

УДК 532.546

ВЛИЯНИЕ МИКРОНЕОДНОРОДНОСТИ СРЕДЫ НА ЗАКОН ФИЛЬТРАЦИИ

РОСТОВСКИЙ Н. С., СЕЛЯКОВ В. И.

При исследовании фильтрации жидкостей через пористые среды в ряде случаев отмечено нарушение закона Дарси — прямой пропорциональности скорости фильтрации градиенту давления. В области очень малых скоростей течения (градиентов давления) эти отклонения объясняются образованием слоев из связанной жидкости на поверхностях капилляров [1–4], а в области относительно больших скоростей течения — турбулизацией течения в капиллярах и потерями энергии движения жидкости на неоднородностях типа стыков капилляров [5]. Для сред достаточно однородных закон течения на макроуровне получается путем того или иного усреднения по всему объему среды соотношений для отдельных капилляров [1–5]. Однако для неоднородных сред такая операция неправомерна [1, 4, 5], поскольку в таких средах на микроуровне одновременно могут реализоваться различные режимы течения жидкости. Для построения закона фильтрации в неоднородной среде помимо учета режимов течения в отдельных капиллярах важно адекватно описывать структуру ее пустотного пространства.

В данной работе используется решетчатая перколяционная модель неоднородной среды [6], где вводится функция плотности распределения микрокапилляров по их радиусу $r=f(r)$. Приведена схема расчета, позволяющая определить зависимость проницаемости K от градиента давления G для сред с произвольной $f(r)$. Показано, что для неоднородных сред поведение $K(G)$ в основном определяется видом $f(r)$. Рассмотрен вопрос о влиянии напряженного состояния на проницаемость среды.

1. Модель среды. Рассмотрим неоднородные среды, которые можно условно разделить на два типа. Для сред первого типа пористость определяется в основном объемом пор, а фильтрационные характеристики — пропускной способностью микрокапилляров, соединяющих между собой поры. В средах второго типа отсутствуют крупные полости (каверны), поэтому пористость и фильтрационные характеристики определяются микрокапиллярами. Для описания структуры порового пространства таких сред можно использовать перколяционную решетчатую модель неоднородной среды [6]. Каждая связь в этой модели представляет собой капилляр радиуса r ($a \leq r \leq b$) где a, b — соответственно радиусы самого узкого и самого широкого капилляров, причем $b \leq l_c$, где l_c — длины капилляров. В узлах решетки могут находиться поры (каверны) с характерными размерами $l_p \gg b$ — модель I (описывающая первый тип среды), либо узел является местом стыка нескольких капилляров (для кубической решетки шести) с характерными размерами порядка их диаметров — модель II (описывающая второй тип среды).

Обозначим x — вероятность того, что капилляр существует (связь в решетке не разорвана). Введем нормированную функцию плотности распределения капилляров $f(r)$ по их радиусу r , называемую порометрической кривой

$$\int_a^b f(r) dr = 1$$

Тогда вероятность того, что произвольный капилляр в среде существует и имеет радиус $r > x$, дается формулой

$$P_b(x) = \kappa \int_x^b f(r) dr$$

В перколяционных моделях вводится критическая вероятность (для задачи связей P_b^c), зависящая только от типа решетки и размерности задачи (для кубической решетки $P_b^c = 0,25$). Если вероятность существования связи $P_b(x) \geq P_b^c$, то существует «бесконечный кластер», состоящий из капилляров радиусами $r \geq x$, если же $P_b(x) < P_b^c$, то «бесконечного кластера» из капилляров радиусами $r \geq x$ не существует. Критический радиус c , таким образом, находится из уравнения

$$P_b^c = \kappa \int_c^b f(r) dr$$

Проводимость «бесконечного кластера» существенно зависит от его структуры, точнее, от структуры его «скелета», состоящего из цепочек, образованных фильтрующими капиллярами. Для «скелета бесконечного кластера» можно ввести иерархию проводящих цепочек по радиусу самого узкого капилляра x , присутствующего в цепочке [6]. Назовем такие цепочки x -цепочками.

Таким образом, x -цепочки при $x=c$ будут содержать только самые крупные капилляры ($c \leq r \leq b$). Назовем их c -цепочками. А x -цепочки при $x=a$ будут содержать капилляры всех возможных радиусов $a \leq r \leq b$. Назовем их a -цепочками. Так же можно определить число x -цепочек $dn(x)$, пересекающих единичную площадку (с учетом их извилистости), для которых x лежит в пределах от x до $x+dx$

$$dn(x) = D 2\xi \kappa^{2\xi} \left(\int_x^c f(r) dr \right)^{2\xi-1} f(x) dx, \quad 2\xi = 1 + \lambda \quad (1.1)$$

Здесь $D \sim l_c^{-2}$ — модельная константа, λ — универсальный индекс, зависящий лишь от размерности задачи (в трехмерном случае $\lambda = 0,9$).

