

УДК 532.529

## **РАДИАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПАРОВЫХ ПУЗЫРЬКОВ В РАСТВОРАХ**

**МИХЕЕВА Е. В., ХАБЕЕВ Н. С.**

Исследованы динамика и тепломассообмен паровых пузырьков в бинарных системах. Установлено аномальное влияние компонентного состава на динамику пузырьков в кипящих неидеальных растворах. Показано, что значение логарифмического декремента затухания малых свободных радиальных колебаний в некоторых бинарных системах не лежит в предельных значениях, рассчитанных для чистых компонент, что связано с кардинальным влиянием диффузии в жидкой фазе на интенсивность фазовых переходов.

Исследованию роста паровых пузырьков в перегретых растворах посвящено значительное число теоретических и экспериментальных работ, детальное обсуждение которых содержится в обзоре [1]. В этом случае из-за несущественности инерционных эффектов теоретическое описание процесса существенно упрощается и задача допускает автомодельное решение [2]. Большинство теоретических работ, посвященных этой проблеме, исходит из решения [2].

Представляет, однако, научно-методический и практический интерес исследование динамики и тепломассообмена паровых пузырьков в бинарных системах в общем случае, т. е. когда одновременно важны тепловые, диффузионные и инерционные эффекты.

Такой подход к изучению динамики пузырьков в кипящих растворах применительно к анализу их поведения в ударных волнах развит в [3]. Постановка задачи о сферически-симметричных процессах около паровых пузырьков изложена в [4, 5].

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим поведение парового пузырька в растворе, находящемся в поле переменного давления. Процессы, происходящие вокруг пузырька, будем рассматривать в рамках сферически-симметричной схемы. Параметры внутри пузырька предполагаются однородными (не зависящими от пространственной координаты).

В рамках принятых допущений уравнения состояния и неразрывности для компонент пара имеют вид

$$p_1 = \frac{\rho_{1v} B T_v}{\mu_1}, \quad p_2 = \frac{\rho_{2v} B T_v}{\mu_2} \quad (1.1)$$

$$^{1/3} R \dot{\rho}_{1v} + R \dot{\rho}_{1v} = j_1, \quad ^{1/3} R \dot{\rho}_{2v} + R \dot{\rho}_{2v} = j_2 \quad (1.2)$$

Здесь  $p_1, p_2$  — парциальные давления компонент,  $B$  — универсальная газовая постоянная,  $T_v$  — температура пара,  $\mu$  — молекулярный вес,  $R$  — радиус пузырька,  $\rho$  — плотность,  $j_i$  — скорость фазового перехода  $i$ -й компоненты с единицы межфазной поверхности. Нижние индексы 1, 2 относятся к параметрам 1-й и 2-й компонент, нижние индексы  $l$  и  $v$  — к параметрам жидкости и пара, индекс  $R$  — к параметрам на поверхности пузыря.

Уравнения притока тепла и диффузии для жидкой фазы имеют вид

$$\frac{\partial T_l}{\partial t} + v_R \frac{R^2}{r^2} \frac{\partial T_l}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( a_l r^2 \frac{\partial T_l}{\partial r} \right) \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + v_R \frac{R^2}{r^2} \frac{\partial k}{\partial r} = \frac{D}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial k}{\partial r} \right) \quad (1.4)$$

Граничные условия на поверхности и вдали от пузырька могут быть записаны в виде [3, 5]

$$r=R: T_i=T_v, k=k_R; r=\infty: T_i=T_0, k=k_0 \quad (1.5)$$

$$k_R j_2 - (1-k_R) j_1 = -\rho_l D \frac{\partial k}{\partial r}; \quad j_1 l_1 + j_2 l_2 = \lambda_l \frac{\partial T_i}{\partial r}$$

где  $D$  — коэффициент взаимной диффузии,  $k$  — концентрация первой компоненты,  $a_i$  — коэффициент температуропроводности,  $\lambda_l$  — коэффициент теплопроводности жидкости,  $l_1$  и  $l_2$  — удельные теплоты парообразования компонент. При этом предполагается, что теплота смешения значительно меньше теплот парообразования.

Динамика радиальных колебаний пузырька описывается обобщенным уравнением Рэлея [5]

$$\dot{R} = v_R + (j_1 + j_2) / \rho_l$$

$$R \dot{v}_R + \frac{3}{2} v_R^2 = \frac{p_1 + p_2 - p(\infty) - 2\sigma/R}{\rho_l} - \frac{4\nu v_R}{R} \quad (1.6)$$

где  $\sigma$ ,  $\nu$  — коэффициенты поверхностного натяжения и вязкости жидкости.

