МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 3 · 1989

УДК 532.527

ИНТЕНСИФИКАЦИЯ ВИХРЯ В СХОДЯЩИХСЯ ТЕЧЕНИЯХ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ — НЕАВТОМОДЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА

СОКОЛОВ И. В.

Эффект интенсификации вихря, под которым обычно понимается усиление вращения в течениях жидкости, сходящихся к оси вращения, неоднократно рассматривался в литературе [1]. Предполагается, что его исследование способствует пониманию таких явлений, как атмосферные вихри — смерчи и торнадо [2–4] или усиление вращения в жидкости, вытекающей из сосуда через отверстие в дне [5].

Соответствующая гидродинамическая задача представляет интерес еще и потому, что ее результаты после простых переобозначений переносятся на описание усиления магнитного поля в сходящихся течениях проводящей жидкости. Среди различных процессов усиления поля наиболее близок к предмету настоящей работы механизм генерации сверхсильных магнитных полей при захлопывании цилиндрической полости в проводящей жидкости [6].

Из теоретических вопросов, связанных с интенсификацией вихря, существенный интерес представляет анализ роли вязкости – в каких случаях вязкость может ограничивать или даже предотвращать рост скорости вращения. В частности, при захлопывании цилиндрической полости во вращающейся идеальной жидкости ввиду сохранения циркуляции на свободной поверхности скорость вращения возрастает неограниченно при уменьшении радиуса полости. Возникает вопрос, способна ли сколько угодно малая вязкость ограничить этот рост. Для сравнения: в близкой задаче о захлопывании сферического пузырька учет малой вязкости не предотвращает неограниченный рост давления (кумуляцию) [7].

Анализ интенсификации завихренности в сходящихся течениях вязкой несжимаемой жидкости и составляет предмет настоящей работы.

1. Постановка задачи. Рассматриваются течения вязкой несжимаемой жидкости, которые обладают осевой симметрией (в цилиндрических координатах r, z, φ для всех функций $\partial/\partial\varphi=0$) и имеют только аксиальную компоненту вихря

$$\mathbf{\Omega}=\operatorname{rot}\mathbf{v}=(0,\ \omega,\ 0),\quad \omega\neq 0 \qquad (1.1)$$

В частном случае, когда в жидкости отсутствует потенциальное «фоновое» течение с компонентами скорости v_z и v_r, диффузия вихря описывается двумерным уравнением теплопроводности и хорошо изучена [8, 9]. При наличии фонового течения получены частные стационарные решения, из которых наиболее известен вихрь Бюргерса [1], а также некоторые нестационарные решения [1–4, 10], имеющие автомодельный характер, т. е. зависящие от координаты r и времени t в комбинации $r^2/f(t)$. В [2, 3] впервые было отмечено, что фоновое течение, совместимое с условием (1.1), может быть только комбинацией течения с однородной деформацией (v_r и v_z — линейные функции от r, z) плюс сток на оси с обильностью, не зависящей от z ($v_r\propto 1/r$). Условия $\Omega_r=0$ и $\partial/\partial\varphi=0$ совместно с уравнениями движения в форме Громека — Лэмба [8] дают (ν — кинематическая вязкость)

$$v_r=c(t)r+\nu\operatorname{Re}(t)/r,\quad v_z=-2c(t)z \qquad (1.2)$$

Здесь $c(t)$ и $\operatorname{Re}(t)$ — произвольные функции времени, причем $\operatorname{Re}(t)$, характеризующая обильность источника (стока) на оси, обезразмерена так, что имеет смысл числа Рейнольдса. Отметим, что в [3], наоборот, (1.2) выводится из условия $\Omega_\varphi=0$, а из (1.2) следует $\Omega_r=0$.

Уравнение для ω дает z-компонента уравнения Громека — Лэмба

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r\omega)=\frac{\nu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\omega}{\partial r}\right) \qquad (1.3)$$

Известные до сих пор нестационарные автомодельные решения (1.3) обладают существенным недостатком — при $t\to0$ все они стремятся к сингулярной вихревой нити, сосредоточенной в начале координат. Ясно, что объединение локализации завихренности вблизи оси на основании решений, с самого начала локализованных на оси, затруднительно.

В настоящей работе построено фундаментальное решение уравнений (1.3), позволяющее проследить интенсификацию вихря для любого начального его распределения. При решении делается единственное упрощающее предположение, что $\mathrm{Re}(t)=\mathrm{const}$. В качестве примера решена задача об интенсификации вращения при захлопывании пустого цилиндрического канала в жидкости.