Введем обозначения для среднего значения произвольной функции $\psi(r)$ для x -цепочки

$$\langle x, \psi, y \rangle = \int_x^y \psi(r) f(r) dr \left(\int_x^b f(r) dr \right)^{-1} \quad (1.2)$$

2. Течение жидкости в x -цепочке. Рассмотрим стационарную фильтрацию жидкости в одномерном случае под действием заданного градиента давления, модуль которого G равен $\Delta P L_0^{-1}$, где ΔP — перепад давления в среде на расстоянии $L_0 \gg l_c$. Тогда для произвольной x -цепочки для модели II имеем

$$G = \left(\sum_i \Delta p_{ci} + \sum_i \Delta p_{ji} \right) L_0^{-1} \quad (2.1)$$

Здесь Δp_{ci} , Δp_{ji} — соответственно перепады давления в i -м капилляре и на стыке i -го и $(i+1)$ -го капилляров. Суммирование в (2.1) ведется в направлении возрастания давления, т. е. против потока. Обозначим через Q расход жидкости через x -цепочку. Будем считать, что Δp_{ji} зависит только от радиусов i -го и $(i+1)$ -го капилляров r и r' и расхода Q , а Δp_{ci} обычным образом выражается через модуль градиента давления в i -м капилляре $g_c(r, Q)$

$$\Delta p_{ci} = g_c(r, Q) l_c, \quad \Delta p_{ji} = \Delta p_j(r, r', Q) \quad (2.2)$$

Средние потери давления на выходе из капилляра радиуса r в x -цепочке $\Delta p_j(r, Q)$ определяются усреднением $\Delta p_j(r, r', Q)$ (2.2) по r' согласно (1.2)

$$\Delta p_j(r, Q) = \langle x, \Delta p_j(r, r', Q), b \rangle \quad (2.3)$$

Далее, заменяя суммы в (2.1) средними значениями суммируемых величин по x -цепочке (при фиксированном Q), с учетом обозначений (2.2), (2.3) получим

$$G = \alpha \langle x, g_c(r, Q), b \rangle + \alpha l_c^{-1} \langle x, \Delta p_j(r, Q), b \rangle, \quad \alpha = \beta, \quad \beta = L L_0^{-1} \quad (2.4)$$

где L — длина цепочки.

Для модели I аналогично (2.1) имеем

$$G = L_0^{-1} \left[\sum_k (\Delta p_{ck} + \Delta p_{pk}) + \sum_k (\Delta p_{jk}^i + \Delta p_{jk}^f) \right] \quad (2.5)$$

Здесь Δp_{ck} и Δp_{pk} — соответственно падение давления на k -м капилляре длиной l_c и на следующей за ним поре размером l_p (суммирование ведется в направлении возрастания давления), Δp_{jk}^i — падение давления на входе в k -й капилляр, Δp_{jk}^f — на выходе из него. Оценки показывают, что, поскольку $rl_p^{-1} \ll 1$, падением давления в порах Δp_{pk} , а также зависимостью Δp_{jk}^i и Δp_{jk}^f от размера поры l_p можно пренебречь. Тогда потери давления на входе и на выходе из капилляра зависят от его радиуса r и расхода Q . Обозначим их соответственно $\Delta p_j^i(r, Q)$, $\Delta p_j^f(r, Q)$. Аналогично (2.4) имеем

$$G = \alpha \langle x, g_c(r, Q), b \rangle + \alpha l_c^{-1} \langle x, (\Delta p_j^i(r, Q) + \Delta p_j^f(r, Q)), b \rangle \quad (2.6)$$

$$\alpha = \beta l_c (l_c + l_p)^{-1}$$

Первые слагаемые в (2.4), (2.6) — средние потери давления в капиллярах на единицу длины, обозначим их $C(x, Q)$. Вторые слагаемые в (2.4), (2.6), которые обозначим $J(x, Q)$, — средние потери давления на неоднородностях (типа стыков капилляров с узлами) на единицу длины. Для модели I это стык капилляра с порой, для модели II — стык капилляра с капилляром.

Выражения (2.4), (2.6) можно записать единым образом

$$G = \varphi(x, Q), \quad \varphi(x, Q) = C(x, Q) + J(x, Q) \quad (2.7)$$

где $\varphi(x, Q)$ равна правым частям (2.4), (2.6) для моделей I и II соответственно. Соотношение (2.7) представляет собой уравнение относительно расхода Q через x -цепочку при фиксированном G . Обозначим его решение $Q(x, G)$. Тогда проводимость x -цепочки $k(x, G)$ и проницаемость среды $K(G)$ с учетом числа x -цепочек (1.1) выражаются в виде

$$K(G) = \int_a^c k(x, G) dn(x), \quad k(x, G) = \mu Q(x, G) G^{-1} \quad (2.8)$$

где μ — динамическая вязкость жидкости.

Подставляя $Q(x, G)$ в (2.7) и дифференцируя получившуюся неявную функцию по x , при фиксированном G , получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial Q} \frac{\partial Q(x, G)}{\partial x} = 0 \quad (2.9)$$

Пусть

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} < 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial Q} > 0 \quad (2.10)$$

Первое неравенство в (2.10) означает, что чем больше доля узких капилляров в цепочке (чем меньше x , тем эта доля больше), тем больший средний градиент давления нужно создать в x -цепочке, чтобы пропускать через нее фиксированный расход Q . Второе неравенство в (2.10) означает, что чем больший расход Q требуется пропускать через фиксированную x -цепочку, тем больший средний градиент давления нужно создать в ней. Тогда из (2.9), (2.10) имеем $\partial Q(x, G)/\partial x > 0$. Следовательно, дифференцируя $k(x, G)$ (2.8) по x , при фиксированном G , получим

$$\frac{\partial k(x, G)}{\partial x} = \mu G^{-1} \frac{\partial Q(x, G)}{\partial x} > 0 \quad (2.11)$$

Согласно (2.11), проводимость x -цепочек увеличивается с ростом x и, следовательно, иерархия x -цепочек по величине радиуса x самого узкого капилляра, содержащегося в ней, совпадает с иерархией их по средней проводимости $k(x, G)$ при любом градиенте давления G .

Изложенный выше подход к построению закона фильтрации в пористой среде остается справедливым при рассмотрении фильтрации газа, а также допускает модификацию для других типов сред, например трещиноватых и кавернозных. При выполнении дополнительных условий типа (2.10) остается справедливым и (2.11).

