

УДК 532.529:537.634

О СИЛЕ, ДЕЙСТВУЮЩЕЙ НА ТЕЛО В НЕОДНОРОДНО НАГРЕТОЙ НАМАГНИЧИВАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

НАЛЕТОВА В. А., ТИМОНИН Г. А., ШКЕЛЬ И. А.

Общие методы построения моделей сред, взаимодействующих с электромагнитным полем, изложены в работе [1]. Модели дисперсных намагничивающихся сред предложены в [2]. Примером дисперсных намагничивающихся сред может служить магнитная жидкость с диспергированными в ней твердыми частицами. Основной проблемой, возникающей при построении моделей дисперсных намагничивающихся сред, является вычисление сил, действующих на диспергированные частицы в присутствии магнитного поля.

Сила, действующая на тело, магнитные свойства которого отличаются от магнитных свойств окружающей жидкости, в неоднородном магнитном поле, вычислялась в работах [3–6]. В [3–5] предполагалось, что либо температура однородна в пространстве, либо магнитные свойства не зависят от температуры. В [6] вычислялась сила, действующая на сферическую частицу в неоднородной нагретой намагничивающейся жидкости, при этом рассматривался случай, когда магнитная проницаемость вещества частицы много больше магнитной проницаемости жидкости и обе проницаемости зависят только от температуры.

В данной работе вычисляется сила, действующая на сферическую частицу в неоднородно нагретой намагничивающейся жидкости в случае, когда магнитная проницаемость вещества частицы зависит произвольным образом от температуры и напряженности магнитного поля, а магнитная проницаемость жидкости — от температуры. При вычислении силы учитывается разность теплопроводностей вещества частицы и жидкости и, в отличие от [6], искажение приложенного магнитного поля из-за наличия градиента температуры. Поэтому формула для силы, полученная в данной работе, отличается от формулы работы [6].

Показано, что полученное выражение для силы верно с точностью до слагаемых порядка некоторой степени малого параметра — отношения размера частицы к характерному размеру изменения параметров (температуры, напряженности магнитного поля и т. д.). Выведено условие, определяющее значение степени.

1. Постановка задачи. Рассмотрим твердую сферическую частицу радиуса a , покоящуюся в несжимаемой намагничивающейся жидкости. Сила, действующая на частицу со стороны жидкости, определяется интегралом по поверхности частицы S от тензора напряжений в жидкости

$$F^i = \int_S \left[-p g^{ij} + \frac{H^i B^j}{4\pi} - \frac{\mathbf{H}\mathbf{B}}{8\pi} g^{ij} + \eta (\nabla^i v^j + \nabla^j v^i) \right] n_j dS \quad (1.1)$$

Здесь $\mathbf{v}$, p , η — скорость, давление, коэффициент динамической вязкости жидкости, $\mathbf{n}$ — вектор единичной внешней нормали к поверхности S , $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ — векторы индукции и напряженности магнитного поля. Векторы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ связаны соотношением $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, где μ — магнитная проницаемость среды. Будем считать $\mu^{(e)}$ функцией, зависящей только от температуры $T^{(e)}$, $\mu^{(e)} = \mu^{(e)}(T^{(e)})$, а $\mu^{(i)}$ — функцией, зависящей от температуры и от напряженности магнитного поля $\mu^{(i)} = \mu^{(i)}(T^{(i)}, H^{(i)})$. Далее везде верхними индексами (e) и (i) будут обозначаться параметры, относящиеся соответственно к жидкости и к частице.

Уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости, уравнение движения в приближении Стокса, уравнения теплопроводности при малых числах Пекле и уравнения Максвелла вне и внутри частицы в при-

ближении феррогидродинамики, описывающие установившиеся распределения скорости, давления, температуры и магнитного поля, имеют вид

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \quad -\nabla_i p - \frac{H^{(e)2}}{8\pi} \nabla_i \mu^{(e)} + \eta \Delta v_i = 0 \\ \Delta T^{(e)} &= 0, \quad \Delta T^{(i)} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B}^{(i,e)} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H}^{(i,e)} = 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

На поверхности частицы скорость жидкости равна нулю и непрерывны температура, нормальная составляющая вектора потока тепла, нормальная составляющая вектора магнитной индукции и касательная составляющая вектора напряженности магнитного поля:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= 0, \quad T^{(e)} = T^{(i)}, \quad \kappa^{(e)} \frac{\partial T^{(e)}}{\partial n} = \kappa^{(i)} \frac{\partial T^{(i)}}{\partial n} \\ B_n^{(e)} &= B_n^{(i)}, \quad H_\tau^{(e)} = H_\tau^{(i)}, \quad r = a \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь $\kappa^{(e)}$ и $\kappa^{(i)}$ — теплопроводности жидкости и вещества частицы, которые считаются постоянными, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор сферической системы координат (r, θ, ψ) с центром в центре частицы.

