

УДК 532.527:532.542

ВИХРЕВЫЕ СТРУКТУРЫ В СДВИГОВЫХ ТЕЧЕНИЯХ

ГОНЧАРОВ В. П.

Изучаются крупномасштабные вихревые структуры в течениях со сдвигом. Предложен эффективный метод описания этих объектов, позволяющий выйти за рамки слабой нелинейности, что особенно важно при изучении пространственно изолированных структур. Получены уравнения эволюционного типа, описывающие форму вихревых структур, и рассмотрены их стационарные решения. Проведена детальная классификация структур в плоском и цилиндрическом канале. Обращается внимание на качественное сходство некоторых из них с хорошо известными структурами в реальных турбулентных течениях (пристеночными вихрями, турбулентными сгустками или «пробками»). Установлено, что уединенные вихревые структуры в трубе достаточно большого радиуса по сравнению с их поперечным размером близки по своим кинематическим характеристикам к вихрям Хилла. Обсуждаются перспективы метода.

1. Общая постановка задачи и формулировка уравнений движений.

В последнее время особый интерес представляет изучение вихревых структур — долгоживущих регулярных образований, играющих существенную роль в переносе импульса, массы, энергии [1–6]. Для таких объектов, обнаруживающихся во многих типах гидродинамических течений, характерно разнообразие механизмов образования. Они могут быть обусловлены различными факторами или их комбинацией — сдвигом, расслоенностью по плотности, вязкостью, теплопроводностью — в сочетании с нелинейностью. Именно сильная нелинейность наиболее общая и главная черта, которая особенно отчетливо проявляется при образовании пространственно изолированных вихревых структур.

Данная работа посвящена изучению крупномасштабных вихревых структур в сдвиговом течении несжимаемой однородной идеальной жидкости в пренебрежении всеми другими факторами. Такая идеализация оправдана во многих реальных течениях, в том числе и турбулентных, при рассмотрении достаточно крупномасштабных структур, когда характерный их масштаб велик по сравнению с масштабом турбулентных пульсаций, а непосредственным влиянием вязкости можно пренебречь. В таких эффективно невязких и нетурбулентных моделях учет влияния вязкости и турбулентности на структуры может осуществляться косвенно через среднее течение, если на его формировании сказываются эти эффекты (например, образование погранслоя или уплощение турбулентного профиля скорости в трубе).

Предположение о крупномасштабности позволяет сделать ряд принципиальных упрощений. Во-первых, ограничиваясь изучением двумерных течений, можно заменить среду с непрерывным профилем скорости послойной моделью, в которой аппроксимирующий профиль скорости таков, что каждый слой имеет постоянную завихренность. Такая замена оправдана слабой чувствительностью крупномасштабных движений к тонкой структуре профиля. Это позволяет надеяться, что даже при грубой аппроксимации небольшим числом слоев, отражающей лишь общую структуру реального профиля, такие модели качественно верно ухватывают крупномасштабную динамику. Во-вторых, послойные модели дают возможность сформулировать динамику в рамках пространственно одномерных интегро-

дифференциальных нелинейных уравнений в терминах границ раздела, определяющих контуры вихревых структур.

Для вывода уравнений контурной динамики весьма удобно гамильтоново описание, в рамках которого легко не только оценить степень универсальности того или иного приближения, но и свести к минимуму технические усилия при решении конкретной задачи. Действительно, при таком подходе объектом для аппроксимационных процедур являются не уравнения, которых может быть много, а одна единственная величина — гамильтониан. Поэтому вычисления не тиражируются по числу уравнений. Кроме того, оказывается возможным выйти за пределы слабой нелинейности. Необходимая аппроксимационная процедура определяется параметром ε — отношением поперечного размера возмущений к горизонтальному. Если $\varepsilon \ll 1$, используются степенные разложения по ε . При этом в каждом порядке теории возмущений нелинейность учитывается точно. Этот же результат достигается и при $\varepsilon \geq 1$ с той лишь разницей, что следует использовать полиномиальные или рациональные аппроксимации, имеющие необходимую степень точности.

В зависимости от симметрии задачи (плоской, осевой и т. д.) двумерные движения несжимаемой жидкости удобно изучать в соответствующей системе ортогональных криволинейных координат x_1, x_2, x_3 . Без ограничения общности будем считать, что движение зависит только от двух из них, x_1, x_2 , причем координатные линии x_1 совпадают с линиями тока невозмущенной стационарной задачи. Для рассмотренного здесь широкого класса послойных моделей геометрические свойства пространства, связанного с такой системой координат, характеризуются компонентами метрического тензора g_{11}, g_{22}, g_{33} и его определителем g и считаются так же, как профиль невозмущенного течения, не зависящими от x_1 . Это означает, что в режиме равновесия послойно равновзавихренная модель представляет собой совокупность слоев с границами раздела $x_2 = l_i$, а невозмущенная функция тока ψ_i° , соответствующая непрерывному профилю скорости течения, послойно определяется из условий

$$\partial_2 g_{11} g^{-1/2} \partial_2 \psi_i^\circ = g^{1/2} \omega_i$$

$$[\psi_{i+1} - \psi_i^\circ]_{x_2=l_i} = 0, \quad [\partial_2(\psi_{i+1} - \psi_i^\circ)]_{x_2=l_i} = 0 \quad (1.1)$$