Предполагается, что для компонент пара неидеального раствора выполняется закон Дальтона [6], а для парциальных давлений чистых компонент справедливы соотношения Клапейрона — Клаузиуса

$$p = p_1 + p_2, \quad p_i = \gamma_i p_{si}(T_v) N_i(k_R), \quad p_2 = \gamma_2 p_{s2}(T_v) N_2(k_R) \quad (1.7)$$

$$N_i = \mu_2 k_R [\mu_2 k_R + \mu_1 (1 - k_R)]^{-1} \quad (1.8)$$

$$\frac{dp_{si}}{dT_v} = \frac{\mu_i l_i p_{si}}{B T_v^2}, \quad i=1, 2 \quad (1.9)$$

где  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  — коэффициенты активности,  $N_1(k_R) = 1 - N_2$  — мольная доля первого компонента в растворе.

На основе решения [2] в [7] получен критерий, устанавливающий, в каких случаях будет проявляться эффект аномального влияния концентрации компонент на поведение пузырька в растворах. Установлено, что определяющим является значение величины

$$\beta_i = (1 - \gamma^{-1}) \frac{(k_v - k_l)(N_v - N_l)}{k_l(1 - k_l)} \frac{c_l}{c_{pv}} \sqrt{\frac{a_l}{D} \left( \frac{c_{pv} T_0}{L} \right)^2}$$

где  $\gamma$  — показатель адиабаты пара,  $c_{pv}$  — теплоемкость пара при постоянном давлении,  $N_l$ ,  $N_v$  — молярные концентрации 1-й компоненты в жидкости и паре.

Было установлено, что при выполнении условия  $\beta_i \ll 1$  диффузионного запаздывания фазовых переходов не происходит. В случае же, когда  $\beta_i \gg 1$ , можно ожидать эффекта диффузионного сопротивления, приводящего к аномальному влиянию компонентного состава на поведение паровых пузырьков.

**2. Малые колебания паровых пузырьков в растворах.** Рассмотрим паровой пузырек, совершающий свободные радиальные колебания в растворе двух несжимаемых компонент. В случае малых колебаний с амплитудой  $\delta$  радиус пузырька может быть описан действительной частью выражения

$$R = R_0(1 + \delta(t)) = R_0(1 + \delta^0 \exp(ht))$$

где  $\delta$  — комплексное число, а частота колебаний  $f = \omega/2\pi = \text{Im}(h)/2\pi$ .

Система основных уравнений (1.1) — (1.9) линеаризуется. Пусть  $\theta(r)$ ,  $\theta_v$ ,  $K(r)$ ,  $Z_i$ ,  $P_i$  — малые отклонения от состояния равновесия температу-

ры жидкости и пузырька, концентрации 1-й компоненты в растворе, плотности и давления  $i$ -й компоненты пара

$$\begin{aligned} T_i &= T_0(1 + \theta_i(r, t)), \quad \rho_{i0} = \rho_{i00}(1 + z_i), \quad k = k_0(1 + K(r, t)) \\ p_i &= p_{i0}(1 + P_i(t)), \quad T_v = T_0(1 + \theta_v(t)), \quad H = hR_0^2/a_i \end{aligned} \quad (2.1)$$

Систему основных уравнений после линеаризации и перехода к безразмерным величинам с учетом соотношений (2.1) можно переписать в виде

$$P_1 = \theta_v + Z_1, \quad P_2 = \theta_v + Z_2 \quad (2.2)$$

$$H(Z_1 + 3\delta) = 3J_1 R_1, \quad H(Z_2 + 3\delta) = 3J_2 R_2$$

$$H\theta_i = \nabla^2 \theta_i, \quad HK = \frac{1}{Le} \nabla^2 K \quad (2.3)$$

$$\theta_i|_1 = \theta_v, \quad K|_1 = K_R, \quad \theta_i|_\infty = 0, \quad K|_\infty = 0$$

$$k_0 J_2 - (1 - k_0) J_1 = - \frac{k_0}{Le} \frac{\partial k}{\partial \xi} \Big|_1, \quad J_1 L_1 + J_2 L_2 = \frac{\partial \theta_i}{\partial \xi} \Big|_1 \quad (2.4)$$

$$HV_R = N(\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + 2S\delta) - 4MV_R$$

$$P_1 = K_R \left( \frac{1}{1 + (\mu_s - 1)k_0} + A \right) + \theta_v M_1, \quad \delta H = V_R \quad (2.5)$$