Будем считать, что возмущения параметров, вносимые частицей, на достаточно больших расстояниях от частицы стремятся к нулю, при этом граничные условия на бесконечности имеют вид

$$\mathbf{H}^{(e)} \rightarrow \mathbf{H}^0, \quad T^{(e)} \rightarrow T^0, \quad \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}^0, \quad p \rightarrow p^0, \quad r \rightarrow \infty \quad (1.4)$$

Верхним индексом 0 обозначаются невозмущенные параметры — параметры, которые были бы в жидкости в отсутствие частицы. Невозмущенные параметры определены во всем пространстве и удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v}^0 &= 0, \quad -\nabla_i p^0 - \frac{H^{02}}{8\pi} \nabla_i \mu^0 + \eta \Delta v_i^0 = 0, \quad \Delta T^0 = 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{B}^0 &= 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H}^0 = 0, \quad \mathbf{B}^0 = \mu^0 \mathbf{H}^0, \quad \mu^0 = \mu^{(e)}(T^0) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Введем величины $\mathbf{H}'$, T' , $\mathbf{v}'$, p' формулами

$$\mathbf{H}' = \mathbf{H} - \mathbf{H}^0, \quad T' = T - T^0, \quad \mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{v}^0, \quad p' = p - p^0 \quad (1.6)$$

Из уравнений и граничных условий (1.2) — (1.4) с учетом (1.5), (1.6) следуют уравнения для величин $\mathbf{H}'$, T' , $\mathbf{v}'$, p' , в которые входят невозмущенные параметры $\mathbf{H}^0$, T^0 , $\mathbf{v}^0$, p^0 , считающиеся известными функциями координат.

2. Упрощение системы уравнений и граничных условий. Введем безразмерные параметры формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^* &= \frac{\mathbf{v}}{v_0}, \quad p^* = \frac{p}{p_0}, \quad T^* = \frac{T}{T_0}, \quad \mathbf{H}^* = \frac{\mathbf{H}}{H_0}, \quad r^* = \frac{r}{a} \\ L_A &= A_0 / |\nabla A|_0, \quad A = \mathbf{H}, T, p, \mathbf{v} \\ L &= \min\{L_H, L_T, L_v, L_p\}, \quad \varepsilon = a/L \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}_p &= \frac{p_0 a}{\eta v_0}, \quad \mu^{(e), (i)*} = \frac{\mu^{(e), (i)}}{\mu_0^{(e)}}, \quad \operatorname{Re}_m = \frac{H_0^2 a \mu_0^e}{\eta v_0} \\ (\nabla_i \mu^{(e)})^* &= \frac{\nabla_i \mu^{(e)} L}{\mu_0^{(e)}}, \quad \mu_0^{(e)} = \mu_0^{(e)}(T_0) \end{aligned}$$

Здесь и далее нижним индексом 0 обозначены значения невозмущенных параметров в начале координат.