3. Режимы течения в капиллярах. Введем обычным образом число Рейнольдса Re и среднюю скорость течения u в капилляре радиуса r при расходе жидкости Q

$$u(r) = Q\pi^{-1}r^{-2}, \quad Re(r) = 2ru(r)\nu^{-1} = 2Q\pi^{-1}r^{-1}\nu^{-1} \quad (3.1)$$

Здесь ρ — плотность жидкости, а $\nu = \mu\rho^{-1}$ — ее кинематическая вязкость. Режимы течения в капиллярах в зависимости от величины $Re(r)$ можно разделить на три области. При $Re(r) < Re_1$ режим течения ламинарный, при $Re_1 \leq Re(r) \leq Re_2$ — переходный между ламинарным и турбулентным, при $Re(r) > Re_2$ — турбулентный. Значения критических чисел Рейнольдса Re_1 и Re_2 для труб (капилляров) круглого сечения находятся в пределах 1500–2100 и 1900–3000 [7, 8].

Ламинарный режим ($Re < Re_1$). Отклонения от закона фильтрации Дарси в области очень малых скоростей фильтрации часто связывают с образованием на поверхностях пор (капилляров) слоев из связанной жидкости, которая может заполнить значительную часть порового пространства и существенно снизить проницаемость среды вплоть до полного прекращения фильтрации в ней [1–4].

В [1–3] приведены результаты экспериментов по фильтрации в однородных средах при малых градиентах давления. В [4] предложена зависимость, описывающая эти эксперименты

$$K = K_0(1 - G_0G^{-1})^2 \quad (3.2)$$

Здесь G_0 — минимальный градиент давления, полученный экстраполяцией экспериментальных данных в область очень малых $G \geq G_0$, K_0 — проницаемость в области градиентов давления $G \gg G_0$, где выполняется закон Дарси. Полагая, что поровое пространство однородной среды состоит из капилляров, имеющих радиусы r , мало отличающиеся от среднего радиуса капилляров среды, после замены в (3.2) $K_0 = 1/8r^2$, $K = \mu g_l r^{-1}$ и простых преобразований можно получить связь градиента давления в капилляре $g_l(r, Q)$ с расходом жидкости через него

$$g_l(r, Q) = g_0 + 1/2 q^2 r^{-4} (1 + \sqrt{1 + 4g_0 q^{-2} r^4}) \quad (3.3)$$

$$q^2 = 8\mu\pi^{-1}Q$$

Здесь $g_0(r)$ имеет смысл минимального градиента давления для капилляра. При $q^2 \gg r^4 g_0(r)$ приходим к известной формуле Пуазейля

$$g_l(r, Q) = 8\mu Q\pi^{-1}r^{-4} \quad (3.4)$$

Переходный режим ($Re_1 \leq Re \leq Re_2$). Течение в этой области носит промежуточный характер между ламинарным и турбулентным (седло Никурадзе [7, 8]). Оно не зависит от шероховатости капилляра и может быть описано приближенной формулой, полученной из анализа графиков зависимости гидравлического сопротивления от числа Рейнольдса [7, 8]

$$g_m(r, Q) = K_m Q^n r^{-t} \quad (3.5)$$

Здесь $n = 2-4$, $t = 4-8$, K_m — размерная константа, зависящая от ρ и ν .

Турбулентный режим ($Re > Re_2$). Для шероховатого капилляра можно пользоваться приближенной формулой

$$g_i(r, Q) = K_i Q^s r^{-h} \quad (3.6)$$

Здесь $\rho = 1,8-2,5$; $h = 4-6$, K_i — размерная константа, зависящая от ρ , v , степени и вида шероховатости капилляра.

4. Потери давления на стыках капилляр — капилляр (капилляр — пора). В качестве модельного элемента местного сопротивления можно взять резкую границу на стыке двух последовательных капилляров второй модели, и границу капилляр — пора в первой модели. Пусть радиус узкого капилляра на стыке r , а широкого r' . Вопросу об определении указанных потерь давления посвящена обширная литература, обзор которой можно найти, например, в [5, 7, 8]. В [7] предлагается полуэмпирическая формула

$$\Delta p_i(r, r', Q) = \frac{1}{2} \zeta(r, r', Q) \rho u^2(r) \quad (4.1)$$

$$\zeta(r, r', Q) = \zeta_v(r, r', Q) + \zeta_i(r, r', Q)$$

Здесь $\zeta_v(r, r', Q)$ — коэффициент потерь, обусловленный силами вязкого трения на границе, $\zeta_i(r, r', Q)$ — коэффициент потерь, обусловленный инерционными силами.

При $Re(r) \approx 300$ $\zeta_i \gg \zeta_v$ и, следовательно, $\zeta \approx \zeta_i$. Для ζ_i справедливы полуэмпирические формулы Борда [7, 8]

$$\zeta_i^f(r, r') = B^f [(r/r')^2 - e^{-1}(r'/r)]^2 \quad (4.2)$$

$$\zeta_i^i(r, r') = B^i [1 - e^{-1}(r'/r)]^2$$

причем $\zeta_i = \zeta_i^f$ при вытекании жидкости из капилляра радиуса r в капилляр радиуса r' ($r < r'$) и $\zeta_i = \zeta_i^i$ при обратном направлении течения. Коэффициенты B^f и B^i порядка единицы. Функция e в (4.2) характеризует степень пережатия струи. При $r'/r \approx 3$ e практически постоянна и равна $e_0 \approx 0,61$, а при стремлении r'/r к единице e также стремится к единице.

