

УДК 532.592

УЕДИНЕННЫЕ ВОЛНЫ В ДИССИПАТИВНО-ДИСПЕРСИОННЫХ СИСТЕМАХ С НЕУСТОЙЧИВОСТЬЮ

ГОРДЕЕВ Ю. Н., КУДРЯШОВ Н. А.

Рассматриваются волновые процессы в системе, описываемой уравнением в частных производных четвертого порядка с нелинейностью Бюргерса – Кортевега – де Вриза. Исходное уравнение приводится к динамической системе из трех уравнений, которая анализируется с помощью численного метода. Показано, что уравнение для волн в диссипативно-дисперсионных системах с неустойчивостью имеет решения в виде уединенных волн и волновых фронтов.

Волновые процессы в стекающих вязких пленках жидкости [1–3], турбулентные явления в плазме [4, 5], концентрационные возмущения при химических реакциях [6], волны напряжений в фрагментированных пористых средах [7] и т. д. описываются нелинейным уравнением, которое имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \gamma \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 \quad (1)$$

Здесь $u(x, t)$ – функция, характеризующая отклонение от равновесия смещение, температуры, концентрации и т. д.; α , β и γ – постоянные коэффициенты; x – координата; t – время.

Анализ устойчивости стационарного движения, описываемого уравнением (1), относительно малых возмущений $u' \sim \exp\{-i(kx - \Omega t)\}$ приводит к дисперсионному уравнению

$$\Omega = -\beta k^2(\alpha - \gamma k^2) + u^* k \quad (u^* = \text{const})$$

Из этого уравнения следует, что при $\alpha > 0$, $\gamma > 0$ движение неустойчиво для длинноволновых возмущений: $0 < k < \sqrt{\alpha/\gamma}$ и устойчиво для коротковолновых: $k > \sqrt{\alpha/\gamma}$. Слагаемое со второй производной в уравнении (1) соответствует подкачке энергии в систему, слагаемое с третьей и четвертой производными характеризует соответственно ее дисперсию и диссипацию.

В данной работе изучаются волновые течения, описываемые уравнением (1) при постоянных α , β и γ , отличных от нуля.

Уравнение (1) запишем в безразмерных переменных

$$u = \alpha \left(\frac{\alpha}{\gamma} \right)^{1/2} u', \quad x = \left(\frac{\gamma}{\alpha} \right)^{1/2} x', \quad t = \frac{\gamma}{\alpha^2} t', \quad \sigma = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha\gamma}} \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0.$$

В уравнении (2) штрихи опущены. Уравнение (2) допускает группу преобразований сдвига по переменным x и t и, следовательно, имеет стационарные решения в системе координат бегущей волны. Переходя в (2) к $\theta = x - ct$ ($c = C_0 \alpha \sqrt{\alpha/\gamma}$), C_0 – скорость распространения волны, и интегрируя по θ один раз, находим

$$u''' + \sigma u'' + u' - cu + 1/2 u^2 = q \quad (3)$$

Здесь q — постоянная интегрирования, которая определяется из начальных условий. Уравнение (3) преобразуем к виду

$$H''' + \sigma H'' + H' - cH + 2H^2 = 0 \quad (4)$$

$$H = u/4 - c/4 + \sqrt{(c/4)^2 + 1/8 q}$$

Уравнение (4) эквивалентно системе уравнений первого порядка

$$\frac{dH}{d\theta} = v, \quad \frac{dv}{d\theta} = w, \quad \frac{dw}{d\theta} = -\sigma w - v + H(c - 2H) \quad (5)$$

Система (5) имеет две неподвижные точки: $M^1(0, 0, 0)$ и $M^2(1/2 c, 0, 0)$. Собственные значения линеаризованной системы (5) в окрестностях M^1 и M^2 определяются из следующего характеристического уравнения:

$$\rho^3 + \sigma \rho^2 + \rho + c = 0 \quad (6)$$

При дискриминанте D уравнения (6), меньшем нуля, оно имеет три действительных корня: ρ_1, ρ_2, ρ_3 .

