa$ — относительный объем пузырьковой фазы. Линеаризуя систему нелинейных уравнений (1.6), (2.1), (2.2), определяющую совместно с соотношениями (3.2) динамическое уравнение состояния жидкости с пузырьками растворимого газа, получим

$$\begin{gathered} p_l=p_b+m\ddot\rho+\zeta_1\dot\rho,\quad \dot n_b+\zeta_2 p_b=0 \\ \varepsilon\dot n_b+\dot p_b=\zeta_3\dot\rho,\qquad m=\frac{\rho_l(r_b^\circ)^2}{3\varkappa^\circ\rho^\circ},\qquad \zeta_1=\frac{2\eta}{3\varkappa^\circ\rho^\circ} \\ \zeta_2=\frac{4\pi D\nu(r_b^\circ)^2 n_s^\circ}{p_b^\circ[r_b^\circ+l\exp(\Delta/T)]},\qquad \zeta_3=\frac{p_b^\circ}{\varkappa^\circ\rho^\circ},\qquad \varepsilon=\frac{\varepsilon_0}{2\pi(r_b^\circ)^3} \end{gathered} \tag{3.3}$$

При выводе системы (3.3) учитывалось, исходя из (2.1), что слагаемое pdV в уравнении (2.2) имеет второй порядок малости по сравнению со слагаемым $d\varepsilon$, а также предполагалось, следуя [1], что силами поверхностного натяжения можно пренебречь.

Исключив из системы (3.3) переменные n_b и p_b, получим линеаризованное динамическое уравнение состояния, связывающее переменные p_l и ρ.

$$\tau\dot{p}_l-p_l=\alpha\dot{\rho}+\beta\ddot{\rho}+\gamma\dddot{\rho}, \quad \tau=\frac{1}{\varepsilon\zeta_2}, \quad \alpha=\frac{\zeta_3}{\varepsilon\zeta_2}-\zeta_1, \quad \beta=\frac{\zeta_1}{\varepsilon\zeta_2}-m, \quad \gamma=\frac{m}{\varepsilon\zeta_2} \tag{3.4}$$

При отсутствии фазового перехода уравнение (3.4) сводится к часто встречающемуся в литературе [2, 3] уравнению

$$p_l=c_0^2\rho+\zeta_1\dot{\rho}+m\ddot{\rho} \quad c_0^2=\zeta_3 \tag{3.5}$$

4. Рассмотрим для простоты плоское течение двухфазной среды. Тогда система гидродинамических уравнений в односкоростном приближении имеет вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho u}{\partial x}=0, \quad \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{x}\right)=\frac{\partial p_l}{\partial x}+\frac{4}{3}\eta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{4.1}$$

Здесь ρ и p_l — усредненные плотность двухфазной среды и давление в жидкости, u — скорость жидкости и пузырьков. Система уравнений (4.1) замыкается уравнением состояния, которое для слабых возмущений имеет вид (4.3). Система уравнений двухфазной гидродинамики (4.1) справедлива, когда характерная длина возмущения много больше расстояния между пузырьками. В этом случае их распределение можно не детализировать и рассматривать газожидкостную смесь как сплошную среду с усредненными характеристиками. Адекватность системы уравнений (4.1), (3.4) реальному процессу распространения волн соответствует случаю малости частот возмущений, воздействующих на систему. Далее рассмотрим лишь низкочастотные возмущения с частотой $\omega_p\tau\ll 1$, где τ — характерное время в уравнении состояния (3.4). В этом случае уравнение состояния (3.4) примет вид

$$-p_l=\alpha\dot{\rho}+\beta\ddot{\rho}+\gamma\dddot{\rho} \tag{4.2}$$

Из уравнения состояния (4.2) уже нельзя перейти к пределу соответствующему отсутствию фазового перехода ($\tau=+\infty$), ибо в этом случае будет нарушаться условие $\omega_p\tau\ll 1$.

5. Преобразуем систему уравнений (4.1), (4.2) для расчета слаболинейных возмущений, используя технику теории возмущений. При этом будем считать, следуя [1], что слагаемые с коэффициентами α, β, γ, η имеют второй порядок малости. Подставляя (4.2) во второе уравнение системы (4.1) и удерживая члены вплоть до второго порядка малости получим

$$u_t+uu_x+\alpha' u_{xx}+\beta u_{txx}+\gamma u_{ttxx}=0 \tag{5.1}$$

$$\alpha'=\alpha+\frac{4\eta}{3\rho^\circ}$$

Характер решения уравнения (5.1), как показало математическое моделирование, существенным образом зависит от знаков α' и γ. При $\alpha'<0$ и $\gamma<0$ начальное возмущение в двухфазной среде может лишь затухать, тогда как при $\alpha'>0$ и $\gamma>0$ уравнение (5.1) описывает нелинейные волны, у которых имеется доминантная частота, возникающая из произвольного начального возмущения с периодическими граничными условиями. В результате эволюции начального возмущения, заданного в виде белого шума, в средах, описываемых нелинейным волновым уравнением (5.1), происходит явление самоорганизации в систему кноидальных волн. Таким образом, в жидкости с пузырьками растворимого газа могут возникнуть солитоны даже при существенном вкладе диссипативных процессов.

6. Уравнения типа (5.1) использовались ранее для описания волновых процессов при стекании тонких пленок жидкости по наклонной плоскости [10, 11], при исследовании турбулентных явлений в жидкости [12], для анализа волн дрейфа в плазме [13], для объяснения возникно-

вения доминантных частот при распространении волн в фрагментированных пористых средах [14] и т. д.

