

УДК 532.582.7:612.13

## ГРАВИТАЦИОННОЕ ОСЕДАНИЕ АГРЕГИРУЮЩИХ ЧАСТИЦ В СДВИГОВОМ ПОТОКЕ

ЛОСЕВ Е. С., НЕТРЕБКО Н. В., ОРЛОВА И. В.

При оценке реологического состояния крови существенный интерес представляет способность эритроцитов образовывать агрегаты [1]. Количественные методы исследования агрегации основаны, как правило, на анализе различных физических явлений (оседания, светорассеяния, вязкого течения). Трактовка соответствующих показателей осложнена их зависимостью от совокупности параметров, характеризующих как рассматриваемый образец крови, так и условия проведения эксперимента. Известны наблюдения за оседанием эритроцитов под действием силы тяжести в зазоре ротационного вискозиметра при скоростях сдвига меньших  $10 \text{ с}^{-1}$  [2, 3]. Скорость оседания оказывается практически постоянной при скоростях сдвига меньших  $10^{-2} \text{ с}^{-1}$ , увеличивается при повышении скорости сдвига и достигает максимума при  $\sim 0,1 \text{ с}^{-1}$ . При дальнейшем увеличении скорости сдвига скорость оседания падает практически до нуля. Связь наблюдаемой картины явления с агрегацией эритроцитов ясна в качественном отношении: ускорение оседания с ростом скорости сдвига вызвано усилением агрегации из-за повышения частоты столкновений эритроцитов вследствие усиления их хаотического движения в сдвиговом потоке. Последующее замедление оседания при больших скоростях сдвига вызвано распадом агрегатов из-за сдвиговых напряжений в потоке и, отчасти, усилением эффективной диффузии эритроцитов [4]. Однако теоретически указанное явление исследовано недостаточно.

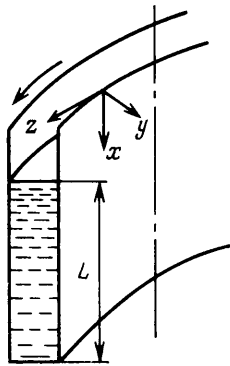
В настоящей работе предложена теоретическая модель, описывающая оседание агрегирующих частиц под действием силы тяжести в куэттовском сдвиговом потоке. Прослежена связь между параметрами, характеризующими зависимости показателей оседания от скорости сдвига, и параметрами, характеризующими агрегацию частиц.

1. Рассмотрим движение суспензии агрегирующих частиц в вертикальной щели между соосными цилиндрами, один из которых покоится, а другой вращается с постоянной угловой скоростью. Будем считать, что щель достаточно узкая и длинная, так что можно движение приближенно считать плоским куэттовским и пренебречь непосредственным влиянием свободной поверхности и дна на поле скоростей, а также центробежным ускорением по сравнению с гравитационным, т. е.  $I^2 h^2 / Rg \ll 1$ , где  $I$  — скорость сдвига,  $h$  — толщина щели,  $R$  — радиус цилиндра,  $g$  — ускорение тяжести.

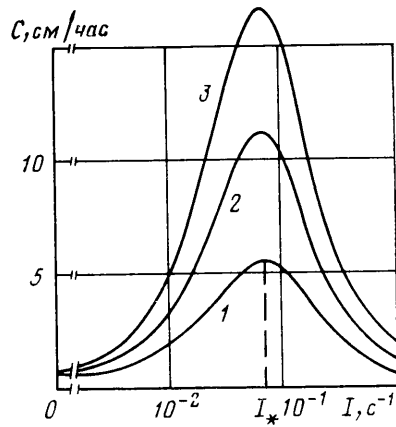
Предположим также, что разность истинных плотностей частиц (агрегатов) и жидкости достаточно мала, и с хорошей точностью можно принять, что среднemasсовая скорость смеси имеет одну компоненту, направленную по оси  $z$  (фиг. 1). Поскольку скорости частиц и жидкости в этом направлении не зависят от координаты  $z$ , а скорости в направлении  $y$  равны нулю, то уравнение баланса массы частиц будет одномерным. С учетом уравнений движения частиц в принятом приближении получим систему, такую же как для задачи об одномерном оседании [5]