Предположим, что $\varepsilon \ll 1$. При этом невозмущенные параметры $\mathbf{H}^*$, T^* , $\mathbf{v}^*$, p^* в окрестности начала координат можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^* &= \mathbf{H}_0^* + \varepsilon \Gamma_{ij} x_i \mathbf{e}_j + O(\varepsilon^2), \quad T^* = T_0^* + \varepsilon (\nabla_i T)_0^* x_i + O(\varepsilon^2) \\ \mathbf{v}^* &= \mathbf{v}_0^* + \varepsilon (\nabla_i v_j)_0^* x_i \mathbf{e}_j + O(\varepsilon^2), \quad p^* = p_0^* + \varepsilon (\nabla_i p)_0^* x_i + O(\varepsilon^2) \\ (\nabla_i p)_0^* &= (\nabla_i p^*)_0 = \frac{L}{p_0}, \quad \Gamma_{ij} = \frac{(\nabla_i H_j)_0 L}{H_0}, \quad (\nabla_i T)_0^* = (\nabla_i T^*)_0 = \frac{L}{T_0}, \\ (\nabla_i v_j)_0^* &= (\nabla_i v_j^*)_0 = \frac{L}{v_0} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Будем считать, что Re_m , $\text{Re}_p \sim O(1)$, Re , $\text{Pe} < O(\varepsilon^2)$, ($\text{Re} = v_0 a \rho / \eta$, $\text{Pe} = v_0 a \rho c_p / \chi$). Система уравнений и граничных условий (1.2)–(1.4) с учетом (1.5), (1.6), (2.1), (2.2) в безразмерном виде с точностью до слагаемых порядка $O(\varepsilon^2)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{v}' &= 0, \quad -\text{Re}_p \nabla_i p' + \varepsilon \text{Re}_m \left(\frac{H^2}{8\pi} \nabla_i \mu^{\circ} - \frac{H^{(e)2}}{8\pi} \nabla_i \mu^{(e)} \right) + \Delta v_i' = 0 \\ \Delta T^{(e)'} &= 0, \quad \Delta T^{(i)'} = 0 \\ \text{div } \mathbf{H}^{(e)'} &= -\varepsilon H^{(e)'} \nabla_i \mu^{(e)} / \mu^{(e)} - (\mu^{(e)})^{-1} \text{div} [\mathbf{H}^{\circ} (\mu^{(e)} - \mu^{\circ})] \\ \text{div} [\mu^{(i)} \mathbf{H}^{(i)'} + (\mathbf{H}_0 + \varepsilon \Gamma_{ij} x_i \mathbf{e}_j) (\mu^{(i)} - \mu_0^{(e)}) - \varepsilon (\partial \mu^{\circ} / \partial T)_0 (\nabla_i T)_0 x_i] &= 0 \\ \text{rot } \mathbf{H}^{(e)'} &= 0, \quad \text{rot } \mathbf{H}^{(i)'} = 0 \\ \mathbf{v}' &= -(\mathbf{v}_0 + \varepsilon (\nabla_i v_j)_0 x_i \mathbf{e}_j), \quad T^{(e)'} = T^{(i)'} \\ \chi^{(e)} \frac{\partial T^{(e)'}}{\partial r} - \chi^{(i)} \frac{\partial T^{(i)'}}{\partial r} &= \varepsilon (\chi^{(i)} - \chi^{(e)}) (\nabla_i T)_0 x_i, \quad \mathbf{H}_{\tau}^{(e)'} = \mathbf{H}_{\tau}^{(i)'} \\ \mu^{(e)} H_n^{(e)'} - \mu^{(i)} H_n^{(i)'} &= (\mu^{(i)} - \mu^{(e)}) (H_{0n} + \varepsilon \Gamma_{ij} x_i n_j), \quad r=1 \\ \mathbf{H}^{(e)'} &\rightarrow 0, \quad T^{(e)'} \rightarrow 0, \quad \mathbf{v}' \rightarrow 0, \quad p' \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (2.3)$$

Для упрощения записи звездочки в обозначениях для безразмерных величин в системе уравнений (2.3) опущены. Далее все величины и уравнения будут записываться в безразмерном виде, кроме специально оговоренных случаев.

3. Распределение напряженности магнитного поля. Решение системы (2.3) будем искать в виде рядов

$$A' = A_{00} + \varepsilon A_1 + O(\varepsilon^2), \quad A' \equiv \mathbf{H}', \quad T', \quad p', \quad \mathbf{v}' \quad (3.1)$$

Распределение температуры определяется из уравнения теплопроводности и граничных условий и имеет вид

$$\begin{aligned} T^{(e)'} &= \varepsilon k_{\chi} (\nabla_i T)_0 \frac{x_i}{r^3} + O(\varepsilon^2), \quad T^{(i)'} = \varepsilon k_{\chi} (\nabla_i T)_0 x_i + O(\varepsilon^2) \\ k_{\chi} &= \frac{\chi^e - \chi^i}{\chi^i + 2\chi^e} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Подставляя формулы (3.2) в уравнения Максвелла и пренебрегая слагаемыми порядка ε^2 , можно получить системы уравнений для нулевого $\mathbf{H}_{00}$ и первого $\mathbf{H}_1$ приближений поля. При записи уравнений для определения напряженности магнитного поля предполагалось, что безразмерная величина $|\nabla \mu^{\circ} / \mu^{\circ}|$ везде в пространстве меньше или порядка единицы. В этом случае из ограниченности функций $(\partial \mu^{(e)} / \partial T)_{T^*}$, $(\partial^2 \mu^{(e)} / \partial T^2)_{T^*}$ и найденного распределения температуры (3.2) следует, что безразмерная величина $|\nabla \mu^{(e)} / \mu^{(e)}|$ также будет везде в пространстве порядка единицы. Решение полученной системы уравнений в нулевом приближении имеет вид

$$\mathbf{H}_{00}^{(i)'} = k_{\mu} \mathbf{H}_0^{(e)}, \quad \Phi_{00}^{(e)} = k_{\mu} H_{0i} \frac{x_i}{r^3}, \quad \mathbf{H}_{00}^{(e)'} = \nabla \Phi_{00}^{(e)}$$

$$k_\mu = \frac{\mu_0^{(e)} - \mu_{00}^{(i)}}{\mu_{00}^{(i)} + 2\mu_0^{(e)}}, \quad \mu_{00}^{(i)} = \mu^{(i)}(T_0, (k_\mu + 1)H_0) \quad (3.3)$$

Значение коэффициента k_μ определяется видом зависимости магнитной проницаемости вещества частицы от напряженности магнитного поля и величиной поля H_0 .