$$P = \theta_v M_2 - K_R \left( \frac{\mu_s k_0}{(1 + (\mu_s - 1)k_0)(1 - k_0)} + B \right)$$

$$R_1 = \frac{\rho_l}{\rho_{l0v}}, \quad R_2 = \frac{\rho_l}{\rho_{20v}}, \quad L_1 = \frac{l_1}{c_l T_0}, \quad L_2 = \frac{l_2}{c_l T_0}$$

$$B = - \frac{k_0}{\gamma_{20}} \frac{d\gamma_2}{dK_R} \Big|_{K_R = k_0}, \quad \alpha_1 = \frac{p_{10}}{p_\infty}, \quad \alpha_2 = \frac{p_{20}}{p_\infty}$$

$$A = \frac{k_0}{\gamma_{10}} \frac{d\gamma_1}{dK_R} \Big|_{K_R = k_0} \quad (2.6)$$

Решения уравнений (2.3), удовлетворяющие граничным условиям при  $\xi = 1$  и  $\xi = \infty$ , представим в виде

$$\theta_i = \theta_v \frac{\exp \sqrt{H}(1 - \xi)}{\xi}, \quad K = K_R \frac{\exp \sqrt{H} Le(1 - \xi)}{\xi} \quad (2.7)$$

Градиенты температуры и концентрации на поверхности пузырька будут иметь вид

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial \xi} \Big|_1 = -(1 + \sqrt{H}) \theta_v, \quad \frac{\partial K}{\partial \xi} \Big|_1 = -(1 + \sqrt{H} Le) K_R \quad (2.8)$$

Подставив (2.7) в граничные условия (2.4) и разрешая полученную систему относительно  $J_1$  и  $J_2$ , получим

$$J_1 = - \frac{\theta_v(1 + \sqrt{H}) + K_R L_2(1 + \sqrt{H} Le)/Le}{L_1 + L_2(1 - k_0)/k_0} \quad (2.9)$$

$$J_2 = \frac{K_R L_1(1 + \sqrt{H} Le)/Le - \theta_v(1 + \sqrt{H})(1 - k_0)/k_0}{L_1 + L_2(1 - k_0)/k_0}$$

Из уравнений (2.2)–(2.5) с учетом соотношений (2.6)–(2.9) можно получить характеристическое уравнение относительно  $H$  как условие существования нетривиального решения системы линейных уравнений. Это уравнение после несложных преобразований можно привести к полиному 6-й степени

$$\begin{aligned}
 & a_6 x^6 + a_5 x^5 + a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \\
 x = \sqrt{3N}, \quad a_0 = & -\frac{9N}{a_3} \left( c_4 + \frac{c_5}{Le} \right), \quad a_1 = -\frac{9N}{a_3} \left( c_4 + \frac{c_5}{\sqrt{Le}} \right), \quad a_2 = -(b_4 + 3Nc_3). \\
 a_3 = & -b_4(1 + \sqrt{Le}), \quad a_4 = b_3 - b_2 - b_4 \sqrt{Le}, \quad a_5 = b_3 \sqrt{Le} - b_2 \\
 a_6 = & \frac{1}{1-k_0} \left\{ 1 - \frac{\mu_3 M_1}{a_7} (k_0 + (1-k_0)L_{21}) \right\} + b_5 \\
 a_7 = & 1 + (\mu_3 - 1)k_0, \quad a_8 = L_1 + L_2 \frac{1-k_0}{k_0} \\
 b_2 = & \frac{3}{a_7 a_8 (1-k_0)} \left( k_0 \mu_3 R_1 + \frac{(1-k_0)^2}{k_0} R_2 (1 + A a_7) \right) - \frac{3B}{a_8 (1-k_0)} \\
 b_3 = & \frac{3}{Le a_8} (L_1 R_2 (1 - M_1) + L_2 R_1 (1 - M_2)), \quad b_4 = \frac{9R_1 R_2}{Le a_8} \\
 b_5 = & A(1 - M_2) + B(1 - M_1), \quad c_3 = c_2 \left( \frac{1}{1-k_0} + A + B \right) + c_1 M_1 (\mu_3 L_{21} - 1) \\
 c_4 = & c_1 \left( R_2 \frac{1-k_0}{k_0} - R_1 \right), \quad c_5 = c_2 (R_2 L_1 + R_1 L_2), \quad R_{21} = \frac{\rho_{20v}}{\rho_{10v}} \\
 c_1 = & \frac{k_0 \mu_3}{a_7^2} (p_{s1}(T_0) \gamma_{10} - p_{s2}(T_0) \gamma_{20}), \quad c_2 = M_1 \frac{1 + R_{21} L_{21}}{1 + R_{21} / \mu_3}
 \end{aligned}$$

Проверка показала, что в частных случаях однокомпонентных систем, когда  $k=0$  и 1 или когда свойства фаз совпадают, характеристическое уравнение (2.10) переходит в характеристическое уравнение [10], полученное ранее для однокомпонентных систем. При  $D=\infty$  уравнение (2.10) переходит в уравнение для однокомпонентной системы с некоторыми эффективными параметрами.