Преобразуем систему уравнений (5) при $D < 0$ к каноническому виду

$$\frac{d\xi_1}{d\theta} = \rho_1 \xi_1 + P(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad \frac{d\xi_2}{d\theta} = \rho_2 \xi_2 + Q(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \quad (7)$$

$$\frac{d\xi_3}{d\theta} = \rho_3 \xi_3 + R(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$$

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & \rho_1(\rho_1 + \sigma) & \rho_1 \\ c & \rho_2(\rho_2 + \sigma) & \rho_2 \\ c & \rho_3(\rho_3 + \sigma) & \rho_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$P = -2\rho_1 g^2, \quad Q = -2\rho_2 g^2, \quad R = -2\rho_3 g^2$$

$$g = - \frac{\xi_1(\rho_2 - \rho_3)\rho_1^{-1} + \xi_2(\rho_3 - \rho_1)\rho_2^{-1} + \xi_3(\rho_1 - \rho_2)\rho_3^{-1}}{(\rho_1 - \rho_2)(\rho_2 - \rho_3)(\rho_3 - \rho_1)}$$

В новых переменных неподвижные точки имеют координаты:

$$M^1(0, 0, 0); \quad M^2(1/2 c^2, 1/2 c^2, 1/2 c^2).$$

Динамическая система (7) допускает решения в виде уединенных волн и волновых фронтов. Уединенной волне соответствует траектория, которая выходит из какой-либо одной из неподвижных точек и возвращается в нее при $\theta \rightarrow \infty$. Если траектория выходит из одной неподвижной точки, а входит при $\theta \rightarrow \infty$ в другую, ей отвечает решение типа волнового фронта.

В [8] для уравнения (1) предложены преобразования Бэклунда, из которых следует, что решения системы (7) можно искать в виде суммы

$$\xi_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^i (\text{th } \tau)^k, \quad \tau = b\theta$$

При $\sigma=4$ и $c=6$ решение системы уравнений (7) определяется конечным числом членов ряда и преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{45(1 - \text{th } \tau)^3}{4 \text{ch}^2(\tau)}, & \xi_2 &= \frac{45(3 - 2 \text{th } \tau)}{4 \text{ch}^4 \tau} \\ \xi_3 &= \frac{135(1 - \text{th } \tau)}{\text{ch}^4(\tau)}, & \tau &= \frac{\theta}{2} \end{aligned} \quad (8)$$

Используя (8), можно восстановить решение уравнения (3)

$$u = 15 \operatorname{ch}^{-2} \left\{ \frac{\theta}{2} \right\} \left[1 - \operatorname{th} \left\{ \frac{\theta}{2} \right\} \right]$$

Решение (8) является уединенной волной. Собственные значения линеаризованной динамической системы (7) в окрестности неподвижной точки $M^1(0, 0, 0)$ при $\sigma=4$ и $c=6$ равны: $\rho_1^1=1$; $\rho_2^1=-2$; $\rho_3^1=-3$. Следовательно, неподвижная точка M^1 имеет двумерное устойчивое W_s^1 и одномерное неустойчивое W_u^1 многообразий. Поскольку уединенная волна (8) является пересечением двумерного устойчивого W_s^1 и одномерного неустойчивого W_u^1 многообразий, то она структурно-неустойчива и разрушается слабым изменением параметров c или σ .

При $\sigma>0$ и $c>0$ и дискриминанте D уравнения (6), большем нуля, его корни можно представить в виде

$$\rho_1^1 = 2m - \sigma > 0, \quad \rho_{2,3}^1 = -m \pm in, \quad n = \sqrt{1 + 3m^2 - 2m\sigma} \quad (9)$$

$$\rho_1^2 = 2m - \sigma < 0, \quad \rho_{2,3}^2 = -m \pm in$$

Из (9) следует, что неподвижная точка M^1 представляет собой пересечение двумерного устойчивого многообразия W_s^1 и одномерного неустойчивого W_u^1 . При $m < 0$ неподвижная точка M^2 является пересечением одномерного устойчивого W_s^2 и двумерного неустойчивого W_u^2 многообразий. В этом случае неподвижные точки M^1 и M^2 являются седловыми.