В уравнения для первого приближения $\mathbf{H}_1 = \nabla \varphi_1$ входит невозмущенные распределения поля и температуры везде в пространстве. Представим первое приближение в виде суммы двух слагаемых $\varphi_1 = \varphi_{10} + \varphi_{11}$, первое из которых удовлетворяет системе уравнений Максвелла при замене невозмущенных величин на их значения в начале координат. Уравнение для φ_{10} и его решение во внешней и внутренней области имеют вид

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_{10}^{(e)} &= -H_{00j}^{(e)} \frac{(\nabla_j \mu_0^\circ)_0}{\mu_0^{(e)}} - (H_{00j}^{(e)} + H_{0j}) \frac{1}{\mu_0^{(e)}} \left(\frac{\partial \mu^\circ}{\partial T} \right)_0 \times \\ &\times k_\kappa (\nabla_i T)_0 \left(\frac{\delta_{ij}}{r^3} - \frac{3x_i x_j}{r^5} \right) = f^H(\mathbf{H}_0, \mu_0^{(e)}, (\nabla \mu^\circ)_0, \left(\frac{\partial \mu^\circ}{\partial T} \right)_0) \\ \Delta \varphi_{10}^{(i)} + CH_{0i} H_{0j} \nabla_i \nabla_j \varphi_{10}^{(i)} &= -CH_{0i} H_{0j} \Gamma_{ij} + D \\ D &= \frac{1}{\mu_{00}^{(i)}} H_{0i} (\nabla_i T)_0 \left[\left(\frac{\partial \mu^{(e)}}{\partial T} \right)_0 - \left(\frac{\partial \mu^{(i)}}{\partial T} \right)_{00} \right] (1 + k_\mu) (1 + k_\kappa) - \\ &- \frac{1}{\mu_{00}^{(i)}} \Gamma_{jj} (\mu_{00}^{(i)} - \mu_0^{(e)}), \quad C = \frac{1}{\mu_{00}^{(i)}} (k_\mu + 1) \left(\frac{\partial \mu^{(i)}}{\partial H} \right)_{00} \\ \left(\frac{\partial \mu^{(i)}}{\partial H} \right)_{00} &= \frac{\partial \mu^{(i)}}{\partial H}(T_0, (k_\mu + 1)H_0), \quad \left(\frac{\partial \mu^{(i)}}{\partial T} \right)_{00} = \frac{\partial \mu^{(i)}}{\partial T}(T_0, (k_\mu + 1)H_0) \\ \varphi_{10}^{(e)} &= \frac{b_{ij} x_i x_j}{r^5} + \frac{d}{r^3} + \frac{1}{6} \frac{A_{ij}^H}{r} - \frac{A_{ij}^H x_i x_j}{2r^3} + \frac{B_{ij}^H x_i x_j}{2r^6} \\ \varphi_{10}^{(i)} &= a_{ij} x_i x_j, \quad A_{ij}^H = \frac{k_\mu + k_\kappa}{\mu_0^{(e)}} H_{0i} (\nabla_j \mu^\circ)_0, \\ B_{ij}^H &= -\frac{k_\mu k_\kappa}{\mu_0^{(e)}} H_{0i} (\nabla_j \mu^\circ)_0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Коэффициенты a_{ij} , b_{ij} , d однозначно определяются из граничных условий на поверхности частицы при $r=1$.

Для слагаемого φ_{11} из уравнений Максвелла и уравнения (3.4) получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_{11}^{(e)} &= f^H(\mathbf{H}^\circ, \mu^\circ, \nabla \mu^\circ, \frac{\partial \mu^\circ}{\partial T}) - f^H(\mathbf{H}_0, \mu_0^{(e)}, (\nabla \mu^\circ)_0, \left(\frac{\partial \mu^\circ}{\partial T} \right)_0) = f^H(r) \\ \Delta \varphi_{11}^{(i)} + CH_{0i} H_{0j} \nabla_i \nabla_j \varphi_{11}^{(i)} &= 0 \\ \mu_0^{(e)} \frac{\partial \varphi_{11}^{(e)}}{\partial r} &= \mu_{00}^{(i)} \frac{\partial \varphi_{11}^{(i)}}{\partial r} + (1 + k_\mu) H_{0i} x_i \left(\frac{\partial \mu^{(i)}}{\partial H} \right)_{00} H_{0j} H_{ij}^{(i)}(r=1) \\ \mathbf{H}_{11\tau}^{(e)} &= \mathbf{H}_{11\tau}^{(i)} \quad (r=1), \quad \mathbf{H}_{11}^{(e)} \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Уравнения с граничными условиями (3.5) имеют единственное решение. Вне частицы решение $\varphi_{11}^{(e)}$ записывается в виде суммы частного решения уравнения Пуассона φ_p и общего решения уравнения Лапласа φ_L