Здесь ω_i — контравариантная завихренность двумерного криволинейного течения в i -м слое, который заключен между i -й и $(i-1)$ -й границами раздела. Во избежание недоразумения отметим, что величина ω_i , называемая далее просто завихренностью, отличается от обычной физической завихренности $\Omega_i = \omega_i g^{1/2} (g_{11} g_{22})^{-1/2}$ и совпадает с ней только в случаях, когда $g = g_{11} g_{22}$. Фундаментальность понятия контравариантной завихренности проявляется при ковариантном обобщении метода контурной динамики, позволяющего свести двумерную динамику областей с постоянными ω_i к динамике границ, снизив, таким образом, размерность задачи на единицу.

Для рассмотренной выше послойной модели сформулируем уравнения движения границ в гамильтоновой форме. Воспользуемся результатом [7], полагая, что проскальзывание на границах отсутствует. В этом частном случае движение при каждом фиксированном i описывается не двумя, а только одним уравнением (ср. с [7])

$$\kappa_i = -\frac{1}{v_i} \partial_1 \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \kappa_i}, \quad v_i = \omega_i - \omega_{i+1} \quad (1.2)$$

$$\kappa_i = \int_0^{x_1} g^{1/2} dx_2 \quad (1.3)$$

Здесь $\mathcal{H}$ — гамильтониан, совпадающий с кинетической энергией среды, а κ_i — «каноническая» переменная задачи, зависящая от геометрии течения и формы границы η_i .

Существует две возможности точного определения $\mathcal{H}$ в терминах η_i , а следовательно, и в терминах κ_i , не прибегая к традиционному приближению слабой нелинейности. Обе возможности связаны с различными подходами к решению краевой задачи для определения возмущений функции тока ψ_i

$$(\partial_1 g_{22} g^{-1/2} \partial_1 + \partial_2 g_{11} g^{-1/2} \partial_2) \psi_i = 0 \quad (1.4)$$

$$[\psi_{i+1} - \psi_i]_{x_2=\eta_i} = [\psi_i^\circ - \psi_{i+1}^\circ]_{x_2=\eta_i} \quad (1.5)$$

$$[\partial_1 (\psi_{i+1} - \psi_i)]_{x_2=\eta_i} = 0 \quad (1.6)$$

где (1.5), (1.6) представляют собой условия непрерывности скорости, к которым следует добавить условия отсутствия нормальных составляющих скорости на внешних твердых границах $x_2=L_0$, $x_2=L_N$ ($L_0 < L_N$) N -слоистой среды

$$\psi_i|_{x_2=L_0} = \psi_N|_{x_2=L_N} = 0 \quad (1.7)$$

В конечном счете оба способа — и метод функции Грина, и метод псевдодифференциальных операторов, о которых идет речь, эквивалентны. При этом взаимно однозначное соответствие между псевдодифференциальными операторами и интегральными преобразованиями позволяет, получив результат на одном языке, легко переформулировать его на другой.

Построение гамильтониана проведем в рамках метода псевдодифференциальных операторов [8] в три этапа. На первом общее решение (1.4) представим в виде

$$\psi_i = F_1(x_2, \Gamma) A_i + F_2(x_2, \Gamma) B_i, \quad \Gamma = \partial_1 H \quad (1.8)$$

$$Hf = \frac{1}{\pi} \int \frac{f(x) dx}{x - x_1} \quad (1.9)$$

где Γ — оператор, осуществляющий преобразование Гильберта H с последующим дифференцированием по x_1 , а A_i , B_i — некоторые функции x_1 .

Так как действие псевдодифференциального оператора $F(x_2, \Gamma)$ эквивалентно интегральному преобразованию

$$F(x_2, \Gamma) f = \frac{1}{2\pi} \int e^{ik(x-x_1)} F(x_2, |k|) f(x) dk dx \quad (1.10)$$

и однозначно определяется функцией $F(x_2, |k|)$ — символом псевдодифференциального оператора, прямой подстановкой (1.10) в (1.4) найдем, что символы операторов F_1 и F_2 , фигурирующих в (1.8), являются линейно-независимыми решениями уравнения

$$(\partial_2 g_{11} g^{-1/2} \partial_2 - k^2 g_{22} g^{-1/2}) F = 0 \quad (1.11)$$

Определение F_1 и F_2 — отправной пункт для последующих этапов.