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial Hu}{\partial x} = 0, \quad u = \frac{(\rho_a - \rho_f) g (1 - H)^2 v^2}{\alpha \mu_0 \psi(H)} \quad (1.1)$$

Здесь  $H$  — объемная концентрация агрегатов (в реологии крови для  $H$  принят термин «гематокрит»). Вследствие деформируемости эритроцитов значения гематокрита могут изменяться практически от нуля до единицы);  $u$  — среднemasсовая скорость частиц в направлении  $x$ ;  $v$  — средний объем агрегата;  $\rho_a$ ,  $\rho_f$  — истинные плотности частиц и жидкости;  $\mu_0$  —



Фиг. 1



Фиг. 2

вязкость жидкости,  $\psi(H)$  — функция, характеризующая зависимость вязкого сопротивления оседанию от концентрации,  $\alpha$  — числовой коэффициент, зависящий от формы агрегатов. К выписанным соотношениям необходимо добавить уравнение для среднего числа агрегатов  $N$  или, учитывая связь  $H = Nv$ , соответствующее уравнение для  $v$  [5, 6]

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial Nu}{\partial x} = F, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{FH}{N^2} \quad (1.2)$$

где  $F$  — итоговая скорость образования агрегатов. Предположим, что броуновским движением можно пренебречь, а изменение агрегационной структуры происходит в результате слипания агрегатов при столкновениях, индуцированных оседанием и сдвиговым движением, и разрушения агрегатов гидродинамическими силами при сдвиге. Учитывая эти гипотезы, представим  $F$  в виде суммы трех слагаемых [5, 7]

$$F = -kN^2 - \alpha_1 NI + \alpha_2 NI \left(\frac{N^*}{N}\right)^n \left(1 - \frac{N}{N^*}\right) \frac{\mu I}{\sigma} \quad (1.3)$$

где коэффициенты  $k$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  характеризуют интенсивности соответственно гравитационной и сдвиговой агрегации интенсивность распада агрегатов,  $N^*$  — максимальное (при полной дезагрегации) значение  $N$ ,  $\sigma$  — характерное разрушающее напряжение для агрегатов,  $\mu$  — вязкость суспензии,  $n$  — эмпирический коэффициент.

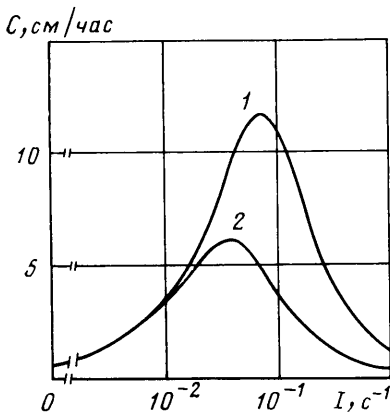
Начальные и граничные условия для системы (1.1), (1.2) имеют вид [5]

$$\begin{aligned} H(0, x) = H_0, \quad v(0, x) = v_0, \quad (0 \leq x \leq L) \\ u(t, L) = 0, \quad H(t, 0) = 0 \quad (t > 0) \end{aligned} \quad (1.4)$$

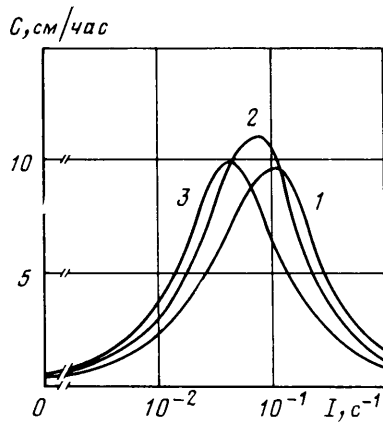
где  $L$  — высота щели вискозиметра,  $v_0$  — объем одиночной частицы. Здесь граничные условия для  $v$  отсутствуют, поскольку полагается, что  $v$  определено только в области, в которой значения  $v$  могут быть найдены по начальным условиям в силу гиперболичности уравнения (2.4).