2. Фундаментальное решение уравнения (1.3). Рассмотрим сначала случай $c(t)\equiv0$. Фундаментальное решение уравнения (1.3), удовлетворяющее условию $u_0(t,r,r_1)\to\delta(r-r_1)$ при $t\to0$, выражается через функции

$$u_\pm=\frac{1}{4\pi\nu t}\left(\frac{r}{r_1}\right)^{\mathrm{Re}/2}I_{\pm\mathrm{Re}/2}\left(\frac{rr_1}{2\nu t}\right)\exp\left(-\frac{r^2+r_1^2}{4\nu t}\right) \qquad (2.1)$$

Здесь $I_\mu(z)$ — модифицированная функция Бесселя, выбор знака в (2.1) проведен ниже. Функция (2.1), как показывает проверка, удовлетворяет уравнению (1.3). При $rr_1\neq0$ и $t\to0$ $u_\pm\to\delta(r-r_1)$.

Поскольку уравнение (1.3) сохраняет интеграл

$$\Gamma_0=2\pi\int\limits_0^\infty \omega r\,dr \qquad (2.2)$$

имеющий смысл циркуляции скорости [8] на бесконечно удаленной окружности (предполагается здесь и далее, что (2.2) сходится), в качестве скалярного произведения функций, по отношению к которому определена и δ-функция, выберем интеграл их произведения с весом $2\pi r$. Для функции (2.1) интеграл с этим весом равен единице.

Решение с $c(t)$, не равной нулю, ищется в виде (2.1) с заменой $\nu\to\nu a(t)/t$ и $r_1\to r_1b(t)$, где $a(t)$ и $b(t)$ — неизвестные, подлежащие определению функции («вариация постоянных»). Подставляя в таком виде (2.1) в (1.3), после простых, но громоздких выкладок получим систему уравнений для функции a и b, которая совместно с начальными условиями $b\to1$ и $a/t\to1$ при $t\to0$ дает

$$b(t)=\exp\left[\int\limits_0^t c(\tau)\,d\tau\right],\qquad a(t)=b^2(t)\int\limits_0^t b^{-2}(\tau)\,d\tau$$

Функция (2.1) после указанной замены являются решениями уравнения (1.3) с $c(t)\neq0$.

Выбор знака в формуле (2.1) связан с наличием особенности на оси у функции $I_{-\mu}(z)$. Рассмотрим отдельно следующие случаи.

При $\mathrm{Re}>0$ фундаментальным решением является $u_0=u_+$, так как функция u_- конечна при $r\to0$ и при подстановке в уравнение (1.3) приводит к конечной величине выходящего из оси потока завихренности

$$\Pi_r=2\pi r\left(v_r\omega-\nu\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)$$

При $\mathrm{Re}<-2$ одно из решений имеет на оси особенность. Для ее анализа рассмотрим в качестве фонового модельное течение, в котором сток жидкости сосредоточен не на оси, а в некоторой ее окрестности с малым радиусом l. Пусть v_r и v_z имеют следующее распределение:

$$v_r=\mathrm{Re}\,\nu/r,\ v_z=0\ (r>l)$$
$$v_r=\mathrm{Re}\,\nu r l^{-2},\ v_z=-2\,\mathrm{Re}\,\nu z l^{-2}\ (r<l) \tag{2.3}$$

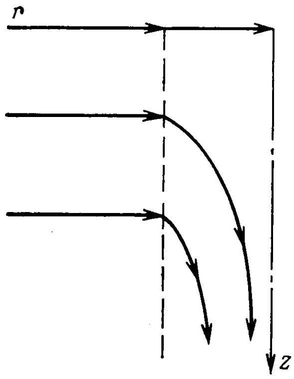
Линии тока изображены на фигуре. Вероятно, формулы (2.3) могут грубо моделировать фон, на котором происходит интенсификация вихря при вытекании жидкости из сосуда через отверстие в дне. При $\mathrm{Re}<0$ уравнение (1.3) на фоне (2.3) имеет регулярное решение

$$\omega_*=\exp\left(-\frac{|\mathrm{Re}|r^2}{2l^2}\right),\quad r<l;\qquad \omega_*=\exp\left(-\frac{|\mathrm{Re}|}{2}\right)\left(\frac{l}{r}\right)^{|\mathrm{Re}|},\quad r>l \tag{2.4}$$