При $Re(r) \leq 10-30$ $\zeta_v \gg \zeta_i$ и, значит, $\zeta \approx \zeta_v$. Для ζ_v справедлива формула Вюста [7]

$$\zeta_v(r, r', Q) = A(r, r') Re^{-1}(r, Q) \quad (4.3)$$

При $r'/r \approx 1,3$ функция A в (4.3) слабо зависит от r и r' и равна $A_0 \approx 20-40$. При стремлении r'/r к единице ($r'/r \approx 1,1$) A быстро убывает до нуля. Выражение (4.3) справедливо при обоих направлениях течения.

В области $300 \geq Re \approx 20-40$ можно с достаточной для практических расчетов точностью определять $\Delta p_i(r, r', Q)$, подставляя (4.2), (4.3) в (4.1).

5. Законы фильтрации при различных градиентах давления. Приведенные выше зависимости для режимов течения в капиллярах (3.3), (3.5), (3.6) и для потерь давления на стыках (4.1) позволяют конкретизировать вид уравнения (2.7), связывающего расход Q через произвольную x -цепочку ($a \leq x \leq c$) с градиентом давления G в среде.

Рассмотрим второе слагаемое в (2.7) $J(x, Q)$. В модели I каждый капилляр радиуса r на входе и на выходе стыкуется с порой размером $l_p \gg r$. Полагая $r' = \frac{1}{2} l_p$ и переходя в (4.2), (4.3) к $r' \gg r$ ($A \approx A_0$, $e \approx e_0$), из (4.1) и (2.6) получим

$$J(x, Q) = \mu V(x) Q + \frac{1}{2} \rho I(x) Q^2 \quad (5.1)$$

$$V(x) = \gamma \langle x, r^{-3}, b \rangle, \quad I(x) = \delta \langle x, r^{-4}, b \rangle$$

$$\gamma = \frac{1}{2} \alpha l_c^{-1} \pi^{-1} A_0 \quad (5.2)$$

$$\delta = \alpha l_c^{-1} \pi^{-2} e_0^{-2} [B^f + (1 - e_0)^2 B^i]$$

Для модели II после усреднения (4.1) по r' в соответствии с (2.3) и последующей подстановки результата усреднения во второе слагаемое в (2.4) (и усреднения по r) получим опять (5.1) с другими функциями $V(x)$ и $I(x)$

$$V(x) = \gamma \langle x, [\langle x, A(r, r') / (r')^3, r \rangle + r^{-3} \langle r, A(r, r'), b \rangle], b \rangle \quad (5.3)$$

$$I(x) = \delta \langle x, [\langle x, \zeta_i^f(r, r') / (r')^4, r \rangle + r^{-4} \langle r, \zeta_i^f(r, r'), b \rangle], b \rangle$$

$$\gamma = \frac{1}{4} \alpha \pi^{-1} l_c^{-1}, \quad \delta = \alpha \pi^{-2} l_c^{-1}$$

Введем обозначения

$$r_m(Q) = d_1 Q, \quad r_i(Q) = d_2 Q$$

$$d_i = (\frac{1}{2} \pi Re_i v)^{-1}, \quad i = 1, 2$$

$$\begin{aligned} Q_i &= b d_2^{-1}, & Q_{im} &= b d_1^{-1}, \\ Q_{mm} &= x d_2^{-1}, & Q_{im} &= x d_1^{-1} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Уточним вид уравнения (2.7) с учетом (5.4) для различных градиентов давления G , начиная с больших G .

Турбулентный режим. При $r_i(Q) \geq b$, $Q \geq Q_i$ согласно (5.4), (3.4) имеем $\text{Re}(x) \geq \text{Re}(r) \geq \text{Re}(b) \geq \text{Re}_2$ и, следовательно, течение во всех капиллярах x -цепочки турбулентно.

Уравнение (2.7) примет вид

$$G = \alpha \langle x, g_i(r, Q), b \rangle + J(x, Q) \quad (5.5)$$

Минимальную величину модуля градиента $G_i(x)$, при котором справедливо (5.5), можно получить, подставляя Q_i (5.5)

$$G > G_i(x), \quad G_i(x) = \alpha \langle x, g_i(r, Q_i), b \rangle + J(x, Q_i) \quad (5.6)$$

Подставив (3.6), (5.4) в (5.5), (5.6), можно убедиться в справедливости (2.10) и (2.11), а также получить неравенство

$$dG_i(x)/dx < 0 \quad (5.7)$$

Следовательно, при увеличении G в турбулентный режим первыми перейдут s -цепочки и последними a -цепочки, причем для неоднородных сред область значений $G(G_i(a) \geq G \geq G_i(c))$ может быть очень протяженной. Если $G > G_i(a)$, то течение во всех капиллярах среды турбулентно. Подставляя (3.6) при $s=2$, $t=5$ [8] в (5.5) и пренебрегая первым малым слагаемым в (5.1), из (2.8) получим

$$K(G) = \mu G^{-1/2} \int_a^c dn(x) (\alpha K_i \langle x, r^{-5}, b \rangle + 1/2 \rho I(x))^{-1/2} \quad (5.8)$$

Выражение (5.8) представляет собой известный квадратичный закон фильтрации.

Турбулентно-переходный режим. При

$$r_m(Q) \geq b \geq r_i(Q) \geq x, \quad Q_i \geq Q \geq Q_{im}$$

течение в капиллярах x -цепочки радиусами r из диапазона $x \leq r \leq r_i(Q)$ ($\text{Re}(x) \geq \text{Re}(r) \geq \text{Re}_2$) турбулентное, в капиллярах с $r_i(Q) < r \leq b$ ($\text{Re}_2 > \text{Re}(r) \geq \text{Re}_1$) — переходное. Уравнение (2.7) принимает вид

$$G = \alpha \langle x, g_i(r, Q), r_i(Q) \rangle + \alpha \langle r_i(Q), g_m(r, Q), b \rangle + J(x, Q) \quad (5.9)$$

Область значений G , в которой справедливо (5.9), находим, подставляя Q_i , Q_{im} в (5.9)

$$\begin{aligned} G_i(x) \geq G \geq G_{im}(x), \quad G_{im}(x) &= \alpha \langle x, g_i(r, Q_{im}), z \rangle + \\ &+ \alpha \langle z, g_m(r, Q_{im}), b \rangle + J(x, Q_{im}), \quad z = d_2 b d_1^{-1} \end{aligned} \quad (5.10)$$

Используя (3.5), (3.6), (5.1), можно убедиться в выполнении (2.11) и получить неравенство $dG_{im}(x)/dx < 0$. Следовательно, в турбулентно-переходный режим при увеличении G первыми перейдут s -цепочки, а последними a -цепочки.