**3. Асимптотические решения характеристического уравнения.** В случае, когда влияние фазовых переходов и диффузии компонент мало, частота свободных колебаний пузырька близка к полученной в [11] для газового пузырька:  $\omega_0 = (3p_0/\rho_l)^{1/2}/R$ .

В этом случае можно получить асимптотические решения уравнения (2.10), отыскивая их в виде

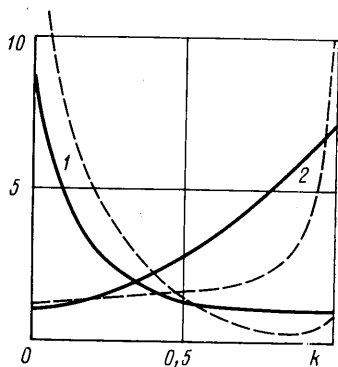
$$H = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (3.1)$$

$$r = \sqrt{3N}(1 + \varepsilon), \quad |\varepsilon| \ll 1, \quad \sin \varphi \approx 1, \quad \cos \varphi < 0, \quad |\cos \varphi| \ll 1$$

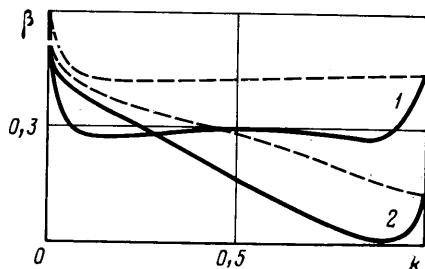
Условия (3.1) означают, что частота колебаний пузырька мало отличается от миннаэртговской частоты изотермических колебаний газового пузырька и затухание колебаний также мало.

Из (3.1) следует, что  $\varphi = \pi/2 + \beta$ , где  $\beta > 0$ ,  $\beta \ll 1$ . Тогда, используя асимптотические значения для тригонометрических функций от  $\varphi$ , подставив их в действительную и мнимую части уравнения (2.10) и пренебрегая произведениями малых величин  $\varepsilon\beta$ , получим систему двух линейных уравнений относительно  $\varepsilon$  и  $\beta$

$$3a_6(3N)^{3/2}\beta - a_5(3N)^{5/2} \frac{(1+5\varepsilon/2)}{\sqrt{2}} - 3Na_4(1+2\varepsilon) - a_3(3N)^{3/2} \frac{1+3\varepsilon/2}{\sqrt{2}} -$$



Фиг. 1



Фиг. 2

$$\begin{aligned}
 & -a_2(3N)^{1/2}\beta + a_1(3N)^{1/4} \frac{1+\varepsilon/2}{\sqrt{2}} + a_0 = 0 \quad (3.2) \\
 & (1+3\varepsilon)a_6(3N)^{3/4} - a_5(3N)^{3/4} \frac{1+5\varepsilon/2}{\sqrt{2}} + 6Na_4\beta - a_3(3N)^{1/4} \frac{1+3\varepsilon/2}{\sqrt{2}} - \\
 & -a_2(3N)^{1/2}(1+\varepsilon) - a_1(3N)^{1/4} \frac{(1+\varepsilon/2)}{\sqrt{2}} = 0
 \end{aligned}$$

Разрешая эту систему относительно  $\varepsilon$  и  $\beta$ , можно получить выражения для частоты свободных колебаний пузырька в растворе и логарифмического декремента затухания колебаний

$$\omega = \omega_0(1+\varepsilon), \quad \Lambda = -2\pi \frac{\operatorname{Re}\{h\}}{|\operatorname{Im}\{h\}|} = 2\pi\beta$$

В случае достаточно крупных пузырьков, когда  $N^{1/2} \gg 1$ , решение системы (3.2) имеет вид

$$\beta = \frac{a_5 - a_1/3N}{(3a_6 + c_3)\sqrt[4]{12N}}, \quad \varepsilon = -\beta \quad (3.3)$$

Из формул (3.3) видно, что поправка к частоте свободных колебаний и декремент затухания колебаний растут с уменьшением радиуса пузырьков пропорционально  $R_0^{-1/2}$ .