Задача (1.1)–(1.3) может быть исследована методом характеристик аналогично задаче об оседании в гравитационном поле в отсутствие сдвигового потока [5, 8]. Отличие сводится к присутствию дополнительных слагаемых в правой части (1.3), что влечет за собой соответствующие изменения в условиях на характеристиках, в то время как сами уравнения характеристик сохраняют тот же вид, что и в отсутствие сдвига.

Система (1.1), (1.2) допускает разрывы, свойственные системам квазилинейных гиперболических уравнений, причем один разрыв, который



Фиг. 3



Фиг. 4

разделяет верхний слой жидкости, не содержащий частиц ( $N=0$ ,  $H=0$ ), и нижний слой оседающих частиц, имеет место всегда (см. [8]). Перемещение этого разрыва является главным наблюдаемым экспериментально показателем процесса оседания.

Используем далее приближенный метод, основанный на предположении об однородности распределения частиц в нижнем слое. Этот метод неприменим для исследования перераспределения концентрации оседающих частиц, но, как показали расчеты при  $I=0$ , дает хорошо согласующиеся с расчетами методом характеристик [5] значения скорости движения упомянутого выше разрыва — границы между зонами чистой жидкости и оседающих частиц. В этом случае уравнение неразрывности (1.1) сводится к простому соотношению между  $H(t)$  — концентрацией частиц в слое оседающих частиц и  $X$  — координатой положения разрыва:  $H=H_0(1-X/L)$ .

С учетом этого соотношения и уравнения движения разрыва [8]  $dX/dt=u$  вместо уравнений (1.1)–(1.3) получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которая положена в основу расчетов (здесь учтено, что  $N=H/v$ )

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= p \frac{(1-H)^2 V^{2/3}}{\psi(H)}, & H &= \frac{H_0}{1-X/L} \\ \frac{dV}{dt} &= kH + \alpha_1 VI - \alpha_2 I (V-1) V^{1-n} \frac{\mu I}{\sigma} \\ X=0, & V=1 & (t=0) \\ p &= \frac{(\rho_a - \rho_f) g v_0^{2/3}}{\alpha \mu_0 L}, & V &= \frac{v}{v_0} \end{aligned} \quad (1.5)$$

2. На основе системы (1.5) численно исследовались зависимости различных характеристик оседания в ротационном вискозиметре от скорости сдвига  $I$  при различных значениях параметров  $k$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ , характеризующих агрегацию частиц. При численном решении системы (1.5) полагалось  $\mu_0=1$  мПа·с,  $\sigma=0,01$  Па,  $p=1,6 \cdot 10^{-5}$  с<sup>-1</sup>,  $L=6$  см,  $\psi(H)=(1-H)^{-2,5}$ ,  $\mu=\mu_0 \psi(H)$ . На фиг. 2, 3 приведены графики зависимостей скорости движения границы раздела между чистой жидкостью и слоем оседающих частиц  $C=dX/dt$  в момент прохождения этой границей заданной отметки  $x=h$  от скорости сдвига при различных значениях коэффициентов  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ . Полагалось  $k=0,05$  с<sup>-1</sup>,  $H=0,4$ ;  $n=1/3$ ,  $h=1$  см. Представленные кривые качественно и по порядку величин хорошо соответствуют экспериментальным данным [2].

Выделим три параметра, характеризующие эти кривые: скорость оседания  $C_0$  при  $I=0$ ; скорость сдвига  $I_*$ , при которой достигается макси-

мум  $C$ ; само это максимальное значение  $C_{\max}$ . На фиг. 2 кривые  $I$ – $3$  соответствуют значениям  $\alpha_1=0,2; 0,4; 0,6$  при постоянном  $\alpha_2=0,003$ . На фиг. 3 кривые  $1, 2$  соответствуют значениям  $\alpha_2=0,003; 0,01$  при  $\alpha_1=0,4$ . Из фиг. 2 видно, что при  $\alpha_2=0,003$   $I$  практически не зависит от  $\alpha_1$ , в то время как зависимость  $C_{\max}$  от  $\alpha_1$  существенна. Аналогичные выводы справедливы также при  $\alpha_2=0,01$  и  $\alpha_2=0,001$ . Из фиг. 3 следует, что  $C_{\max}$ , как и  $I$ , зависят от  $\alpha_2$ . Как следует из (1.5),  $C_0$  не зависит от  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . С другой стороны, численными расчетами показано, что  $I$  и  $C_{\max}$  практически не зависят от  $k$  в разумном диапазоне значений. Таким образом

$$C_0=C_0(k), \quad I \approx I_*(\alpha_2), \quad C_{\max} \approx C_{\max}(\alpha_1, \alpha_2) \quad (2.1)$$