Переходный режим. При

$$r_m(Q) \geq b > x \geq r_i(Q), \quad Q_{mm} \geq Q \geq Q_{im} \quad (5.11)$$

($\text{Re}_1 \leq \text{Re}(b) \leq \text{Re}(r) \leq \text{Re}(x) \leq \text{Re}_2$) течение во всех капиллярах x -цепочки переходное. Неравенство (5.11) может выполняться лишь при $b x^{-1} \leq d_1 d_2^{-1}$ ($d_1 d_2^{-1} < 1,5$), следовательно, для сред с $b a^{-1} > d_1 d_2^{-1}$ переходный

режим не может реализоваться ни в одной x -цепочке. Уравнение (2.7) принимает вид

$$G = \alpha \langle x, g_m(r, Q), b \rangle + J(x, Q) \quad (5.12)$$

Подставляя Q_{tm} и Q_{mm} в (5.12), получим область применимости (5.12)

$$\begin{aligned} G_m''(x) &\geq G \geq G_m'(x) \\ G_m''(x) &= \alpha \langle x, g_m(r, Q_{mm}), b \rangle + J(x, Q_{mm}) \\ G_m'(x) &= \alpha \langle x, g_m(r, Q_{tm}), b \rangle + J(x, Q_{tm}) \end{aligned} \quad (5.13)$$

Подставляя (3.5), (5.1) в (5.13), можно проверить выполнение условий (2.10), (2.11) и получить неравенство $dG_m'(x)/dx < 0$.

Турбулентно-переходно-ламинарный режим. При $b \geq r_m(Q) \geq r_t(Q) \geq x (Q_{tm} \geq Q \geq Q_{mm})$ течение в капиллярах x -цепочки радиусами: $x \leq r \leq r_t(Q)$ ($\text{Re}(r) \geq \text{Re}_2$) — турбулентное, $r_t(Q) < r \leq r_m(Q)$ ($\text{Re}_2 > \text{Re}(r) \geq \text{Re}_1$) — переходное, $r_m(Q) \leq r \leq b$ ($\text{Re}_1 > \text{Re}(r) \geq \text{Re}(b)$) — ламинарное. Уравнение (2.7) принимает вид

$$\begin{aligned} G &= \alpha \langle x, g_t(r, Q), r_t(Q) \rangle + \alpha \langle r_t(Q), g_m(r, Q), r_m(Q) \rangle + \\ &+ \alpha \langle r_m(Q), g_t(r, Q), b \rangle + J(x, Q) \end{aligned} \quad (5.14)$$

Подставляя в (5.14) Q_{tm} , Q_m , получим область G , где справедливо (5.14)

$$\begin{aligned} G_{tm}(x) &\geq G \geq G_{tml}(x), \quad G_{tml}(x) = \alpha \langle x, g_m(r, Q_{mm}), \\ &z \rangle + \alpha \langle z, g_t(r, Q_{mm}), b \rangle + J(x, Q_{mm}) \quad z = d_1 x d_2^{-1} \end{aligned} \quad (5.15)$$

Если $b x^{-1} < d_1 d_2^{-1}$, то турбулентно-переходно-ламинарный режим реализоваться в x -цепочке не может. Если же $b a^{-1} < d_1 d_2^{-1}$, то указанный режим не может реализоваться ни в одной x -цепочке среды.

Переходно-ламинарный режим. При $b \geq r_m(Q) \geq x \geq r_t(Q)$, $Q_{mm} \geq Q \geq Q_{tm}$ в капиллярах x -цепочки радиусами $r_m(Q) \geq r \geq x$ ($\text{Re}_2 \geq \text{Re}(x) \geq \text{Re}(r) \geq \text{Re}_1$) течение переходное, а в капиллярах радиусами $b \geq r \geq r_m(Q)$ ($\text{Re}_1 \geq \text{Re}(r) \geq \text{Re}(b)$) — ламинарное. Уравнение (2.7) принимает вид

$$G = \alpha \langle x, g_m(r, Q), r_m(Q) \rangle + \alpha \langle r_m(Q), g_t(r, Q), b \rangle + J(x, Q) \quad (5.16)$$

Подставляя Q_{mm} , Q_{lm} в (5.16), получим область применимости (5.16)

$$\begin{aligned} G_{tml}(x) &\geq G \geq G_{ml}(x), \\ G_{ml}(x) &= \alpha \langle x, g_t(r, Q_{lm}), b \rangle + J(x, Q_{lm}) \end{aligned} \quad (5.17)$$

Ламинарный режим. При $x \geq r_m(Q)$, $Q \geq Q_{lm}$ в x -цепочке во всех капиллярах ($\text{Re}_1 \geq \text{Re}(x) \geq \text{Re}(r) \geq \text{Re}(b)$) ламинарное течение. Уравнение (2.7) принимает вид

$$G = \alpha \langle x, g_t(r, Q), b \rangle + J(x, Q) \quad (5.18)$$

Условие применимости (5.18) получим, подставляя Q_{lm} в (5.18)

$$G_{ml}(x) \geq G \quad (5.19)$$

Если (5.19) выполняется для всех x -цепочек ($a \leq x \leq c$), то течение ламинарно во всей среде.