Фундаментальное решение при $l\to0$ имеет вид

$$u_0=u_-,\ r\gg l;\ u_0=f(t)\,\omega_*(r),\ r\sim l \tag{2.5}$$

Функция f определяется из закона сохранения Γ_0. Проинтегрируем (1.3) по кругу радиуса l_1, такого, что $l_1\gg l$, но $l_1\to0$ при $l\to0$. Имеем с учетом (2.5)



$$\frac{df}{dt}\int_0^\infty 2\pi\omega_*(r)\,r\,dr=2\pi\nu\,|\mathrm{Re}|\,u_-(t,0,r_1)$$

отсюда

$$u_0=u_-+2\pi\nu\,|\mathrm{Re}|\int_0^\infty u_-(\tau,0,r_1)\,d\tau\times$$
$$\times\left\{\frac{\omega_*(r)}{2\pi\int\omega_* r\,dr}\right\}$$

Выражение в фигурных скобках при $l\to0$ переходит в $\delta(r)$.

При $-2<\mathrm{Re}<0$ в качестве фундаментального решения следует выбрать функцию, обладающую нулевым потоком при $r\to0$, а именно u_+.

Окончательно общее решение задачи Коши для уравнения (1.3) выражается через начальное распределение вихря $\omega_0(r)$ формулами

$$\omega(t,r)=2\pi\int_0^\infty u_0(t,r,r_1)\,\omega_0(r_1)\,r_1\,dr_1 \tag{2.6}$$

$$u_0=u_+,\ \mathrm{Re}>-2$$

$$u_0=u_-+2\pi\nu\,|\mathrm{Re}|\,\delta(r)\int_0^t u_-(\tau,0,r_1)\,d\tau,\qquad \mathrm{Re}<-2$$

$$u_\pm=\frac{1}{4\pi\nu a}\left[\frac{r}{r_1 b}\right]^{\mathrm{Re}/2} I_{\pm\mathrm{Re}/2}\left[\frac{r r_1 b}{2\nu a}\right]\exp\left[-\frac{r^2+r_1^2b^2}{4\nu a}\right]$$

3. Анализ общего решения, частные решения. Формула (2.6) достаточна проста, чтобы можно было проанализировать решение уравнения (1.3) для любого заданного начального распределения завихренности. В частности, при анализе свертки с u_0 при больших Re используется метод перевала. Ограничимся здесь лишь отдельными замечаниями.

Пусть Re=0, $c(t)<0$, т. е. имеется регулярный сходящийся — восходящий поток без особенности на оси. При любом способе «включения» функции $c(t)$, таком, что $c(0)=0$ и $c(\infty)=\mathrm{const}$, фундаментальное решение уравнения (1.3) стремится при $t\to\infty$ к предельной функции $\infty\exp[r^2c/(2\nu)]$. Поэтому для любого начального распределения при $t\to\infty$

$$\omega\to\frac{\Gamma_0}{2\pi}\frac{|c|}{\nu}\exp\left(\frac{r^2c}{2\nu}\right) \qquad (3.1)$$

Утверждение о существовании предельного при $t\to\infty$ стационарного вихря (3.1) (вихря Бюргерса) хорошо известно для случая $c=\mathrm{const}$, но вместе с тем найденное в [3] автомодельное решение при включении функции c от состояния $c(0)=0$ стремится при $t\to\infty$ к сингулярному на оси течению (вихрь Бюргерса плюс стационарная вихревая нить). Формула (3.1) показывает, что при отсутствии на оси сингулярных источников вихря (например, вращающегося с большой скоростью тонкого цилиндра), наличие которых фактически предполагается в автомодельном решении, предельным при $t\to\infty$ является регулярный вихрь Бюргерса.

Уравнение (1.3) при Re=0 и $c=\mathrm{const}<0$ совпадает с уравнением Фоккера — Планка, и описывает релаксацию по импульсам небольшой примеси тяжелого газа в легком. Функция (3.1) при этом имеет смысл распределения Максвелла — Больцмана по импульсам. Фундаментальное решение уравнения (1.3) для этого случая хорошо известно в физической кинетике [11] и может служить наводящим соображением при отыскании решения в виде (2.6).