**4. Результаты расчетов.** Были проведены расчеты для парового пузырька, колеблющегося около положения равновесия в растворах из двух компонент.

На фиг. 1 приведены зависимости коэффициентов активности  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  (соответственно кривые 1 и 2) от концентрации. Сплошные кривые приведены для системы этанол — бензол ( $k$  — концентрация этанола) [12]. Штриховые кривые рассчитаны для системы Н-бутанол — вода ( $k$  — концентрация Н-бутанола) по табличным данным [8, 9] и формулам

$$p_0 = p_{s1}N_1\gamma_1 + p_{s2}N_2\gamma_2, \quad k_1^* = \frac{k_1\gamma_1 p_{s1}}{p_{s2}k_2\gamma_2 + p_{s1}k_1\gamma_1}$$

где  $k_1^*$  — концентрация 1-й компоненты в паре.

Полученные кривые для системы Н-бутанол — вода согласуются с [13].

На фиг. 2 по формуле (3.3) рассчитана зависимость декремента затухания колебаний  $\beta$  от концентрации. Кривая 1 соответствует системе этанол — бензол, 2 — системе Н-бутанол — вода. Причем сплошные кривые

рассчитаны для реального значения коэффициента диффузии ( $D=10^{-9}$  м<sup>2</sup>/с), штриховые — для значения коэффициента диффузии  $D=\infty$ . Радиус пузырька для системы этанол — бензол —  $10^{-4}$  м, для системы Н-бутанол — вода —  $10^{-3}$  м. Пузырьки брались достаточно крупные, так как решение искали близкое к миннаэртзовскому.

Расчеты показали кардинальное влияние диффузии в жидкой фазе на декремент затухания: наличие диффузии в растворе снижало скорость фазовых переходов, а следовательно, и декремент затухания (зависимость от концентрации не монотонная).

В случае  $D=\infty$  раствор можно рассматривать как однокомпонентную среду с эффективными свойствами.

Для систем этанол — бензол  $\beta_1=0,275$  при концентрациях этанола 0,069 в жидкости и 0,21 в паре. В случае второй системы Н-бутанол — вода  $\beta_1=0,58$  при концентрациях Н-бутанола в жидкости и в паре соответственно 0,801 и 0,26. По критерию, сформулированному ранее, при  $\beta_1 \geq 1$  можно ожидать эффекта диффузионного сопротивления. Действительно, расчеты показывают наличие эффекта немонотонности (величина декремента затухания не лежит в предельных значениях, как в случае  $D=\infty$ ), но так как  $\beta_1 \sim 1$ , эффект проявляется не очень ярко.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Shock R. A. Boiling in multicomponent fluids // Multiphase science and technology. New York: Hemisphere publishing corporation. 1981. P. 512.
2. Scriven L. E. On the dynamics of phase growth // Chem. Eng. Sci. 1959. V. 10. P. 1—13.
3. Афган Н. Х., Нигматулин Р. И., Хабеев Н. С. Теплообмен и динамика парового пузырька в бинарных системах // Теплообмен-VII. Матер. Всесоюз. конф. по теплообмену. Т. 4. Ч. 2. Минск: Институт тепло- и массообмена АН БССР. 1984. С. 15—22.
4. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1983. 528 с.
5. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
6. Кириллин В. А., Шейндлин А. Е., Шпильрайн Э. Э. Термодинамика растворов. М.: Энергия, 1980. 287 с.
7. Хабеев Н. С., Шагапов В. Ш. Акустика бинарных парожидкостных систем пузырьковой структуры // VI Всесоюз. съезд по теоретической и прикладной механике, Ташкент, 24—30 сент. 1986: Аннот. докл. Ташкент, 1986. С. 620—621.
8. Варгафтик Н. Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Наука, 1972. 720 с.
9. Справочник химика/Под ред. Никольского Б. П. М.; Л.: Химия, 1962. Т. 1. 1071 с.; 1964. Т. 3, 1005 с.
10. Хабеев Н. С. Эффекты теплообмена и фазовых переходов при колебаниях паровых пузырьков // Акуст. журн. 1975. Т. 21. № 5. С. 815—821.
11. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1984. 560 с.
12. Гугенгейм Э. А., Фаулер Р. Статистическая термодинамика: Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1949. 612 с.
13. Шахпаронов М. И. Введение в молекулярную теорию растворов. М.: Гостехтеориздат, 1956. 507 с.

Москва

Поступила в редакцию  
31.III.1988