Ламинарное течение при больших градиентах давления. Если для всех капилляров x -цепочки выполняется условие

$$Q_{lm} \geq Q \geq Q_l, \quad Q_l = \max(g_0(r) r^4 \mu^{-1})$$

то течение во всех капиллярах близко к пуазейлевскому. Подставляя Q_l

в (5.18), получим границы области пуазейлевского течения в x -цепочке

$$G_{ml}(x) \geq G \geq G_l(x) \quad (5.20)$$

$$G_l(x) = \alpha \langle x, g_l(r, Q), b \rangle + J(x, Q_l)$$

Подставляя (3.4), (5.1) в (5.18), имеем

$$G = \mu(k_0^{-1}(x) + V(x))Q + {}^{1/2} \rho I(x)Q^2, \quad k_0(x) = {}^{7/8}(\alpha \langle x, r^{-4}, b \rangle)^{-1} \quad (5.21)$$

Здесь $k_0(x)$ — проводимость x -цепочки при пуазейлевском течении во всех ее капиллярах и отсутствии потерь давления на стыках. Если (5.20) выполняется для всех x -цепочек, то из (2.8) получим

$$K(G) = \frac{\mu}{G} \int_a^c E(x) (\sqrt{1 + GF^{-1}(x)} - 1) dn(x) \quad (5.22)$$

$$E(x) = \nu I^{-1}(x) (V(x) + k_0^{-1}(x)), \quad F(x) = {}^{1/2} \rho I(x) E^2(x)$$

Определим средний радиус капилляра в среде R и дисперсию σ^2 функции $f(r)$

$$R = \langle a, r, b \rangle, \quad \sigma^2 = \langle a, (r - R)^2, b \rangle \quad (5.23)$$

Если среда описывается моделью II и достаточно однородна ($\sigma R^{-1} \leq 0,1$), то $k_0 \sim R^4$ и, согласно (5.3), величины $V(x)R^4$, $I(x)R^5 \ll x l_c^{-1}$. В этом случае $F(x) \gg G$. Разлагая корень в (5.22) в ряд по $GF^{-1}(x)$ и оставляя первые три слагаемых, получим

$$K(G) = \int_a^c k_0(x) dn(x) - \int_a^c V(x) k_0^2(x) dn(x) - \frac{G}{2\mu\nu} \int_a^c I(x) k_0^3(x) dn(x) \quad (5.24)$$

Первый интеграл в (5.24) (полученный ранее в [6]) представляет собой проницаемость среды в том случае, когда во всех капиллярах среды имеет место пуазейлевское течение, он не зависит от G . Второй и третий интегралы в (5.24) связаны с малым уменьшением проницаемости среды за счет соответственно вязких и инерционных потерь давления на неоднородностях типа стыков капилляров. Для однородной среды соотношение (5.24) верно во всей области (5.20). Однако для неоднородных сред, описываемых моделью I или II (при $\sigma R^{-1} > 1$), вклад третьего слагаемого в (5.21) может стать значительным, а в области $G \leq G_{ml}(x)$ (где $\text{Re}(x) \leq \text{Re}_i$) даже главным. Таким образом, в неоднородных средах проницаемость может уменьшиться в несколько раз только за счет инерционных потерь давления на стыках капилляр — капилляр (капилляр — пора) при отсутствии турбулентного течения в капиллярах. В однородных средах существенное уменьшение проницаемости возможно лишь за счет турбулизации течения в капиллярах.

Ламинарное течение при очень малых градиентах давления. Если условие

$$Q \ll Q_0, \quad Q_0 = \min(g_0(r)r^4\mu^{-1}) \quad (5.25)$$

выполняется для всех капилляров x -цепочки, то, разлагая (3.3) по малой величине $q^2 g_0^{-1}(r)r^{-4}$, получим правую часть (2.7) в виде ряда по q . Число членов ряда, которые необходимо оставить в (2.7), зависит от вида $g_0(r)$, $f(r)$, величины исследуемого диапазона G и требуемой точности расчета. Рассмотрим (2.7) с учетом первых трех членов разложения

$$G = G_0(x) + qM(x) + q^2W(x), \quad G_0(x) = \alpha \langle x, g_0(r), b \rangle$$

$$M(x) = \alpha \langle x, g_0^{1/2}(r)r^{-2}, b \rangle, \quad W(x) = {}^{7/8}(2k_0^{-1}(x) + V(x)) \quad (5.26)$$

Здесь $k_0(x)$ определено в (5.21). В (5.26) учтено, что вклад квадратичного по Q слагаемого в (5.1) пренебрежимо мал по сравнению с остальными членами уравнения (5.26). Первые отрицательные слагаемые в уравнении (5.26) появляются только в члене, пропорциональном q^5 , а член разложения, пропорциональный q^3 , отсутствует.