При $\mathrm{Re}<-2$, $c<0$

$$u_0\to\delta(r),\ \omega\to\Gamma_0\delta(r),\ t\to\infty$$

Из течений с неограниченным значением Γ_0 рассмотрим решение (1.3) для $c=0$ и начально равномерного распределения завихренности (твердотельное вращение)

$$\omega=\omega_0[1+2\pi\nu t|\mathrm{Re}|\delta(r)],\qquad v_\varphi=\frac{\omega_0 r}{2}+\frac{\omega_0\nu t|\mathrm{Re}|}{r} \qquad (3.2)$$

Такого рода решение было получено в [12] в пренебрежении вязкостью. В данном случае переход к исчезающей вязкости подразумевает, что $\mathrm{Re}\to\infty$ при фиксированной обильности источника $\nu\mathrm{Re}$. Как видно из (3.2), предельная формула при таком переходе в точности справедлива уже при $\mathrm{Re}<-2$, в то же время при $\mathrm{Re}>-2$ течение имеет качественно иной характер — решение выражается через неполную гамма-функцию и здесь ради краткости не обсуждается.

При $\mathrm{Re}>-2$ и $c=\mathrm{const}<0$ (сингулярный источник или слабый сток плюс сходящийся — восходящий стационарный поток) для любого начального распределения при $t\to\infty$

$$\omega\infty r^{\mathrm{Re}}\exp\left(\frac{cr^2}{2\nu}\right)$$

При больших Re этот стационарный вихрь локализован вблизи поверхности $r=\sqrt{-\nu\,\mathrm{Re}/c}$, на которой $v_r=0$.

При $\mathrm{Re}>-2$ и $c>0$ (источник или слабый сток плюс расходящийся — нисходящий поток) вихрь выносится на бесконечность ($\omega\to0$ при $t\to\infty$). При $\mathrm{Re}<-2$ и $c>0$ вихрь частично локализуется в стоке, частично выносится на бесконечность.

4. Диффузия вихря в течении со свободной границей. По самому смыслу задачи Коши выше рассматривалось течение в отсутствие граничных поверхностей. Наличие твердых (проницаемых) поверхностей приводит к несколько искусственной постановке задачи, причем она возможна лишь при $c=0$. Для любого начального распределения ее решение является суммой функции (2.6), а также найденного в [10] решения смешанной задачи для уравнения (1.3) с нулевым начальным и неоднородными граничными условиями.

Бóльший интерес, вероятно, может иметь задача об интенсификации вращения при захлопывании пустой цилиндрической полости в жидкости. Возникает вопрос: может ли в этом процессе учет вязкости ограничить рост скорости вращения жидкости?

На свободной поверхности $r=r_0(t)$ должно обращаться в ноль касательное вязкое напряжение $\pi_{r\varphi}'=\nu\rho r(\partial v_\varphi/\partial r-v_\varphi/r)$ (ρ — плотность), откуда получается граничное условие

$$2\pi\int\limits_{r_0}^{\infty}\omega r\,dr+\pi r_0^2\omega\,|_{r=r_0}=\Gamma_0 \qquad (4.1)$$

Для $r_0=\mathrm{const}$ диффузия вихря изучена в [10]. Здесь будет рассматриваться только случай захлопывающейся полости $dr_0/dt<0$. По математической формулировке он эквивалентен задаче о диффузии магнитного поля из схлопывающейся цилиндрической полости в проводящей жидкости — совпадают не только уравнения диффузии поля и вихря, что хорошо известно, но и, как оказывается, граничные условия.

Для случая, когда профиль скоростей имеет вид $v_r\backsim 1/r$, диффузия магнитного поля из полости изучена в [13] на основании автомодельного решения. Ранее на существование такого решения указывалось в [6]. Тем не менее к рассматриваемой здесь задаче указанное автомодельное решение, по-видимому, неприменимо, так как оно может быть построено лишь при $\Gamma_0=0$, а в (4.1) существенно, что $\Gamma_0\neq 0$. В частности, искомое решение является положительно определенным, если $\omega>0$ при $t=0$, а автомодельное решение для выполнения условия $\Gamma_0=0$ должно менять знак.