Преобразуем систему уравнений (5) при $D>0$ к каноническому виду

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_1}{d\theta} &= -m\xi_1 - n\xi_2 + P(\xi_1, \xi_2, \xi_3), & \frac{d\xi_2}{d\theta} &= n\xi_1 - m\xi_2 + Q(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ \frac{d\xi_3}{d\theta} &= (2m - \sigma)\xi_3 + R(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \end{aligned} \quad (10)$$

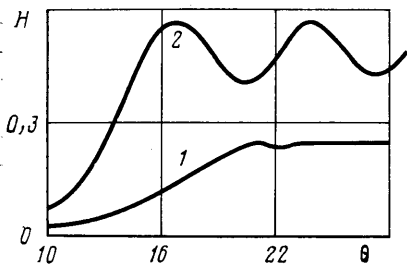
$$\begin{aligned} P &= 2ng^2, \quad Q = 2mg^2, \quad R = -2(2m - \sigma)g^2 \\ g &= \frac{(2m - \sigma)(1 - m\sigma)\xi_1 + (4m - \sigma)(2m - \sigma)n\xi_2 + n(n^2 + m^2)\xi_3}{nc[(3m - \sigma)^2 + n^2]} \end{aligned}$$

В новых переменных неподвижные точки имеют координаты:

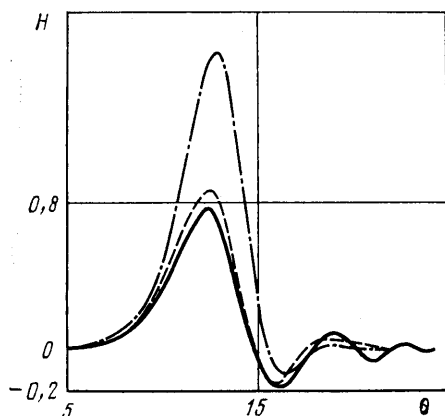
$$M^1(0, 0, 0); \quad M^2(0, 1/2c^2, 1/2c^2).$$

Динамическая система (10) так же, как и (7), допускает решения в виде уединенных волн и волновых фронтов. Для некоторых значений параметров c и σ , например при $\sigma=0$, $c=30\sqrt{11/49}$; $\sigma=12/\sqrt{47}$, $c=60/(47)^{1/2}$; $\sigma=16/\sqrt{73}$, $c=90/(73)^{1/2}$, система уравнений (10) интегрируется и решения ее могут быть представлены в виде алгебраических полиномов гиперболического тангенса. При $\sigma=0$ решение было получено в [6]. Для всех указанных выше значений параметров система (10) имеет решения в виде волновых фронтов. В частности, одно из таких решений при $\sigma=12/\sqrt{47}$, $c=60/(47)^{1/2}$ может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{3nc}{16} (2m - \sigma)^2 (1 - \operatorname{th} \tau) (1 - \operatorname{th}^2 \tau)^2 \\ \xi_2 &= \frac{c^2}{640} (1 + \operatorname{th} \tau) (233 - 6 \operatorname{th} \tau - 140 \operatorname{th}^2 \tau + 86 \operatorname{th}^3 \tau - 13 \operatorname{th}^4 \tau) \\ \xi_3 &= \frac{c^2}{320} (1 + \operatorname{th} \tau) (146 - 99 \operatorname{th} \tau - 41 \operatorname{th}^2 \tau - 9 \operatorname{th}^3 \tau + \operatorname{th}^4 \tau) \end{aligned}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

При этом решение исходного уравнения (3) имеет вид

$$u = \frac{1}{4}c^2(1 + \text{th } \tau)(7 - 4 \text{th } \tau + \text{th}^2 \tau) \\ m = 13/(2\sqrt{47}), n = 71/(2\sqrt{47}), \tau = \theta/(2\sqrt{47})$$

При произвольных значениях c и σ система (10), по-видимому, не имеет аналитических решений, они могут быть найдены только численно.