Величину $G_0(x)$ можно назвать минимальным градиентом давления x -цепочки, поскольку при $G < G_0(x)$ течение в этой x -цепочке прекращается за счет того, что самые узкие капилляры оказываются целиком заполненными связанной жидкостью. Дифференцируя $G_0(x)$ по x можно убедиться, что $dG_0(x)/dx < 0$, поскольку $g_0(r)$ — монотонно убывающая функция r . Таким образом, если уменьшать G , то при $G = G_0(a)$ фильтрация прекращается в a -цепочке, а при $G < G_0(a)$ и в цепочках с $x_0(G) \geq x \geq a$, где $x_0(G)$ находится из уравнения

$$G_0(x_0) = G \quad (5.27)$$

При $x_0 = c$ течение прекратится и в самой крупной c -цепочке, т. е. среда станет непроницаемой. Следовательно, $G_0(c)$ можно назвать минимальным градиентом давления для данной среды. Учитывая, что $Q(x, G)$ находится из (2.7) для x -цепочек, у которых $x_0(G) \leq x \leq c$, и что $Q = 0$ для остальных x -цепочек ($a \leq x \leq x_0(G)$), получим, согласно (2.8), соотношение

$$K(G) = \int_{x_0(G)}^c k(x, G) dn(x) \quad (5.28)$$

верное в области

$$G_0(c) \leq G \leq G_0(a) \quad (5.29)$$

Если $G \geq G_0(a)$, то в (5.28) нужно считать $x_0(G) = a$. Как видно из (5.28), при изменении G в области (5.29), во-первых, процесс фильтрации начинается или прекращается во множестве x -цепочек (см. (5.27)); во-вторых, меняется проводимость остальных фильтрующих x -цепочек $k(x, G)$. Эти два фактора приводят к сильной зависимости проницаемости от G . Если среда неоднородна, то зависимость (5.28) может иметь сложный вид, а область (5.29) быть весьма протяженной. Это может затруднить определение ее границ в эксперименте. При $G \geq G_0(a)$ зависимость $K(G)$ становится более слабой. Для достаточно однородных сред ($\sigma R^{-1} \leq 0,1$), учитывая малость второго и третьего слагаемых в (5.26) при выполнении условия (5.25), а также выполнение неравенства $V(x)k_0(x) \leq Rl_c^{-1}$, можно установить примерный вид зависимости $k(x, G)$ вблизи порога непроницаемости среды $G_0(c)$

$$k(x, G) \simeq \frac{1}{8} k_0(x) (1 - G_0(x) G^{-1})^2 G N(x) [1 - \frac{1}{2} V(x) k_0(x) - \frac{1}{2} G N(x) (1 - G_0(x) G^{-1})], \quad N(x) = 4W(x)M^{-2}(x) \geq G_0^{-1}(x) \quad (5.30)$$

Как видно из (5.30), проводимость x -цепочек вблизи $G_0(x)$ существенно меньше их пуазейлевской проводимости $k_0(x)$.

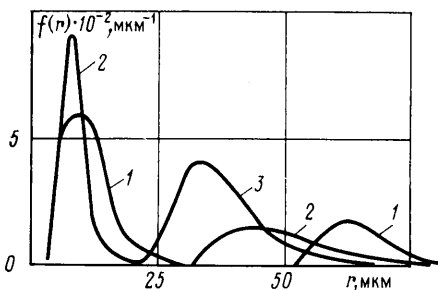
Введем, согласно [5], числа Рейнольдса для среды

$$Re = d\nu v^{-1} \quad (5.31)$$

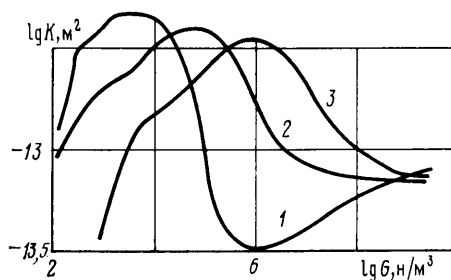
Здесь v — средняя скорость фильтрации. Величина d выбирается или по среднему размеру зерна в среде или по среднему диаметру пустот. Подставляя $K(G) = \mu\nu(G)G^{-1}$ в (5.31), получим

$$Re(G) = K(G)Gd\mu^{-1}\nu^{-1} \quad (5.32)$$

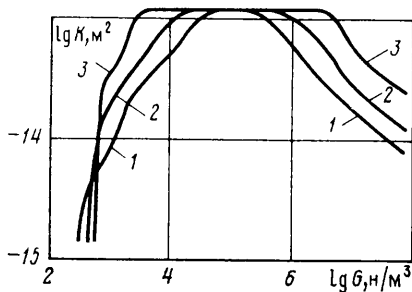
Подставляя в (5.32) последовательно приведенные выше граничные значения градиента давления для различных режимов течения в среде



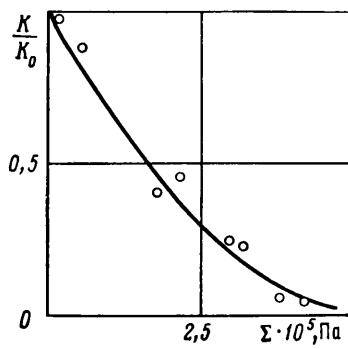
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

и соответствующие значения проницаемости, определяемые из решения (2.8), можно получить критические числа Рейнольдса для среды.

6. Результаты расчетов и их обсуждение. Рассматривалась фильтрация воды ($\rho=10^3$ кг/м³, $\nu=10^{-6}$ м²/с) в среде, поровое пространство которой моделировалось кубической решеткой ($P_0^c=0,25$, $\kappa=0,5$). В узлах решетки располагались поры (модель I), соединяющиеся между собой шероховатыми капиллярами. Для построения законов течения в капиллярах и определения потерь давления на стыках капилляр-капилляр (капилляр-пора) использовались экспериментальные зависимости [7, 8] (в (3.5) $n=3$, $t=6$, $K_m=3 \cdot 10^{-7}$ рв⁻¹=300 кг·с/м⁵; в (3.6) $s=2$, $h=5$, $K_t=10^3$ р=1 кг/м³ и $\beta=1,5$; $B^t=B^f=1$, $A_0=30$ в (4.2), (4.3)). Зависимость $g_0(r)=c_0 r^{-2}$ бралась из [4], где величина $c_0=10^{-5}$ Н/м находилась из экспериментов [1-3, 5]. Для иллюстрации существенной зависимости вида функции $K(G)$ от $f(r)$ был проведен численный расчет для трех сред с одинаковыми средними радиусами капилляров R и σ , различающимися менее чем на 15% ($l_c R^{-1}=20$, $l_c=l_p$). На фиг. 1 показаны $f(r)$, а на фиг. 2, соответствующие зависимости $K(G)$. Как видно из фиг. 2 совпадение R и близость σ^2 для $f(r)$ не обеспечивают даже качественно похожего поведения $K(G)$.