При анализе диффузии вихря опять будем считать, что $\mathrm{Re}=\mathrm{const}$. Для обоснования такого предположения приведем сначала решение динамической задачи о захлопывании полости с одновременным учетом действия вращения и вязкости на радиальное движение, но временно пренебрегая действием вязкости на вращение. Будем считать, что в начальный момент времени в цилиндрическом столбе жидкости с радиусом R_* имеется полость радиуса $r_0(0)=r_*\ll R_*$, причем жидкость вращается по закону $v_\varphi\backsim 1/r$ (как для вихревой нити). К внешней поверхности приложено давление P_0. Тогда в жидкости возникает радиальная скорость $v_r\backsim Y/r$, причем для $Y(t)$, так же как в задаче Рэлея [7, 8] о захлопывающемся пузырьке, может быть получено уравнение

$$Y\tau\frac{dY}{d\tau}+\frac{Y^2}{2}-2\nu Y+\frac{\Gamma_0^2}{8\pi^2}=\frac{P_0}{\rho}R_*^2\exp(2\tau),\qquad \tau=\ln\frac{r_0(t)}{R_*} \qquad (4.2)$$

При $\nu=0$ и $\Gamma_0=0$ решение (4.2) есть

$$Y^2=\frac{1}{-\tau}\frac{P_0}{\rho}\left(r_*^2-r_0^2(t)\right) \qquad (4.3)$$

Из (4.3) видно, что пренебрежение членами $\backsim\Gamma_0^2$ и $\backsim\nu Y$ по сравнению с Y^2 в левой части (4.2) оправданно, если

$$\frac{1}{-\tau}\frac{P_0}{\rho}r_*^2\gg\frac{\Gamma_0^2}{4\pi^2},\,4\nu^2 \qquad (4.4)$$

Формально левая часть (4.4) может сколько угодно малой при $r_0\to 0$.

Фактически величина r_0 ограничена снизу, по крайней мере атомными размерами, поэтому величина $-\tau$ является конечной ($\sim 10-20$) и условие пренебрежения действием вязкости и вращения на радиальное движение (4.4) может оказаться выполненным при любых допустимых r_0. Если дополнительно учесть, что $\sqrt{-\tau}$ является медленно меняющейся функцией времени по сравнению с r_0, то из (4.3) при $r_0 \ll r_*$ имеем

$$v_r = -|\mathrm{Re}|\frac{\nu}{r}, \qquad |\mathrm{Re}| = \frac{r_*}{\nu}\sqrt{\frac{P_0}{-\tau\rho}} \approx \mathrm{const}$$

т. е. фоновое течение относится к типу (1.2) и Re=const.

Осталось рассмотреть диффузию вихря на таком фоне. Для простоты ограничимся случаем, когда начальное вращение безвихревое ($v_\varphi = \Gamma_0/(2\pi r)$), способ решения общей задачи указан ниже. Искомая функция $\omega(r, t)$ определяется уравнениями

$$\frac{1}{\nu}\frac{\partial\omega}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial\omega}{\partial r} + |\mathrm{Re}|\omega\right]$$

$$\omega|_{t=0} = 0, \qquad \pi r_0^2 \omega|_{t=r_0(t)} + 2\pi\int_{r_0}^{\infty}\omega r\,dr = \Gamma_0 \tag{4.5}$$

причем $|\mathrm{Re}| \gg 1$, согласно (4.4). Переходим к лагранжевым координатам t, r_L [8] — в них свободная граница неподвижна — и обезразмерим независимые переменные

$$r_L^2 = r^2 + 2\nu t|\mathrm{Re}|, \qquad \tau_1 = \frac{2\nu t|\mathrm{Re}|}{r_*^2}, \qquad z = \left(\frac{r_L^2}{r_*^2} - 1\right)\sqrt{\frac{|\mathrm{Re}|}{2}}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial\tau_1} = (1-\tau_1)\frac{\partial^2\omega}{\partial z^2} + \sqrt{\frac{2}{|\mathrm{Re}|}}\frac{\partial}{\partial z}\left(z\frac{\partial\omega}{\partial z}\right) \tag{4.6}$$

$$\sqrt{\frac{2}{|\mathrm{Re}|}}\int_0^{\infty}\omega\,dz + (1-\tau_1)\omega|_{z=0} = \frac{\Gamma_0}{\pi r_*^2} \tag{4.7}$$