Для численного расчета траекторий, выходящих, например, из неподвижной точки M^1 , при интегрировании динамической системы (10) необходимо задать начальные условия. Для задания начальных условий линейризуем систему уравнений (10) в окрестности M^1 . При этом получим

$$\xi_1 \approx O(\varepsilon^2), \xi_2 \approx O(\varepsilon^2), \xi_3 \approx N + O(\varepsilon^2) \quad (11)$$

$$N = (2m - \sigma)(4n^2 + \sigma - 3)\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \ll 1$$

Задача Коши (10), (11) решалась численно методом Рунге — Кутты пятого порядка точности. Расчеты показали, что решения (10), (11) типа уединенных волн существуют только для дискретных значений параметра c как в случае нулевой дисперсии ($\sigma = 0$) [2, 3], так и при $\sigma \neq 0$. Значения параметра c , при которых существуют уединенные волны, определялись методом пристрелки. При этом если фазовая траектория уходила в отрицательную плоскость $\xi_3 < 0$, то параметр c увеличивался, если же траектория входила в окрестности точки M^1 , а затем ее покидала, то скорость волны c при расчетах уменьшалась.

Численные расчеты показали, что значения c , соответствующие скорости распространения уединенных волн, заключены в интервале $[c_m, c_1]$, величина которого зависит от параметра σ . При $0 \leq c \leq c_m(\sigma)$ решений (10), (11) типа уединенных волн нет, но есть решения типа волновых фронтов (фиг. 1, $c = 0.5$; 1, кривые 1, 2).

Покажем, что при малых c уединенных волн нет. Корни характеристического уравнения (6) при $0 \leq c \ll 1$ имеют вид

$$\rho_1^4 \approx c; \quad \rho_{2,3}^4 \approx \frac{1}{2}\sigma + i\sqrt{1 - \frac{1}{4}\sigma^2} \cdot (\sigma \gg c).$$

В окрестности неподвижной точки M^1 ($R_l(M^1) = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\} : r = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} \leq l = c^2$) динамическая система (12) приближенно может быть представлена в виде

$$\frac{d\xi_1}{d\theta} = 0, \quad \frac{d\xi_2}{d\theta} = -\frac{\sigma(c^2\xi_2 - 2\xi_3^2)}{2c^2}, \quad \frac{d\xi_3}{d\theta} = \frac{(c^2 - 2\xi_3)\xi_3}{c} \quad (12)$$

Решением задачи Коши (11), (12) ($N < c^2/2$) являются функции

$$\begin{aligned}\xi_1 &= 0, & \xi_2 &= \frac{1/2 c^2}{[1+a \exp(-c\theta)]^2} - \frac{\exp(-1/2 \sigma \theta)}{(1+a)^2} \\ \xi_3 &= \frac{1/2 c^2}{1+a \exp(-c\theta)}, & \lambda &= \frac{\sigma}{2c} + 2, & a &= \frac{c^2}{2N} - 1\end{aligned}\quad (13)$$

Из (13) видно, что фазовая траектория, выходя из M^1 , при $\theta \rightarrow \infty$ приходит в точку M^2 . Этим траекториям соответствуют решения типа волновых фронтов.

При скорости распространения волн $c=c_1(\sigma)$ решением (10), (11) является уединенная волна с одним максимумом. На фиг. 2 показано влияние дисперсии σ на форму волны ($\sigma=0$, $c=1,2162$ (сплошная кривая); $\sigma=0,1$; $c=1,3162$ (штриховая кривая); $\sigma=1$; $c=2,2613$ (штрихпунктирная кривая)). С увеличением дисперсии увеличиваются как скорость распространения уединенной волны, так и ее амплитуда.