На втором этапе, подставляя (1.8) в краевые условия (1.5)–(1.7), получим систему уравнений для определения функций A_i , B_i

$$F_1(\eta_i, \Gamma) [A_{i+1} - A_i] + F_2(\eta_i, \Gamma) [B_{i+1} - B_i] = [\psi_i^\circ - \psi_{i+1}^\circ]_{x_2=\eta_i}$$

$$F_1(\eta_i, \Gamma) \partial_1 [A_{i+1} - A_i] + F_2(\eta_i, \Gamma) \partial_2 [B_{i+1} - B_i] = 0$$

$$F_1(L_0, \Gamma) A_1 + F_2(L_0, \Gamma) B_1 = 0, \quad F_1(L_N, \Gamma) A_N + F_2(L_N, \Gamma) B_N = 0 \quad (1.12)$$

В связи с появлением исчисления функций от некоммутирующих операторов Γ и $\eta_i(x_1)$, будем придерживаться следующего правила упорядо-

чивания этих операторов: операторы действуют в порядке записи справа налево. Такое правило позволит в дальнейшем различать сопряженные операторные выражения $F(\eta_i, \Gamma)$ и $F(\Gamma, \eta_i)$, действие которых эквивалентно разным интегральным преобразованиям [8]

$$\begin{aligned} F(\eta_i, \Gamma)f &= \frac{1}{2\pi} \int e^{ik(x-x_i)} F(\eta_i(x_i), |k|) f(x) dk dx \\ F(\Gamma, \eta_i)f &= \frac{1}{2\pi} \int e^{ik(x-x_i)} F(\eta_i(x), |k|) f(x) dk dx \end{aligned} \quad (1.13)$$

Прежде чем предъявить решение системы (1.12), которое находится стандартными методами исчисления некоммутирующих операторов [8], введем с помощью F_1, F_2 символы следующих операторов:

$$\begin{aligned} D(|k|) &= g_{11} g^{-1/2} (F_2 \partial_2 F_1 - F_1 \partial_2 F_2), \quad F_{1,2}^\circ = F_{1,2}|_{x_2=L_0} \\ F_{1,2}^N &= F_{1,2}|_{x_2=L_N} \quad P = F_2^N F_1^\circ - F_1^N F_2^\circ, \\ S_{1,2} &= \int_0^{x_2} g^{1/2} F_{1,2}(x, |k|) dx \end{aligned} \quad (1.14)$$

Здесь все символы, за исключением $S_{1,2}$, не зависят от x_2 . Введем обозначения

$$\begin{aligned} S_{1,2}^i &= S_{1,2}(\eta_i, \Gamma) - S_{1,2}(l_i, \Gamma), \quad S_{1,2}^{\cdot i} = S_{1,2}(\Gamma, \eta_i) - S_{1,2}(l_i, \Gamma) \\ U_0^i &= v_i (S_1^i F_2^\circ - S_2^i F_1^\circ), \quad U_N^i = v_i (S_1^i F_2^N - S_2^i F_1^N) \\ U_0^{i+} &= v_i (F_2^\circ S_1^{i+} - F_1^\circ S_2^{i+}), \quad U_N^{i+} = v_i (F_2^N S_1^{i+} - F_1^N S_2^{i+}) \end{aligned} \quad (1.15)$$

позволяющие по индексу i и отсутствию или присутствию знака сопряжения «плюс» однозначно сопоставить одному и тому же символу соответствующие операторы в смысле формул (1.13). Тогда в обозначениях (1.14), (1.15) решения для A_i и B_i примут вид

$$\begin{aligned} A_i &= -\frac{1}{PD} \sum_{n=1}^{N-1} [\theta(n-i) F_2^\circ U_N^{n+} + \theta(i-1-n) F_2^N U_0^{n+}] \\ B_i &= \frac{1}{PD} \sum_{n=1}^{N-1} [\theta(n-i) F_1^\circ U_N^{n+} + \theta(i-1-n) F_1^N U_0^{n+}] \end{aligned} \quad (1.16)$$

Здесь $\theta(m)$ — функция Хевисайда, которая равна единице при $m \geq 0$ и нулю при $m < 0$.

Зная, что гамильтониан $\mathcal{H}$ совпадает с кинетической энергией и, следовательно, в терминах полной функции тока $\Psi_i = \psi_i^\circ + \psi_i$ имеет вид

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int dx_1 dx_2 g^{-1/2} \sum_{i=1}^N [\theta(\eta_i - x_2) - \theta(\eta_{i-1} - x_2)] [g_{11} (\partial_2 \Psi_i)^2 + g_{22} (\partial_1 \Psi_i)^2]$$

($\eta_0 = L_0, \eta_N = L_N$), с помощью (1.8), (1.16) в принятых обозначениях окончательно найдем

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \int dx_1 \left(\sum_{n=1}^{N-1} \left[v_n \int_0^{\eta_n} g^{1/2} (\psi_{n+1}^\circ + \psi_n^\circ) dx_2 + \right. \right.$$

$$+2 \frac{\gamma_0}{P} U_N^{n+} - 2 \frac{\gamma_N}{P} U_0^{n+} \Big] - \sum_{i,n=1}^{N-1} U_0^n \frac{\sigma_{in}}{PD} U_N^{i+} \Big) \quad (1.17)$$

$$\gamma_0 = \psi_1^0|_{x_2=L_0}, \quad \gamma_N = \psi_N^0|_{x_2=L_N}, \quad \sigma_{in} = \theta(i-n) - \theta(i-1-n)$$