причем  $C_{\max}$  увеличивается с ростом  $\alpha_1$ ;  $C_{\max}$  и  $I$  уменьшаются с ростом  $\alpha_2$ . Первая из этих зависимостей исследована при анализе оседания эритроцитов в отсутствие сдвига [5, 9].

Зависимости типа (2.1) (или, вообще говоря, подобные зависимости более общего вида) позволяют на основе экспериментальных данных по оседанию при различных скоростях сдвига судить о параметрах  $k$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ .

Отметим, что исходная концентрация частиц  $H_0$  в количественном отношении существенно влияет на рассмотренные параметры оседания. Расстояние  $h$ , на котором фиксируется скорость оседания, влияет на положение и величину максимальной скорости оседания, что демонстрируется графиками на фиг. 4, где кривым  $I$ – $3$  соответствуют  $h=5, 10, 15$  мм при  $\alpha_1=0,4$ ,  $\alpha_2=0,003$ . Численными расчетами показано, также, что вариация коэффициента  $n$  в уравнении (1.3) в пределах 0,1–0,5 качественно не изменяет сделанных выводов.

На основе системы (1.5) были исследованы другие показатели оседания, в частности: скорость оседания и смещение границы спустя заданный промежуток времени, время прохождения границей раздела между чистой плазмой и зоной оседающих частиц в промежутке заданной высоты. Зависимости подобных величин от скорости сдвига в стационарных течениях, а также скорости оседания от времени при непрерывном ускорении вращения цилиндра вискозиметра имеют немонотонный характер, отражающий усиление агрегации в сдвиговом потоке и распад агрегатов при больших скоростях сдвига.

Таким образом, показатели гравитационного оседания агрегирующих частиц в ротационном вискозиметре при различных скоростях сдвига могут дать дополнительную информацию об агрегационных свойствах частиц. Предложенная модель может служить основой для анализа соответствующих экспериментов при умеренных скоростях сдвига.

Авторы благодарят С. А. Регирера за полезные обсуждения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Левтов В. А., Регирер С. А., Шадрина Н. Х. Реология крови. М.: Медицина. 1982.
2. Copley A. L., King R. G., Huang C.-R. Erythrocyte sedimentation of human blood at varying shear rates // *Biorheology*. 1976. V. 13. P. 281–286.
3. Oliver D. R., Vincent N. M. Blood sedimentation at controlled shear rates // *Chem. Eng. J.* 1977. V. 13. № 1. P. 75–78.
4. Лосев Е. С., Орлова И. В., Регирер С. А. Математические модели кинетики агрегации эритроцитов и их приложения // Повреждение и регуляторные процессы в организме: Тез. докл. 3-го Всесоюз. съезда патофизиологов. М., 1982. С. 435.
5. Лосев Е. С. К гидродинамической теории оседания эритроцитов // *Механика композит. материалов*. 1980. № 1. С. 136–141.
6. Регирер С. А., Шадрина Н. Х. О моделях тиксотропных жидкостей // *ПММ* 1978, Т. 42. Вып. 5. С. 856–865.
7. Негребко Н. В., Орлова И. В., Регирер С. А. Квазистационарное пульсирующее течение тиксотропной жидкости в цилиндрической трубке // *Изв. АН СССР. МЖГ*. 1987. № 1. С. 3–9.
8. Лосев Е. С. Моделирование оседания агрегирующих частиц // *Изв. АН СССР. МЖГ*. 1983. № 3. С. 74–78.
9. Лосев Е. С. Оседание эритроцитов: Теоретический анализ. Медицинская биомеханика: Тез. докл. Междунар. конф. «Достижения биомеханики в медицине». Рига, 1986. Т. 2. С. 66–71.

Москва

Поступила в редакцию  
15.II.1988