$$\varphi_{11} = \varphi_p + \varphi_L, \quad \varphi_L(r) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{i_1 \dots i_n}^H L_{i_1 \dots i_n} + C_0^H \frac{1}{r}$$

$$\varphi_p(r) = \int_V \frac{f_H(\rho)}{|\rho - r|} dV, \quad L_{i_1 \dots i_n} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{i_n}} \left(\frac{1}{r} \right) \quad (3.6)$$

$$dV = \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\psi$$

Интегрирование в формуле для φ_p проводится по всему пространству вне частицы, объем V определяется неравенством $\rho \geq 1$. Общее решение уравнения Лапласа представляет собой ряд из мультиполей $L_{i_1 \dots i_n}$ с коэффициентами $C_{i_1 \dots i_n}^H$. Объемный интеграл в частном решении φ_p сходится, если невозмущенные распределения напряженности магнитного поля и температуры вместе с производными являются ограниченными функциями. При этом для функции f_H справедлива оценка

$$|f_H(\rho)| < c/\rho^3, \quad c = \text{const.}$$

Таким образом, можно найти распределение магнитного поля в форме (3.1) с точностью до членов порядка ϵ^2 . Решение зависит от невозмущенных распределений магнитного поля и температуры.

4. Распределение скорости и давления. Выделим из скорости $\mathbf{v}'$ и давления p' слагаемые $\mathbf{v}_s$ и p_s , которые удовлетворяют следующим уравнениям и граничным условиям:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v}_s + \mathbf{v}^H, \quad p' = p_s + p^H, \quad \text{div } \mathbf{v}_s = 0, \quad -\text{Re}_p \nabla_i p_s + \Delta v_{is} = 0 \quad (4.1)$$

$$\mathbf{v}_s = -\mathbf{v}^0, \quad r=1, \quad p_s \rightarrow 0, \quad \mathbf{v}_s \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty$$

Скорость $\mathbf{v}_s$ и давление p_s соответствуют течению вокруг частицы в отсутствие магнитного поля. Решение системы (4.1) и сила, возникающая от такого течения, известны [7].

Для скорости $\mathbf{v}^H$ и давления p^H из системы уравнений (2.3) с учетом (4.1) получим следующие уравнения и граничные условия:

$$\text{div } \mathbf{v}^H = 0, \quad -\text{Re}_p \nabla_i p^H + \epsilon \text{Re}_m \left(\frac{H^2}{8\pi} \nabla_i \mu^0 - \frac{H^{(e)2}}{8\pi} \nabla_i \mu^{(e)} \right) + \Delta v_i^H = 0$$

$$\mathbf{v}^H = 0, \quad r=1, \quad p^H \rightarrow 0, \quad \mathbf{v}^H \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty \quad (4.2)$$

Решение системы (4.2) ищем в виде ряда ϵ . Из уравнений и граничных условий (4.2) следует, что слагаемые нулевого порядка малости $\mathbf{v}_{00}^H$ и p_{00}^H равны нулю. Так же как это делалось при вычислении распределения магнитного поля, первые приближения для давления p_1^H и скорости $\mathbf{v}_1^H$ представим в виде суммы двух слагаемых $p_1^H = p_{10}^H + p_{11}^H$, $\mathbf{v}_1^H = \mathbf{v}_{10}^H + \mathbf{v}_{11}^H$. Первые слагаемые удовлетворяют системе уравнений, полученной из системы (4.2) заменой невозмущенных величин и их производных их значениями в начале координат. Решение этой системы имеет вид

$$p_{10}^H = -\frac{k_\mu^2}{2} A_{mij} L_{mj} L_i + \frac{k k_\kappa}{44 r^4} A_{mij} L_{mij} + \frac{k_\mu^2 k_\kappa}{6 r^6} A_{mij} (L_m \delta_{ij} + L_j \delta_{im}) -$$

$$-\frac{k_\mu}{10} r^2 A_{mij} L_{mij} - \frac{k_\mu k_\kappa}{2} A_{mij} L_{mi} L_j + M_j L_j + M_{mij} L_{mij}$$