При уменьшении скорости волны $c=c_2(\sigma)$ $c_m(\sigma) \leq c_2(\sigma) < c_1(\sigma)$ можно получить решение (10), (11) в виде уединенной волны с двумя максимумами. На фиг. 3 показаны уединенные волны с одним и двумя максимумами для $\sigma=1$ ($c=2,2613$; $1,7924$, кривые 1, 2). При $c=c_2$ амплитуда второго максимума больше первого, а в целом они меньше амплитуды уединенной волны с одним максимумом. Полученные решения качественно отличаются от уединенных волн при $\sigma=0$ [2, 3].

При дальнейшем уменьшении скорости распространения волн число максимумов в уединенной волне увеличивается, а их амплитуда уменьшается.

Рассмотрим поведение динамической системы (10) вблизи неподвижной точки $M^2(0, 1/2 c^2, 1/2 c^2)$. При $c < \sigma$ реальные части корней характеристического уравнения (6) строго отрицательны и, следовательно, стационарное решение уравнений (10) ($\xi_1=0$, $\xi_2=1/2 c^2$, $\xi_3=1/2 c^2$) устойчиво в линейном приближении. При $c=\sigma$ уравнение (8) имеет корни $\rho_1^2=-\sigma$, $\rho_{2,3}=\pm i$. Если увеличивать параметр c ($c > \sigma$), то происходит потеря линейной устойчивости стационарного решения динамической системы (10), т. е. происходит бифуркация рождения цикла в точке $c=\pm\sigma$. Далее выбираем в качестве бифуркационного параметра скорость распространения волны.

Используя алгоритм поиска периодических решений [9], основанный на применении теоремы о центральном многообразии и приведении автономной системы к нормальной форме Пуанкаре, получим решение динамической системы (10) при $0 < c - \sigma < \varepsilon \ll 1$. Оно имеет вид

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \varepsilon \cos \omega + \frac{2}{3} \left(\frac{\varepsilon}{1+\sigma^2} \right)^2 [2\sigma \cos 2\omega + (1-\sigma^2) \sin 2\omega] + O(\varepsilon^3) \\ \xi_2 &= \varepsilon \sin \omega - \frac{1}{3} \left(\frac{\varepsilon}{1+\sigma^2} \right)^2 [(1-\sigma^2) \cos 2\omega - 2\sigma \sin 2\omega] + \frac{\varepsilon^2}{1+\sigma^2} + O(\varepsilon^3) \\ \xi_3 &= \frac{\varepsilon^2}{(4+\sigma^2)(1+\sigma^2)^2} [\sigma^2(5-\sigma^2) \cos 2\omega - 2\sigma(2\sigma^2-1) \sin 2\omega] + \frac{\varepsilon^2}{1+\sigma^2} + O(\varepsilon^3)\end{aligned}\quad (14)$$

$$\omega = 2\pi\theta/T, \quad T = 2\pi \{1 + 2\epsilon^2(4\sigma^2 + 25)/[3(4 + \sigma^2)(1 + \sigma^2)]\}$$

$$\epsilon^2 = (1 - \sigma)/\mu_2 + O[(c - \sigma)^2], \quad \mu_2 = 2(8 + \sigma^2)/[\sigma(1 + \sigma^2)(4 + \sigma^2)]$$

Показатель Флоке β для динамической системы (10), линеаризованной вблизи неподвижной точки M^2 , выражается формулой

$$\beta = \beta_2 \epsilon^2 + O(\epsilon^4), \quad \beta_2 = -2(8 + \sigma^2)/[\sigma(4 + \sigma^2)(1 + \sigma^2)^2]$$

Поскольку $\beta < 0$, то в соответствии с теоремой Хопфа [9, 10] периодическое решение (14) является устойчивым. Используя (14), восстановим решение исходного уравнения (3)

$$H = \frac{c}{2} + \frac{\epsilon}{1 + \sigma^2} [\cos \omega - \sigma \sin \omega] + \frac{\epsilon^2}{3(1 + \sigma^2)(4 + \sigma^2)} \times$$

$$\times [\sigma(5 - \sigma^2) \cos 2\omega + 2(1 - 2\sigma^2) \sin 2\omega - 3(1 + \sigma^2)(4 + \sigma^2)\sigma^{-1}] + O(\epsilon^3) \quad (15)$$