При $\sqrt{|\mathrm{Re}|} \gg 1$ второй член в правой части (4.6) может быть опущен (см. ниже). Получившееся уравнение сводится к одномерному уравнению теплопроводности и на полуоси $z > 0$ при нулевом начальном условии имеет общее решение

$$\omega = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\tau_1} A(\theta)\frac{(1-\theta)z}{W^{3/2}}\exp\left(-\frac{z^2}{2W}\right)d\theta, \qquad A(\tau_1) = \omega|_{z=0},$$

$$W = (1-\theta)^2 - (1-\tau_1)^2 \tag{4.8}$$

Подставляя (4.8) в (4.7), получаем интегральное уравнение Вольтерра с полярным ядром для неизвестной функции $\Gamma = A(1-\tau_1)$

$$\Gamma(\tau_1) + \frac{2}{\sqrt{\pi}|\mathrm{Re}|}\int_0^{\tau_1}\frac{\Gamma(\theta)\,d\theta}{\sqrt{W}} = \frac{\Gamma_0}{\pi r_*^2} \tag{4.9}$$

Для решения уравнения (4.9) при больших $|\mathrm{Re}|$ введем интегральный оператор T

$$\mathrm{T}[\Gamma] = \int_0^{\tau_1}\frac{\Gamma(\theta)\,d\theta}{\sqrt{W}} - \int_0^{\tau_1}\frac{\Gamma(\theta)\,d\theta}{1-\theta} - \alpha(\beta)\Gamma(\tau_1)$$

а константу $\alpha(\beta)$ подберем таким образом, чтобы оператор $\mathbf{T}$ при действии на функцию $\Gamma(\theta)\propto(1-\theta)^{\beta}$ при $\theta\to1$ давал функцию, стремящуюся к нулю быстрее, чем $(1-\tau_1)^{\beta}$. Легко показать, что для этого $\alpha(\beta)$ должна определяться равенством

$$\alpha(\beta)=\int_1^\infty z^\beta\left(\frac{1}{\sqrt{z^2-1}}-\frac{1}{z}\right)dz \tag{4.10}$$

Уравнение (4.9) принимает вид ($\varepsilon=2/\sqrt{\pi|\mathrm{Re}|}$)

$$\Gamma(\tau_1)(1+\varepsilon\alpha)+\varepsilon\int_0^{\tau_1}\frac{\Gamma(\theta)d\theta}{1-\theta}=\frac{\Gamma_0}{\pi r_*^2}-\varepsilon\mathbf{T}[\Gamma]$$

Далее, дифференцируя по τ_1 и выражая решение полученного уравнения через правую часть, имеем

$$\Gamma(\tau_1)=-\psi\mathbf{T}[\Gamma]+(1-\tau_1)^{\psi}\left[\frac{\Gamma_0}{\pi r_*^2(1+\varepsilon\alpha)}+\psi^2\int_0^{\tau_1}\frac{\mathbf{T}[\Gamma]d\theta}{(1-\theta)^{1+\psi}}\right],\quad \psi=\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon\alpha} \tag{4.11}$$

Согласно (4.11), $\Gamma\propto(1-\tau_1)^{\psi}$. Теперь, чтобы интеграл в (4.11) сходился при $\theta\to1$, достаточно в соответствии с определением $\mathbf{T}$ потребовать выполнения условия

$$\beta=\psi\equiv\varepsilon/(1+\varepsilon\alpha(\beta)) \tag{4.12}$$

которое при $\alpha(\beta)$ из (4.10) задает величину β. После этого интегральный оператор в правой части (4.11) является ограниченным, норма его $\sim\varepsilon$ и метод итераций дает регулярно сходящийся ряд для Γ.

Разумеется, попытка прямого асимптотического разложения решения (4.9) по степеням ε не может дать равномерного разложения из-за наличия в решении члена вида $(1-\tau_1)^{\beta}$. Недопустимость такого подхода следует и из того, что интегральный оператор в (4.9) является, вообще говоря, неограниченным и не может быть опущен в нулевом приближении, несмотря на наличие перед ним малого параметра. Подчеркнем в связи с этим, что соотношения (4.10), (4.12) являются точными следствиями уравнения (4.9), не использующими малости ε, и именно их применение позволяет построить затем (методом итераций) равномерную теорию возмущений для уравнения (4.11).

Наличие в уравнении (4.6) второго члена в первой части (который был опущен при выводе (4.8)) тоже можно учесть по теории возмущений. Длительные вычисления опять приводят к уравнению (4.12) с дополнительными членами вида $\mathrm{const}\,\varepsilon^2$, так что переход от (4.6) к (4.8) является законным в первом порядке по ε.