2. Конкретные модели. *Плоскопараллельная модель.* Соответствующая система координат — декартова: $x_1=x$, $x_2=z$, $x_3=y$, $g_{11}=g_{22}=g_{33}=g=1$. Согласно п. 1 получаем следующие выражения для равновесной функции тока ψ_i^0 , «канонической» переменной $\varkappa_i$ и операторов, через которые выражается гамильтониан,

$$\begin{aligned} \psi_i^0 &= \omega_i z^2/2 + \alpha_i z + \sigma_i, & \alpha_{i+1} - \alpha_i &= \nu_i l_i \\ \sigma_{i+1} - \sigma_i &= -\nu_i l_i^2/2, & \varkappa_i &= \eta_i \\ F_1 &= e^{-z\Gamma}, & F_2 &= e^{z\Gamma}, & D &= -2\Gamma, & P &= 2 \operatorname{sh}(L_N - L_0)\Gamma \\ S_1 &= (1 - e^{-z\Gamma}) \frac{1}{\Gamma}, & S_2 &= (1 - e^{z\Gamma}) \frac{1}{\Gamma} \end{aligned} \quad (2.1)$$

В результате с точностью до линейных по η_i членов, которые могут быть опущены, по формуле (1.17) получим

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= -\frac{1}{2} \int dx_1 \left\{ \sum_{n=1}^{N-1} \nu_n \left[\frac{\omega_{n+1} + \omega_n}{3!} \eta_n^3 + (\omega_1 L_0^2/2 + 2\alpha_1 L_0 - \omega_N L_N^2/2 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2\alpha_N L_N) \eta_n^2 \right] + \sum_{n,i=1}^{N-1} [\operatorname{ch} L_0 \Gamma - \operatorname{ch}(L_0 - \eta_i) \Gamma] \frac{\nu_n \nu_i}{\Gamma^3 \operatorname{sh}(L_N - L_0) \Gamma} \times \right. \\ &\quad \left. \times [\operatorname{ch} L_N \Gamma - \operatorname{ch} \Gamma(L_N - \eta_n)] \right\} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Плоская кольцевая модель. Естественная для такой модели система координат — полярная: $x_1=\varphi$, $x_2=\rho$, $x_3=y$, $g_{11}=g=\rho^2$, $g_{22}=1$. В состоянии равновесия течение разбито границами раздела $\rho=l_i$ на концентрические кольцевые слои и характеризуется функциями тока

$$\begin{aligned} \psi_i^0 &= \omega_i \rho^2/4 + \alpha_i \ln(\rho/R) + \sigma_i \\ \alpha_{i+1} - \alpha_i &= \nu_i l_i^2/2, & \sigma_{i+1} - \sigma_i &= \nu_i l_i^2 (1 - 2 \ln(l_i/R))/4 \end{aligned}$$

где R — произвольная, но фиксированная величина размерности ρ . «Каноническая» переменная задачи, которая определяется согласно (1.3), и операторы, необходимые для построения гамильтониана, имеют вид

$$\begin{aligned} \varkappa_i &= \int_0^{\eta_i} \rho \, d\rho = \eta_i^2/2 \\ F_1 &= e^{-\beta\Gamma}, & F_2 &= e^{\beta\Gamma}, & D &= -2\Gamma, & P &= 2 \operatorname{sh}(\Gamma \ln(L_N/L_0)) \\ S_1 &= \rho^2 e^{-\beta\Gamma} \frac{1}{2-\Gamma}, & S_2 &= \rho^2 e^{\beta\Gamma} \frac{1}{2+\Gamma}, & \beta &= \ln \frac{\rho}{R} \end{aligned}$$

Необходимо учесть, что, поскольку полярный угол φ — циклическая координата, формула (1.9) для преобразования Гильберта, которое содержится в операторе $\Gamma = \partial_\varphi H$, должна быть заменена на

$$Hf = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi') \operatorname{ctg} \frac{\varphi' - \varphi}{2} d\varphi'$$

Осесимметричная модель. Осесимметричные движения жидкости естественно рассматривать в цилиндрической системе координат: $x_1=x$, $x_2=\rho$, $x_3=\varphi$, $g_{11}=g_{22}=1$, $g_{33}=g=\rho^2$. В соответствии с (1.1) для такой модели равновесная функция тока ψ_i° , «каноническая» переменная κ_i и операторы, через которые выражается гамильтониан, определяются выражениями

$$\begin{aligned}\psi_i^\circ &= \omega_i \rho^4 / 8 + \alpha_i \rho^2 + \sigma_i, & \alpha_{i+1} - \alpha_i &= v_i l_i^2 / 4 \\ \sigma_{i+1} - \sigma_i &= -v_i l_i^4 / 8, & \kappa_i &= \int_0^{\eta_i} \rho \, d\rho = \frac{1}{2} \eta_i^2 \\ F_1 &= \rho I_1(\rho \Gamma), & F_2 &= \rho K_1(\rho \Gamma), & D &= 1 \\ P &= L_N L_0 [K_1(L_N \Gamma) I_1(L_0 \Gamma) - K_1(L_0 \Gamma) I_1(L_N \Gamma)] \\ S_1 &= \rho^2 I_2(\rho \Gamma) \frac{1}{\Gamma}, & S_2 &= - \left[\rho^2 K_2(\rho \Gamma) - \frac{2}{\Gamma^2} \right] \frac{1}{\Gamma}\end{aligned}\quad (2.3)$$

где $I_{1,2}$ — модифицированные функции Бесселя, а $K_{1,2}$ — функции Макдональда.