$$\begin{aligned}
v_{10i}^H = & A_{mnj} L_{mnji} \left[\frac{k_\mu^2}{70} (r-1) - \frac{k_\mu^2 k_\kappa}{3080} \left(\frac{1}{r^2} - 1 \right) + \frac{k_\mu}{280} (r^4 - 1) + \frac{k_\mu k_\kappa}{280} (r-1) \right] + \\
& + A_{mni} L_{mn} \left[\frac{k_\mu (2k_\mu - 3k_\kappa)}{28} \left(\frac{1}{r} - 1 \right) + \frac{3k_\mu^2 k_\kappa}{308} \left(\frac{1}{r^4} - 1 \right) + \frac{k_\mu}{7} (r^2 - 1) \right] + \\
& + A_{mi n} L_{mn} \left[\frac{k_\mu (5k_\kappa - k_\mu)}{42} \left(\frac{1}{r} - 1 \right) - \frac{23k_\mu^2 k_\kappa}{2772} \left(\frac{1}{r^4} - 1 \right) - \frac{k_\mu}{21} (r^2 - 1) \right] + \\
& + A_{mjm} L_{ji} \left[-\frac{k_\mu (k_\mu + 2k_\kappa)}{42} \left(\frac{1}{r} - 1 \right) + \frac{k_\mu^2 k_\kappa}{1848} \left(\frac{1}{r^4} - 1 \right) + \frac{2k_\mu}{105} (r^2 - 1) \right] + \\
& + A_{mmj} L_{ji} \left[-\frac{k_\mu (k_\kappa + 4k_\mu)}{42} \left(\frac{1}{r} - 1 \right) - \frac{37k_\mu^2 k_\kappa}{5544} \left(\frac{1}{r^4} - 1 \right) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{k_\mu}{105} (r^2 - 1) + \frac{k_\kappa}{12} (r^2 - 1) \right] + \\
& + A_{mim} \left[\frac{k_\mu (6k_\kappa - k_\mu)}{120} \left(\frac{1}{r^4} - \frac{1}{r} \right) - \frac{2k_\mu^2 k_\kappa}{315} \left(\frac{1}{r^7} - \frac{1}{r} \right) \right] + \\
& + A_{mmi} \left[\frac{k_\mu (7k_\mu - 2k_\kappa)}{120} \left(\frac{1}{r^4} - \frac{1}{r} \right) + \frac{4k_\mu^2 k_\kappa}{315} \left(\frac{1}{r^7} - \frac{1}{r} \right) \right] - \\
& - M_k L_{ki} \frac{r^2 - 1}{6} - M_{mnj} L_{mnji} \frac{r^2 - 1}{14}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}
M_{mnj} = & A_{mnj} \left(\frac{k_\mu^2}{12} + \frac{k_\mu^2 k_\kappa}{396} + \frac{k_\mu}{6} + \frac{k_\mu k_\kappa}{48} \right), \quad A_{mnj} = \frac{H_{0m} H_{0n}}{4\pi} (\nabla_j \mu^\circ)_o \\
M_i = & A_{mim} \left(\frac{3}{5} k_\mu - \frac{k_\mu^2}{80} - \frac{k_\mu^2 k_\kappa}{105} + \frac{3k_\mu k_\kappa}{40} \right) + \\
& + A_{mmi} \left(\frac{k_\kappa}{2} - \frac{k_\mu}{5} + \frac{7k_\mu^2}{80} + \frac{2k_\mu^2 k_\kappa}{105} - \frac{k_\mu k_\kappa}{40} \right)
\end{aligned}$$

Для слагаемых v_{11}^H и p_{11}^H из (4.2) получаем уравнения

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} v_{11}^H = 0, \quad -\operatorname{Re}_p \nabla_i p_{11}^H + f_i + \Delta v_{11i}^H = 0 \\
f_i(r) = \operatorname{Re}_m \left[\frac{H_{00}^{(e)2}}{8\pi} (\nabla_i \mu^\circ - (\nabla_i \mu^\circ)_o) + \frac{H_{00j}^{(e)}}{4\pi} (\nabla_i \mu^\circ H_j^\circ - (\nabla_i \mu^\circ)_o H_{0j}^\circ) \right]
\end{aligned} \tag{4.4}$$

$$v_{11}^H = 0, \quad r=1; \quad p_{11}^H \rightarrow 0, \quad v_{11}^H \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty$$

Применяя операцию дивергенции к уравнению движения (4.4), получим, что давление p_{11}^H удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta p_{11}^H = \frac{1}{\operatorname{Re}_p} \nabla_i f_i = f_p(\mathbf{r}) \tag{4.5}$$

Общее решение уравнения (4.5), стремящееся к нулю на бесконечности, имеет вид

$$p_{11}^H(\mathbf{r}) = \int_V \frac{f_p(\rho)}{|\rho - \mathbf{r}|} dV + \sum_{n=1}^{\infty} C_{i_1 \dots i_n}^p L_{i_1 \dots i_n} + C_0^p \frac{1}{r} \tag{4.6}$$

Здесь $C_0^p, C_{i_1 \dots i_n}^p$ — постоянные коэффициенты.