Таким образом, уравнение (1), описывающее ряд волновых процессов в природе, имеет стационарные решения в виде уединенных и периодических волн, а также волновых фронтов. При фиксированном значении $\sigma = \beta/\gamma\alpha$ в зависимости от скорости распространения с уединенные волны имеют один, два и больше максимумов. Уединенная волна с несколькими экстремумами напоминает ситуацию, при которой образуются связанные солитоны-мультисолитоны [11]. Характерной особенностью этих уединенных волн является то, что они существуют лишь при дискретных значениях скорости волны. Увеличение значения σ приводит к большей амплитуде уединенных волн и к увеличению соответствующей ей скорости волны c . Численное моделирование распространения уединенной волны (8) показало [12], что эта волна упруго взаимодействует с другими решениями. Поэтому уединенные волны, которые описываются уравнением (1), в классическом смысле [13] являются солитонами.

Численное моделирование на основе (1) показало, что в случае периодических граничных условий начальный импульс эволюционирует в кноидальную волну, при малой амплитуде соответствующую решению (15). Этого эффекта нет при $\beta = 0$ ($\alpha \neq 0$, $\gamma \neq 0$) и $\beta \neq 0$, но $\alpha = 0$ или $\gamma = 0$. При увеличении значения β (или при уменьшении α или γ) амплитуда образовавшейся автоволны больше.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Topper J., Kawahara T.* Approximate equations for long nonlinear waves on a viscous fluid // J. Phys. Soc. Japan. 1978. V. 44. № 2. P. 663–666.
2. *Демехин Е. А., Шкадов В. Я.* К теории солитонов в системах с диссипацией // Изв. АН СССР. МЖГ. 1986. № 3. С. 91–97.
3. *Демехин Е. А., Шкадов В. Я.* О солитонах в диссипативных средах // Гидродинамика и тепломассообмен течений жидкости со свободной поверхностью. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1985. С. 32–48.
4. *Tatsumi T.* Irregularity, regularity and singularity of turbulence // Turbulence and chaotic phenomena in fluids. Iutam 1984. P. 1–10.
5. *Kawahara T.* Formation of saturated solitons in a nonlinear dispersive system with instability and dissipation // Phys. Rev. Lett. 1983. V. 51. № 5. P. 381–383.
6. *Kuramoto Y., Tsuzuki T.* Persistent propagation of concentration waves in dissipative media far from thermal equilibrium // Prog. Theor. Phys. 1976. V. 55. № 2.
7. *Николаевский В. Н.* Вязкоупругость с внутренними осцилляторами как возможная модель сейсмоактивной среды // Докл. АН СССР. 1985. Т. 283. № 6. С. 1321.
8. *Кудряшов Н. А.* Точные солитонные решения обобщенного эволюционного уравнения волновой динамики // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 3. С. 465–471.
9. *Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И.* Теория и приложения бифуркации рождения цикла: Пер. с англ. М.: Мир, 1985. 280 с.
10. *Марсден Дж., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения: Пер. с англ. М.: Мир, 1980. 368 с.
11. *Горшков К. А., Островский Л. А., Папко В. В.* Взаимодействие и связанные состояния солитонов как классических частиц // ЖЭТФ. 1976. Т. 71. Вып. 2. С. 585.
12. *Zabusky N. Y., Kruskal M. D.* Interaction of «solitons» in collisionless plasma and the recurrences of initial states // Phys. Rev. Lett. 1965. V. 15. P. 240.
13. *Алексеев А. А., Кудряшов Н. А.* Численное моделирование самоорганизации в диссипативно-дисперсионных средах с неустойчивостью: Препринт № 027. М.: МИФИ, 1988.

Москва

Поступила в редакцию
18.1.1988