Кольцевые модели на сфере. Изучение двумерных движений на сфере удобно проводить в сферической системе координат: $x_1=\varphi$, $x_2=\vartheta$, $x_3=1$, $g_{22}=1$, $g_{11}=g=\sin^2 \vartheta$, полагая без ограничения общности радиус сферы равным единице. В состоянии равновесия невозмущенные границы раздела $\vartheta=l_i$ ($0 < \vartheta < \pi$) разбивают сферу на равнозавихренные слои так, что соответствующая равновесная функция тока определяется формулами

$$\begin{aligned}\psi_i^\circ &= -\omega_i \ln \sin \vartheta + \alpha_i \ln |\operatorname{tg}(\vartheta/2)| + \sigma_i \\ \alpha_{i+1} - \alpha_i &= -v_i \cos l_i, & \sigma_{i+1} - \sigma_i &= -v_i [\ln \sin l_i - (\cos l_i) \ln |\operatorname{tg}(l_i/2)|]\end{aligned}$$

«Каноническая» переменная модели κ_i и операторы $F_{1,2}$ согласно п. 1 определяются выражениями

$$\kappa_i = \int_0^{\eta_i} \sin \vartheta \, d\vartheta = 1 - \cos \eta_i, \quad (2.4)$$

$$F_1 = e^{-\Gamma \ln \operatorname{tg}(\vartheta/2)}, \quad F_2 = e^{\Gamma \ln \operatorname{tg}(\vartheta/2)} \quad (2.5)$$

Остальные операторы и величины, необходимые для построения гамильтониана, вычисляются по формулам (1.14), (1.15).

3. Вихревые структуры. Изучим образование структур в простейших сдвиговых течениях и продемонстрируем (в рамках послойных моделей) возможность существования решений, описывающих достаточно сильные модуляции равнозавихренных слоев. Как будет показано ниже, эффект модуляции имеет множество режимов, и в том числе может приводить к образованию уединенных областей завихренности определенной формы и скорости распространения.

Хорошо известно, что ламинарное течение вязкой жидкости в круглой трубе при постоянном градиенте давления характеризуется параболическим профилем скорости [9]. С точки зрения осесимметричных послойных моделей, рассмотренных в п. 2, такое течение представляет однородный вихревой цилиндрический слой, неспособный эволюционировать, поскольку его граница фиксирована жесткой стенкой трубы. Ситуация меняется, как только течение становится турбулентным и происходит уплощение среднего профиля. В первом приближении этот эффект можно попытаться описать в рамках двуслойной модели с помощью бипараболического профиля для скорости равновесного течения

$$v = \begin{cases} \frac{1}{2} \omega_2 (a^2 - \rho^2), & l \leq \rho \leq a \\ \frac{1}{2} \omega_1 (l^2 - \rho^2) + \frac{1}{2} \omega_2 (a^2 - l^2), & 0 \leq \rho < l \end{cases} \quad (3.1)$$

где a — радиус трубы. В отличие от однослойной, двухслойная модель оказывается динамически невырождена в смысле образования вихревых структур. Гамильтониан такой модели строится по формулам (2.3) и (4.17)

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \int dx \left\{ \frac{v_1}{2} \left[\frac{\omega_1 + \omega_2}{4!} \eta_1^6 - \frac{2a^4 \omega_2 + l^4 v_1}{8a^2} \eta_1^4 \right] + v_1^2 \eta_1^2 I_2(\eta_1 \Gamma) \Gamma^{-2} \left[\frac{K_1(a\Gamma)}{I_1(a\Gamma)} I_2(\Gamma \eta_1) + K_2(\Gamma \eta_1) - 2\Gamma^{-2} \eta_1^{-2} \right] \eta_1^2 \right\}. \quad (3.2)$$

Удобно ввести безразмерные переменные $q = (\eta_1/a)^2$, $\xi = x/a$, $p = (l/a)^2$, $\tau = -av_1 t/8$, в которых уравнение движения (1.2) принимает вид

$$q_\tau = -\partial_\xi \delta E / \delta q, \quad E = -32a^{-7} v_1^{-2} \mathcal{H} \quad (3.3)$$

Используя степенные разложения для модифицированных функций Бесселя и функций Макдональда и ограничиваясь учетом членов до второго порядка по η_{1x} , что соответствует рассмотрению достаточно крупномасштабных возмущений, получим

$$E = \frac{1}{2} \int d\xi [q^2(q-1-\ln q)q_\xi^2 + q^4 + \alpha_3 q^3 + \alpha_2 q^2] \quad (3.4)$$

$$\alpha_3 = -2 \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_1 - \omega_2} \right), \quad \alpha_2 = -2 \left(2p^2 + \frac{3\omega_2}{\omega_1 - \omega_2} \right)$$