Функции плотности распределения $f(r)$ с двумя «куполами» могут иметь трещиновато-пористые, песчано-глинистые среды, а также среды, имеющие блоковую и межблоковую пористости. На фиг. 2 (кривая 1) первый максимум и минимум $K(G)$ соответствуют переходу всех крупных x -цепочек ($x>110$ мкм) последовательно через все режимы течения, в то время как в узких x -цепочках ($x<40$ мкм) еще только происходит отделение связанной жидкости (область (5.29)). Согласно (5.32), например, для зависимости $K(G)$, показанной кривой 3 на фиг. 2, можно вычислить некоторые критические числа Рейнольдса: $Re(G_0(c))=1,8 \cdot 10^{-6}$ (вблизи порога непроницаемости среды), $Re(G_0(a))=3,4 \cdot 10^{-4}$ (фильтрация началась во всех x -цепочках), $Re(G_t(a))=0,62$ (течение во всех x -цепочках пуазейлевское), $Re(G_{m1}(c))=6,9$ (начало переходного режима в s -цепочке), $Re(G_t(a))=29,3$ (турбулентное течение во всей среде).

На фиг. 3 показаны зависимости $K(G)$ для более простых функций плотности распределения

$$f(r)=Hr^{-n} \quad (6.1)$$

Значениям $n=2, 6, 10$ соответствуют кривые 1-3. Константа H подбиралась так, чтобы удовлетворялась нормировка $f(r)$ и чтобы $K(G)$ имели одинаковые значения в области (5.20), где справедлив закон Дарси. Как видно из фиг. 3, значения $K(G)$ в области (5.29) могут отличаться на 1-3 порядка, а в области (5.6) - в несколько раз.

Область (5.20) сужается при увеличении дисперсии $f(r)$ (при уменьшении n), а ход зависимости $K(G)$ становится менее резким в области (5.29).

Численный расчет $K(G)$ по (5.28) в области (5.29) для $g_0(r) = c_0 r^{-m}$ ($m=1,5; 2; 2,5; 3$) $f(r)$ вида (6.1) показал, что в этой области G изменения проницаемости очень значительны (в десятки раз), причем чем больше m , тем резче эти изменения.

С использованием экспериментальной функции распределения из [9], которая хорошо описывается (6.1) при $n=4$ и $a=25$ мкм, был проведен численный расчет проницаемости среды и ее изменения при одинаковой относительной упругой деформации всех капилляров в фильтрующих x -цепочках (закон Гука). Модуль упругости взят обычным для песчаников $E \approx 10^4$ МПа. На фиг. 4 сплошная линия соответствует расчету, а точки — эксперименту [9], Σ — величина обжимающего давления.

Такая чувствительность проницаемости образца к его обжатию даже небольшим давлением (когда деформации в основном упругие) обусловлена тем, что из процессов фильтрации выключается множество x -цепочек, самые узкие капилляры в которых в результате обжатия оказываются целиком заполненными связанной жидкостью. Эта чувствительность тем выше, чем меньше σ^2 — дисперсия $f(r)$.

Отметим, что расчет для модели, представляющей пористое пространство среды в виде совокупности параллельных трубок [9] с постоянным радиусом по всей их длине, с учетом слоев из связанной жидкости в узких трубках и в основном упругих деформаций при обжатии образца, дает изменение проницаемости не более чем на несколько процентов.

Таким образом, структура пустотного пространства среды может существенным образом влиять на закон фильтрации, так как на микроуровне в такой среде могут реализоваться различные режимы течения. Поэтому знания лишь макроскопических параметров неоднородной среды (коэффициентов проницаемости, пористости среднего размера пустот) недостаточно для описания фильтрации в них при различных градиентах давления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Демин Н. В., Кисляков Ю. П., Морозова В. Т. О зависимости проницаемости среды от градиента давления // Нефть. хоз-во. 1966. № 12. С. 30–38.
2. Коробов К. Я., Антипин Ю. В. Исследование процесса фильтрации жидкости при низких градиентах давления // Применение ньютоновских систем в добыче нефти. М.: ВНИИОЭНГ, 1970. С. 151–158.
3. Скворцов Н. П. Экспериментальные исследования процесса фильтрации в глинах // Проблема изучения и использования водных ресурсов. М.: ИВП АН СССР, 1979. С. 25–31.
4. Арье А. Г. Физические основы фильтрации подземных вод. М.: Недра, 1984. 102 с.
5. Шейдеггер А. Э. Физика течения жидкостей через пористые среды: Пер с англ. М.: Гостоптехиздат, 1960. 249 с.
6. Селяков В. И. Проводимость зернистых и кавернозных сред // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1986. № 12. С. 44–52.
7. Альтшуль А. Д. Гидравлические сопротивления. М.: Недра, 1982. 224 с.
8. Идельчик И. Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям. (Козф-ты местных сопро-т. и сопротивлений трения). М.; Л.: Энергоиздат, 1966. 464 с.
9. Марморштейн Л. М. Коллекторские и экранирующие свойства осадочных пород при различных термодинамических условиях. Л.: Недра, 1975. 159 с.

Москва

Поступила в редакцию
11.XI.1986