Подставим выражение (4.6) в уравнение движения (4.4). Видно, что в этом случае каждая компонента скорости v_{11}^H также будет удовлетво-

рять уравнению Пуассона

$$\Delta v_{11i}^H = f_i(\mathbf{r}) + \operatorname{Re}_p \nabla_i p_{11}^H \quad (4.7)$$

Решение уравнения (4.7), удовлетворяющее нулевым граничным условиям на бесконечности, можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} v_{11i}^H(\mathbf{r}) = & \int_V \frac{f_i(\rho)}{|\rho - \mathbf{r}|} dV + \int_V \frac{\Phi_p(\rho)}{|\rho - \mathbf{r}|} dV - \\ & - \operatorname{Re}_p \sum_{n=1}^{\infty} C_{i_1 \dots i_n}^p L_{i_1 \dots i_n} \frac{r^2 - 1}{6 + 4n} - \sum_{n=1}^{\infty} A_{i_1 \dots i_n} L_{i_1 \dots i_n} - A_i \frac{1}{r} \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\Phi_p(\rho) = \operatorname{Re}_p \left[C_0^p \frac{\nabla_i \rho}{\rho^2} + \nabla_i \int_V \frac{f_p(\rho')}{|\rho - \rho'|} dV' \right]$$

Коэффициенты $A_{i_1 \dots i_n}$ находятся из условия равенства нулю выражения (4.8) на границе при $r=1$. Чтобы второй интеграл в формуле (4.8) сходиллся, необходимо выполнение следующего условия:

$$C_0^p = - \int_V f_p(\rho) dV \quad (4.9)$$

Выражение (4.9) имеет смысл, так как сходимость интеграла (4.9) следует из теоремы Остроградского — Гаусса и вида подынтегральной функции $f_p(\rho)$: $\operatorname{Re}_p f_p = \nabla_i f_i$, $|f_i(\rho)| < c/\rho^3$.

Коэффициенты $C_{i_1 \dots i_n}^p$ в формуле (4.8) определяются из уравнения $\operatorname{div} \mathbf{v}_{11}^H = 0$. После вычисления коэффициентов таким образом выражение (4.8) является решением системы (4.4) и удовлетворяет всем граничным условиям.

Выражения (4.6), (4.8) вместе с (4.3) дают распределение скорости и давления в жидкости с точностью до членов порядка ε^2 .

5. Оценка влияния распределения невозмущенных параметров на выражение для силы. В выражение для силы, вычисленное по формуле (1.1), кроме коэффициентов, содержащихся в (3.3), (3.4), (4.3), будут входить интегралы из формул (3.6), (4.6), (4.8), их производные и коэффициенты C_0^H , C_i^p , A_i , которые также выражаются через аналогичные интегралы. Эти интегралы зависят от распределения невозмущенных температуры и магнитного поля во всем пространстве, и их вычисление связано с определенными трудностями. Оценим вклад этих слагаемых в силу. Покажем, что всегда существует такое число $\alpha > 0$, что все интегралы будут меньше или порядка ε^α .

Рассмотрим интегралы следующего вида:

$$\begin{aligned} I_i(\mathbf{e}) = & \int_V |g_i(\mathbf{e}, \rho)| dV, \quad \mathbf{e} = \frac{\mathbf{r}}{r} \\ \{g_i(\mathbf{r}, \rho)\} = & \left\{ f_p(\rho) \frac{1}{|\rho - \mathbf{r}|}, \quad \Phi_p(\rho) \frac{1}{|\rho - \mathbf{r}|}, \quad f_p(\rho) \nabla_r \frac{1}{|\rho - \mathbf{r}|}, \right. \\ & \left. \Phi_p(\rho) \nabla_r \frac{1}{|\rho - \mathbf{r}|}, \quad f_i(\rho) \nabla_r \frac{1}{|\rho - \mathbf{r}|}, \quad f_H(\rho) \nabla_r \frac{1}{|\rho - \mathbf{r}|} \right\} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Здесь ∇_r означает дифференцирование по координатам вектора $\mathbf{r}$.