Структура безразмерного гамильтониана (3.4) оказывается достаточно универсальной. Тот же качественный характер обнаруживают симметричные крупномасштабные возмущения в математически более простой плоской модели с невозмущенным профилем скорости

$$v = \omega_2(h-z), \quad l \leq z \leq h; \quad v = \omega_1(l-z) + \omega_2(h-l), \quad 0 \leq z \leq l \\ v = \omega_1(l+z) + \omega_2(h-l), \quad -l \leq z \leq 0; \quad v = \omega_2(h+z), \quad -h \leq z \leq -l$$

Эту модель можно рассматривать как четырехслойную аппроксимацию плоского течения Пуазейля [9] в канале шириной $2h$. Используя результаты п. 2 (см. формулы (2.1)–(2.2)), нетрудно показать, что симметричные возмущения ($\eta_2 = 0$, $\eta_1 = -\eta_3$) данной модели в безразмерных переменных $q = \eta_1/h = -\eta_3/h$, $\xi = x/h$, $p = l/h$, $\tau = -v_1 t/4$ описываются тем же уравнением (3.3) с близким к (3.4) гамильтонианом $E = -2h^{-4} v_1^{-2} \mathcal{H}$

$$E = \frac{1}{2} \int d\xi \left[\frac{4}{3} q^2(1-q)^2 q_\xi^2 + q^4 + \alpha_3 q^3 + \alpha_2 q^2 \right] \quad (3.5)$$

Будем искать стационарные решения вида $q(z)$, где $z = \xi - c\tau$, а c — скорость распространения. В этом случае уравнение (3.3) с гамильтонианом (3.5) интегрируется и приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{4}{3} q^2(1-q)^2 q_z^2 = q^4 + \alpha_3 q^3 + (\alpha_2 - c) q^2 + \alpha_1 q + \alpha_0 = \\ = (q - q_1)(q - q_2)(q - q_3)(q - q_4) \quad (3.6)$$

Здесь α_1 , α_0 — константы интегрирования, а q_i ($i=1, 2, 3, 4$) — корни полинома четвертого порядка, для которых

$$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = -\alpha_3 \quad (3.7)$$

$$q_1 q_2 + q_1 q_3 + q_2 q_3 + q_1 q_4 + q_2 q_4 + q_3 q_4 = \alpha_2 - c$$

Как показывает предварительный анализ, существование имеющих физический смысл решений уравнения (3.6) возможно, только если все корни q_i действительны и удовлетворяют неравенству $q_1 \leq q_2 < q_3 \leq q_4$,

причем q_2, q_3 , задающие границы изменения решения, лежат в интервале между нулем и единицей. Кроме того, учитывая характер приближения, необходимо ограничиться достаточно гладкими решениями $|q_z| \leq 1$.

Рассмотрим вначале случай, когда все корни различны и $0 < q_2 < q_3 < 1$. Соответствующие решения уравнения (3.6) в этом случае имеют осциллирующий характер и выражаются через эллиптические функции. Вследствие условия несжимаемости справедливо равенство

$$\int_{q_2}^{q_3} \frac{p-q}{q_z} dq = 0 \quad (3.8)$$

которое в совокупности с (3.7) в принципе позволяет выразить скорость s как функцию параметров $p, \omega_1, \omega_2, q_2, q_3$.

В случае кратных корней возможны следующие варианты: 1) $p=q_1=q_2 < q_3 < q_4, q_3 < 1$; 2) $q_1 < q_2 < q_3=q_4=p, q_2 > 0$; 3) $0 < q_1=q_2 < q_3=q_4 < 1, p=(q_2+q_3)/2$. Форма соответствующих возмущений описывается выражениями

$$|z| = \frac{2}{\sqrt{3}} \left\{ (q_3-q)^{1/2} (q_4-q)^{1/2} + (2+\alpha_3) \ln [(q_3-q)^{1/2} + (q_4-q)^{1/2}] - \frac{p(1-p)}{(q_3-p)^{1/2} (q_4-p)^{1/2}} \ln \left[\frac{((q_4-q)^{1/2} (q_3-q)^{1/2} - (q_4-p)^{1/2} (q_3-p)^{1/2})^2}{(q-p)(q_4-q_3)} \right] \right\} \quad (3.9)$$

$$|z| = \frac{2}{\sqrt{3}} \left\{ (q-q_1)^{1/2} (q-q_2)^{1/2} - (2+\alpha_3) \ln [(q-q_1)^{1/2} + (q-q_2)^{1/2}] - \frac{p(1-p)}{(p-q_1)^{1/2} (p-q_2)^{1/2}} \ln \left[\frac{((q-q_1)^{1/2} (q-q_2)^{1/2} - (p-q_1)^{1/2} (p-q_2)^{1/2})^2}{(p-q)(q_2-q_1)} \right] \right\} \quad (3.10)$$

$$z = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \left\{ \frac{q_2(1-q_2)}{q_2-q_3} \ln \left(2 \frac{q-q_2}{q_3-q_2} \right) - \frac{q_3(1-q_3)}{q_2-q_3} \ln \left(2 \frac{q_3-q}{q_3-q_2} \right) + q - \frac{1}{2}(q_2+q_3) \right\} \quad (3.11)$$