Перейдем в уравнении (5.1) к координатам бегущей волны

$$\xi = x - c_0 t$$

$$q - c_0 u + \frac{u^2}{2} + \alpha' u_\xi - c_0 \beta u_{\xi\xi} + \gamma c_0^2 u_{\xi\xi\xi} = 0 \tag{6.1}$$

Здесь q — постоянная, которая находится из начальных и граничных условий, c_0 — скорость волны. Уравнение (6.1) имеет преобразование решений типа Бэклунда [14] вида

$$u(\xi) = u_1(\xi) + \frac{15}{76}\left(16\alpha' - \frac{\beta^2}{\gamma}\right)\frac{\partial}{\partial\xi}\ln F - 15\beta c_0 \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\ln F + 60\gamma c_0^2 \frac{\partial^3}{\partial\xi^3}\ln F \tag{6.2}$$

Здесь $u_1(\xi)$, так же как и $u(\xi)$, удовлетворяет уравнению (6.1). Функция $F(\xi)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению четвертого порядка, одно из решений которого имеет вид

$$F(\xi) = C_1 + C_2 \exp(k\xi) \tag{6.3}$$

Здесь C_1 и C_2 — произвольные постоянные, k — постоянная, значение которой определяется из алгебраического уравнения после подстановки (6.3) в уравнение относительно $F(\xi)$. В частности, при $u_1=0$, $\beta^2=16\alpha'\gamma$, $C_1=C_2=1$, k и c_0 выражаются формулами

$$k = \pm\sqrt{\alpha'/(\gamma c_0^2)}, \quad c_0 = [36(\alpha')^3/\gamma^2]^{1/4} \tag{6.4}$$

Решение, которое находится из (6.2), в этом случае имеет вид

$$u(\xi) = 15\alpha'\sqrt{\alpha'/\gamma c_0^2}\,\mathrm{ch}^{-2}(k\xi/2)\,[1 - \mathrm{th}^2(k\xi/2)] \tag{6.5}$$

Выражение (6.5) описывает уединенную волну, распространяющуюся в жидкости с пузырьками растворимого газа при наличии массообмена между фазами. Существуют и другие аналитические решения уравнения (5.1). В настоящее время авторами с использованием численных методов проводится исследование нелинейных возмущений, описываемых уравнениями типа (5.1), при произвольных значениях α', γ и β.

Нелинейные волны в жидкости с пузырьками растворимого газа описываются обобщенным эволюционным уравнением четвертого порядка, которое отличается от уравнения, полученного ранее [5], как в смысле структуры и вывода самих решений, так и в плане допускаемых им решений. Физическая предпосылка этих различий заключается в механизмах переноса массы. В данной работе полагается, что массоперенос обусловлен процессом перерастворения атомов газа в жидкости из-за изменения давления в пузырьке, а в работах [4, 5] — тепловым потоком, оказывающим влияние на изменение степени пересыщения, а тем самым и на массоперенос атомов пара. Массоперенос при перерастворении газа в жидкости может происходить даже в изотермических условиях, тогда как при конденсации пара — только при наличии в среде теплового потока, определяемого температурным градиентом. Уравнение четвертого порядка типа (5.1) имеет аналитическое решение в виде уединенной волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нигматулин Р. И.* Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Ч. 1. 464 с.; Ч. 2. 359 с.
2. *Накоряков В. Е., Соболев В. В., Шрейбер И. Р.* Длинноволновые возмущения в газожидкостной смеси // Изв. АН СССР. МЖГ. 1972. № 5. С. 71–76.
3. *Кузнецов В. В., Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Шрейбер И. Р.* Жидкость с пу-

зырьками газа как пример среды Кортевега – де Вриза – Бюргерса // Письма в ЖЭТФ. 1976. Т. 23. № 4. С. 194–198.
4. *Зыонг Нгок Хай, Нигматулин Р. И., Хабеев Н. С.* Нестационарные волны в жидкости с пузырьками пара // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 5. С. 117–125.
5. *Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Шрейбер И. Р.* Распространение волн в газо- и парожидкостных средах. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1983. 237 с.
6. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.
7. *Bondarenko A. G.* The size distribution of macroscopic defects in media containing gas admixture // Phys. stat. sol. (a). 1985. V. 89. P. 541–548.
8. *Бондаренко А. Г.* Термодинамика и кинетика пузырьковой фазы в твердом теле с внедренными атомами газовой примеси // ФТТ. 1988. Т. 30. № 1. С. 3–11.
9. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. Пер. с англ. М.: Мир, 1977. 621 с.
10. *Шкадов В. Я.* Уединенные волны в слое вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1977. № 1. С. 63–66.
11. *Kawahara T.* Formation of saturated solitons in nonlinear dispersive system with unstability and dissipation // Phys. Rev. Lett. 1983. V. 51. № 5. P. 381–383.
12. *Tatsumi T.* Irregularity, regularity and singularity of turbulence // Turbulence and chaotic phenomena in fluids. Iutam, 1984. P. 1–10.
13. *Cohen B. I., Krommes I. A., Tang W. M., Rosenbluth M. N.* Non-linear saturation of the dissipative trappedion mode by mode conpling // Nucl. fussion 1976. V. 16. № 6. P. 971–992.
14. *Кудряшов Н. А.* Преобразования Бэклунда для уравнения вязкоупругих волн в диспергирующей среде: Препринт № 007. М.: МИФИ, 1987. 16 с.
15. *Кудряшов Н. А.* Точные солитонные решения обобщенного эволюционного уравнения волновой динамики // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 3. С. 465–470.

Москва

Поступила в редакцию
29.I.1988