В этом приближении при $\varepsilon\ll1$ имеем для циркуляции Γ и скорости v_φ

$$\Gamma(\tau_1)=\frac{\Gamma_0}{\pi r_*^2}(1-\tau_1)^{\beta}=\frac{\Gamma_0}{\pi r_*^2}\left[\frac{r_0(t)}{r_*}\right]^{2\beta},\qquad \beta\approx\frac{2}{\sqrt{\pi|\mathrm{Re}|}} \tag{4.13}$$

$$v_\varphi\propto\left(\frac{r_0}{r_*}\right)^{2\beta-1},\qquad r_0\to0 \tag{4.14}$$

Таким образом, в рамках принятой модели даже на малых масштабах, где, казалось бы, должно проявляться сильное действие вязкости, скорость вращения продолжает возрастать по степенному закону, лишь слегка модифицированному действием вязкости.

В более общем случае, когда при $t=0$ в жидкости $\omega_0\neq0$, при $\tau_1\to1$ все равно $\Gamma(\tau_1)$ подчиняется соотношению (4.13) с другой константой Γ_0, но с тем же показателем степени. Действительно, в этом случае решение уравнения (1.3) является суммой функции (2.6) и решения задачи (4.5), в которой константа Γ_0 заменяется на некоторую заданную функцию времени. Однако показатель степени в (4.13), как видно из предыдущих рассуждений, определяется только свойствами интегрального оператора в (4.9), который в обоих случаях остается неизменным.

Последнее замечание объясняет, почему и автомодельное решение, найденное в [13], приводит к степенно́му закону (4.13) с тем же показателем степени, хотя, как подчеркивалось выше, в рассматриваемой неавтомодельной задаче данное решение вряд ли может быть предельным.

Итак, в осесимметричных течениях вязкой несжимаемой жидкости с $\Omega_r=0$ и $\Omega_z\neq0$ при единственном упрощающем предположении о постоянстве одной из произвольных функций времени, определяющих течение, точно решена задача Коши. Из граничных задач представляет интерес изучение влияния вязкости при захлопывании цилиндрической полости во вращающейся жидкости. Неавтомодельное решение этой задачи приводит к степенно́му закону убывания циркуляции на свободной поверхности с малым показателем $2\beta\approx4(\pi|\mathrm{Re}|)^{-1/2}$, соответственно — $v_\varphi\infty r_0^{2\beta-1}$.

Автор благодарит С. В. Буланова за обсуждение результатов и полезные советы, а также Ю. К. Краснова за обсуждение работ [2, 3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости: Пер. с англ. М.: Мир, 1973. 758 с.
2. *Кикнадзе Г. И., Краснов Ю. К.* Эволюция смерчеобразных течений вязкой жидкости // Докл. АН СССР. 1986. Т. 290. № 6. С. 1315–1319.
3. *Краснов Ю. К.* Эволюция смерчей // Нелинейные волны: Структуры и бифуркации. М.: Наука, 1987. С. 174–189.
4. *Лихоперский В. И.* Два точных решения уравнений Навье – Стокса по концентрации вихря в вязкой жидкости // ПМТФ. 1977. № 6. С. 77–81.
5. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1973. 416 с.
6. *Сахаров А. Д.* Взрывомагнитные генераторы // УФН. 1966. Т. 88. С. 725–740.
7. *Забабахин Е. И.* Явления неограниченной кумуляции // Механика в СССР за 50 лет. Т. 2. М.: Наука, 1970. С. 313–342.
8. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1985. 733 с.
9. *Слезкин Н. А.* Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: Гостехиздат, 1955. 520 с.
10. *Гостинцев Ю. А.* Нестационарное плоское вращение вязкой жидкости при наличии стационарного течения от источника // Изв. АН СССР. МЖГ. 1969. № 6. С. 106–114.
11. *Haken H.* Cooperative phenomena in systems far from termal equilibrium and in nonphysical system // Rev. Mod. Phys. 1975. V. 47. № 1. P. 67–121.
12. *Новиков Е. А., Седов Ю. Б.* Концентрация завихренности и спиральные вихри // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. № 1. С. 15–21.
13. *Биченков Е. И., Маточкин Е. П.* Магнитное поле в движущемся цилиндрическом проводнике, скорость которого пропорциональна 1/r // ПМТФ. 1973. № 5. С. 18–25.

Москва

Поступила в редакцию
29.XII.1987