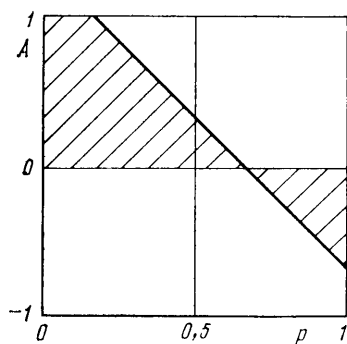
Первый вариант (3.9) соответствует возмущениям типа уединенной волны положительной полярности с амплитудой $A=q_3-p>0$, второй (3.10) — отрицательной полярности с амплитудой $A=q_2-p<0$, причем оба решения при $|z| \rightarrow \infty$ выходят на асимптотику невозмущенной задачи $q=p$. Можно показать, что область значений A и p , в которой реализуются решения данного типа, заключена между прямыми $A=0$ и $A=-2p-\alpha_3/2$. На фиг. 1 эта область изображена для случая $\omega_1=0$ и отмечена штриховкой. Последний третий вариант (3.11) представляет собой решение типа ударной волны.

Отдельно обсудим случаи, соответствующие парному слиянию корней в точках $q=0,1$. В принципе соответствующие решения могут быть получены предельным переходом $p \rightarrow 0$ из решения (3.9); $p \rightarrow 1$ из (3.10); и $q_2 \rightarrow 0, q_3 \rightarrow 1$ из (3.11). Однако полученные таким образом решения носят частный характер. Чтобы найти общее решение, например, для $q_1=q_2=0$, запишем уравнение (3.6) в виде

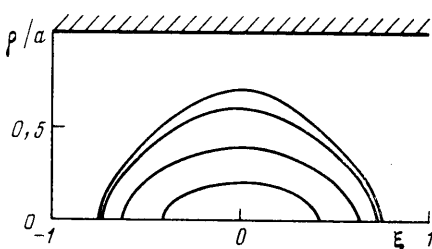
$$q^2 [{}^{4/3}(q-1)^2 q_z^2 - (q-q_3)(q-q_4)] = 0 \quad (3.12)$$

Из (3.12) следует, что общее решение представляет собой кусочно-непрерывную функцию, склеенную из $q=0$ и решения уравнения

$$q_z^2 = {}^{3/4}(1-q)^{-2}(q-q_3)(q-q_4) \quad (3.13)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

чередующихся произвольным образом. Такое решение описывает произвольную последовательность изолированных дипольных вихревых структур. Форма каждой структуры определяется уравнением (3.13), симметрична относительно оси канала и напоминает «кошачий глаз».

Аналогично рассматриваются остальные случаи: $q_3 = q_4 = 1$, $q_2 > 0$, что соответствует пристеночным уединенным вихрям, и $q_3 = q_4 = 1$, $q_1 = q_2 = 0$. В последнем самом простом случае уравнение (3.9) имеет решения

$$q=0, \quad q=1, \quad q=\pm 2/\sqrt{3}z + \text{const} \quad (3.14)$$

Из этого набора могут быть построены вихревые структуры дипольного типа, которые занимают все поперечное сечение канала и согласно (3.7) имеют завихренность, противоположную завихренности основного потока $\omega_1 = -\omega_2$. В рамках решений (3.14) можно построить одиночную структуру, по форме напоминающую «пробку». Отметим, что похожие в качественном отношении объекты (турбулентные сгустки) реально наблюдаются в турбулентном течении жидкости в трубе [3] при числах Рейнольдса больших 3200.

Подобным образом можно расклассифицировать и проанализировать решения для цилиндрической модели (3.4) с бипараболическим профилем течения (3.1). Вихревые структуры тороидального типа, образующиеся на этом течении описываются уравнением

$$q^2(q-1-\ln q)qz^2 = q^4 + \alpha_3 q^3 + (\alpha_2 - c)q^2 + \alpha_1 q + \alpha_0 \quad (3.15)$$

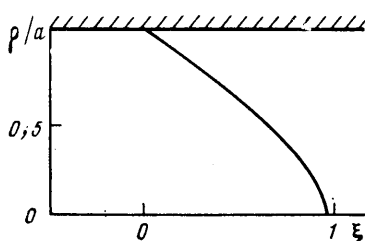
При прочих равных условиях (3.15) отличается от (3.6) только левой частью, которая имеет существенно иной характер поведения при $q \rightarrow 0$. Так как это отличие наиболее сильно проявляется для решений, включающих нулевую точку в область изменения q , то достаточно рассмотреть (3.15) при $q_1 = q_2 = 0$. В этом случае (3.15) расщепляется, и общее решение может быть получено кусочно-непрерывной склейкой решений двух уравнений

$$q=0, \quad qz^2 = (q-q_3)(q-q_4)/(q-1-\ln q) \quad (3.16)$$

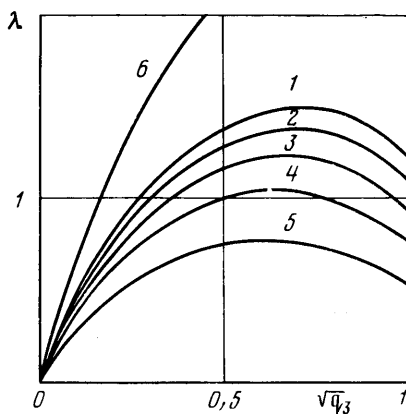
Если, кроме того, $q_3 = q_4 = 1$, то общее решение комбинируется уже из решений трех уравнений