Поскольку функции $f_H(\rho)$, $f_p(\rho)$, $f_i(\rho)$, $\Phi_p(\rho)$ убывают быстрее, чем $\ln \rho/\rho^3$, интегралы I_i по области $\rho \geq 1/\varepsilon^{2\alpha}$ будут иметь порядок ε^α при любом значении $\alpha > 0$. Определим α_i следующими условиями:

$$\int_{V_i} |g_i(\mathbf{e}, \rho)| dV \leq \varepsilon^{\alpha_i} \quad (5.2)$$

Объем V_i в формуле (5.2) определяется неравенством $1 \leq \rho \leq 1/\varepsilon^{2\alpha_i}$. Для фиксированного i рассмотрим правую и левую части неравенства (5.2) как функции от α_i . Правая часть с ростом α_i от 0 до ∞ монотонно убывает от 1 до 0, так как $\varepsilon < 1$. В то же время левая часть монотонно возрастает от 0 до некоторого значения. При этом существует такое значение α_{i0} , при котором у условия (5.2) достигается равенство. При любых $\alpha < \alpha_{i0}$ неравенство (5.2) справедливо. Поэтому все интегралы I_i имеют порядок ε^α , где α определяется условием $\alpha = \min_i \{\alpha_{i0}\}$.

Формула для силы (размерной), вычисленная без учета слагаемых $\mathbf{H}_{11}^{(e)}$, p_{11}^H , $\mathbf{v}_{11}^H$, определяемых распределением невозмущенных параметров во всем пространстве, имеет вид

$$\begin{aligned} F_i = & 6\pi\eta a v_{0i} + \frac{V_0}{4\pi} \left[\mu_0^{(e)} H_{0j} (\nabla_j H_i)_0 (-3k_\mu) + H_{0i} H_{0j} (\nabla_j \mu^0)_0 \times \right. \\ & \times \left(\frac{3}{5} k_\mu + \frac{9}{40} k_\mu k_\kappa - \frac{3}{80} k_\mu^2 - \frac{1}{35} k_\mu^2 k_\kappa \right) + H_0^2 (\nabla_i \mu^0)_0 \times \\ & \left. \times \left(-\frac{6}{5} k_\mu - \frac{3}{40} k_\mu k_\kappa + \frac{21}{80} k_\mu^2 + \frac{2}{35} k_\mu^2 k_\kappa \right) \right] \end{aligned} \quad (5.3)$$

Здесь $V_0 = 4\pi a^3/3$ — объем частицы.

Учет слагаемых $\mathbf{H}_{11}^{(e)}$, p_{11}^H , $\mathbf{v}_{11}^H$ дает вклад порядка ε^α в выражение для силы (5.3). Поэтому сила, вычисленная по формуле (5.3), отличается от силы, действующей на тело в рассматриваемом случае, на величину порядка $|F| \cdot O(\varepsilon^\beta)$, $\beta = \min \{\alpha, 1\}$. Очевидно, что пользоваться выражением (5.3) можно только в том случае, когда $\varepsilon^\beta \ll 1$, т. е. при достаточно большом α , значение которого определяется распределением невозмущенных частиц параметров во всем пространстве.

В частном случае, рассмотренном в [6], когда проницаемость вещества сферической частицы зависит только от температуры и она много больше магнитной проницаемости жидкости, формула (5.3) существенно отличается от формулы, полученной в [6]. Это связано с тем, что в данной работе в отличие от [6] учитывалось искажение приложенного магнитного поля частицей, что привело к появлению слагаемых в формуле для силы того же порядка, что и остальные.

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1976. 535 с.
2. Гогосов В. В., Налетова В. А., Шапошникова Г. А. Гидродинамика намагничивающихся жидкостей // Итоги науки и техники. Механика жидкости и газа. М.: ВИНТИ, 1981. Т. 16. С. 76–208.
3. Pohl H. A. Some effects on nonuniform fields on dielectrics // J. Appl. Phys. 1958. V. 29. № 8. P. 1182–1188.
4. Curtis R. A. Second order effects in fluidimagnetic buoyancy // Appl. Sci. Res. 1974. V. 29. № 5. P. 342–350.
5. Налетова В. А., Шкель И. А. Сила, действующая на тело со стороны магнитной жидкости в неоднородном магнитном поле // Магнит. гидродинамика. 1987. № 2. С. 67–70.
6. Мирошников В. А. Термофорез ферросuspензий в магнитном поле // Гидродинамика и теплофизика магнитных жидкостей. Юрмала, 1980: Тез. докл. Саласпилс: Ин-т физики АН ЛатвССР, 1980. С. 177–182.
7. Ламб Г. Гидродинамика: Пер. с англ. М.—Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.

Москва

Поступила в редакцию
29.1.1988