$$q=0, \quad q=1, \quad qz^2 = (1-q)^2/(q-1-\ln q) \quad (3.17)$$

Соответствующие вихревые структуры приведены на фиг. 2 и 3. Фиг. 2 демонстрирует изменение формы структуры (3.16) в зависимости от значения безразмерного амплитудного параметра $q_3^{1/2}$ при фиксированном значении параметра $\omega_1/\omega_2 = 0$. Зависимость горизонтального размера λ от поперечного $q_3^{1/2}$ для различных значений ω_1/ω_2 представлена на фиг. 4 ($\omega_1/\omega_2 = 0; 0.2; 0.4; 0.6; 0.8; \infty$ — кривые 1–6 соответственно). На фиг. 3 изображена структура (3.17) типа одиночной «пробки».



Фиг. 3



Фиг. 4

Безразмерную скорость распространения той или иной вихревой структуры можно найти, разрешая (3.7) относительно c при соответствующих значениях остальных параметров. В частности, для вихревых структур (3.13), (3.16), у которых $q_1 = q_2 = 0$, из (3.7) следует

$$c = q_3^2 - 2q_3 \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_1 - \omega_2} \right) - 4p^2 - 6 \frac{\omega_2}{\omega_1 - \omega_2} \quad (3.18)$$

Для одиночных структур ($p=0$) эта формула приводит к простой зависимости c от q_3 . В общем случае p может зависеть от q_3 не аналитически. Например, для периодической последовательности структур с периодом L параметр p в соответствии с (3.8) определяется квадратурой

$$p = -\frac{2}{L} \int_0^{q_3} \frac{q}{|q_z|} dq \quad (L > \lambda)$$

Интересно отметить, что при некоторых значениях параметров реализуются вихревые структуры по кинематическим признакам близкие к вихрю Хилла. Напомним, что последний, будучи точным решением уравнений гидродинамики, представляет собой равновзвешенный ($\omega = \text{const}$) сферический вихрь радиуса R , движущийся с постоянной скоростью [10] $u = \frac{2}{15} \omega R^2$. Это выражение хорошо согласуется с другим $u = \frac{1}{6} \omega R^2$, которое определяет скорость одиночных вихревых структур (3.16) и получается из (3.18) в приближении $p=0$, $\omega_2=0$, $\omega_1=\omega$, $q_3 = (R/a)^2 \ll 1$.

Необходимо иметь в виду, что развитый подход может обслуживать и другие физические ситуации. При этом в общем случае получаемые уравнения контурной динамики могут быть нелокальными. Например, эта ситуация реализуется при рассмотрении свободного равновзвешенного цилиндрического слоя, моделирующего свободную струю или спутное течение (след). Соответствующий гамильтониан модели может быть получен из (3.2) при $a \rightarrow \infty$ с последующим приближением крупномасштабности.

С практической точки зрения на первых порах следует ограничиться простыми моделями, которые приводят к локальным уравнениям контурной динамики. Как было показано, такие интегрируемые в квадратурах на стационарных решениях уравнения позволяют получить достаточно содержательные результаты. В дополнение укажем на принципиальную важность исследования устойчивости стационарных решений, а также на возможность рассмотрения нестационарных решений.

Автор благодарит Г. С. Голицына за внимание к работе и Г. И. Баренблатта, В. М. Гряника за обсуждение результатов и полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Structure and Mechanism of Turbulence. I, II // Lecture Notes Phys. Berlin, Heidelberg, N. Y.: Springer-Verlag, 1978. V. 75. 295 p. V. 76. 406 p.
2. The Role of Coherent Structures in Modeling Turbulence and Mixing // Lecture Notes Phys. Berlin: Springer-Verlag, 1981. V. 136. 393 p.
3. Кантуэлл Б. Дж. Организованные движения в турбулентных потоках // Вихри и волны: Пер. с англ. М.: Мир, 1984. С. 9–79.
4. Структурная турбулентность. Сб. научн. тр. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1982. 167 с.
5. Турбулентные сдвиговые течения: Матер. Междунар. симпоз. по турбулентным сдвиговым течениям./Под ред. Брэдбери Л. Дж. С. и др. М.: Машиностроение, 1983. 419 с.
6. Рабинович М. И., Сушик М. М. Когерентные структуры в турбулентных течениях // Нелинейные волны: Самоорганизация. М.: Наука, 1983. С. 56.
7. Гончаров В. П. Нелинейные волны в послойно разнотечениях. // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1986. Т. 22. № 5. С. 468–477.
8. Маслов В. П. Операторные методы. М.: Наука, 1973. 544 с.
9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
10. Милл-Гомсон Л. М. Теоретическая гидродинамика: Пер. с англ. М.: Мир, 1964. 656 с.

Москва

Поступила в редакцию
17.XI.1987