

УДК 532.526.5-3

ФОРМИРОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕННОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

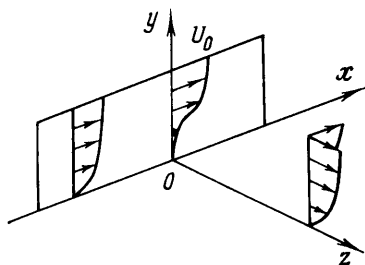
ЗАМЕТАЕВ В. Б.

В настоящее время широко распространены расчеты пограничного слоя около гладких тел произвольной формы. При этом решение часто определяется только до особых линий на поверхности тела, за которые частицы жидкости проникнуть не могут. Эти линии трактуются как линии отрыва, хотя аналитическое исследование их отсутствует, за исключением некоторых автомодельных случаев [1, 2].

В работе исследуется формирование особенностей в трехмерном ламинарном пограничном слое вблизи линии растекания, что, однако, не ограничивает общности полученных результатов. Предполагается, что вдоль линии растекания на пограничный слой действует неблагоприятный градиент давления, приводящий к появлению изолированной точки нулевого напряжения трения. Такие случаи описываются теорией кромочного отрыва (гл. IV в [3]). Эта ситуация имеет место, например, на вытянутом эллипсоиде вращения, установленном под углом атаки $\alpha \approx 40^\circ$ [4]. При этом продольная компонента трения на верхней линии симметрии линейно падает до нуля в некоторой точке, а затем снова становится положительной величиной. В [5] изучено течение жидкости на линии растекания эллипсоида с учетом взаимодействия пограничного слоя с внешним потенциальным потоком. Полученные результаты оказались близки к плоским течениям кромочного типа [3, 6, 7].

В настоящей работе учтена трехмерность течения жидкости в окрестности точки нулевого трения. Доказано, что в рамках полных уравнений пограничного слоя действительно формируется изолированная точка нулевого продольного трения при не-

котором критическом угле атаки эллипсоида. При углах атаки меньше критического решение гладкое. При углах атаки больше критического найдена линия на поверхности тела, за которую решение не может быть продолжено. Эта кривая начинается из точки, особой по Гольдштейну [8], и лежащей на линии растекания. В остальных точках этой линии обращается в бесконечность вертикальная компонента скорости.



Фиг. 1

1. Течение с линией растекания, подобное описанному в [4, 5], может реализоваться во многих ситуациях при расчетах пограничного слоя. Поэтому можно отвлечься от конкретных геометрических форм и проводить анализ в декартовой системе координат (фиг. 1): в силу локальности исследуемых явлений качественных изменений такой выбор системы координат за собой повлечь не должен.

Пусть линия $z=0$ является линией растекания потенциального потока несжимаемой жидкости, текущей над плоскостью $y=0$. Все скорости отнесем к некоторой характерной скорости течения U_0 , приращения давления к удвоенному скоростному напору ρU_0^2 , а длины к характерному размеру тела L . Будем полагать, что число Рейнольдса $Re = \rho U_0 L / \mu$ велико.

Если нормальную координату к поверхности и компоненту скорости v считать нормированными на $Re^{-1/2}$, то уравнения пограничного слоя запишутся следующим образом:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.1)$$

$$u=v=w=0, \quad y=0, \quad u=u_e(x, z), \quad w=w_e(x, z), \quad y \rightarrow +\infty$$

В окрестности линии $z=0$ скорости и давление вне пограничного слоя могут быть представлены в виде

$$u_e = u_0(x) + z^2 u_1(x) + \dots, \quad w_e = z w_0(x) + z^3 w_1(x) + \dots \\ p = p_0(x) - z^2 p_1(x) + z^4 p_2(x) + \dots$$

причем для определенности предположим, что давление убывает в сторону от линии растекания $p_1(x) > 0$.

Соответственно решение уравнений пограничного слоя при $z \rightarrow 0$ можно представлять рядом Тейлора

$$u = u_0(x, y) + z^2 u_1(x, y) + \dots, \quad w = z w_0(x, y) + z^3 w_1(x, y) + \dots, \\ v = v_0(x, y) + z^2 v_1(x, y) + \dots \quad (1.2)$$

Подставляя (1.2) в уравнения (1.1), можно получить задачу для главного приближения

$$u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} = -p_0'(x) + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}, \\ u_0 \frac{\partial w_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial w_0}{\partial y} + w_0^2 = 2p_1(x) + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + w_0 = 0 \quad (1.3)$$

Система уравнений (1.3) обычно изучается численным способом, причем свойства ее решений в значительной мере аналогичны свойствам плоского пограничного слоя. В частности, при воздействии неблагоприятного градиента давления $p_0'(x) > 0$ продольная компонента напряжения трения $\tau_x = \partial u_0 / \partial y$ ($y=0$) может иметь особенность устранимого типа — излом в точке $x=0$ (в выбранной системе координат). Решения уравнений (1.3) в окрестности этой особой, изолированной точки нулевого напряжения трения подробно исследованы в [5].

Уравнения для членов первого приближения (1.2) имеют вид

$$\frac{\partial (u_0 u_1)}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_1}{\partial y} + v_1 \frac{\partial u_0}{\partial y} + 2w_0 u_1 = p_1'(x) + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \quad (1.4) \\ u_0 \frac{\partial w_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial w_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial w_1}{\partial y} + v_1 \frac{\partial w_0}{\partial y} + 4w_0 w_1 = -4p_2 + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + 3w_1 = 0$$

Отметим, что помимо знака функции $p_1(x)$ на течение влияет и знак $p_1'(x)$. Если пренебречь влиянием $p_2(x)$, то при $p_1'(x) > 0$ возмущенный профиль продольной скорости наполняется, а при $p_1'(x) < 0$ жидкость тормозится вне линии растекания быстрее, чем на самой линии растекания.

Удобно для систем (1.3) и (1.4) ввести две функции тока по формулам: $u = \partial F / \partial y$, $w = \partial \psi / \partial y$.

В дальнейшем течение изучается только в окрестности особой точки $x=0$, $z=0$ — точки нулевого продольного трения, которая формируется при угле атаки $\alpha = \alpha_*$. Из выражения для давления понадобятся следующие члены:

$$p_0'(x) = p_{00} + p_{01}x + \dots, \quad p_1 = p_{10} + p_{11}x + \dots$$

Если угол атаки близок к критическому, то из [5] следуют разложения решений системы (1.3) при $x \rightarrow -0$, $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_0$:

$$\begin{aligned} F &= F_0 + \Delta\alpha F_1 + \dots, \quad \psi = z(\psi_0 + \Delta\alpha\psi_1 + \dots) \\ F_0 &= {}^1/8(-x)^{3/4}p_{00}\eta^3 + (-x)^{5/4}F_{01} + (-x)^{3/4}F_{02} + \dots \\ \psi_0 &= {}^1/2(-x)^{1/2}c_0\eta^2 + (-x)^{3/4}\psi_{01} + \dots \\ F_{01} &= {}^1/2a_0\eta^2 - {}^1/240c_0p_{00}\eta^6, \quad F_{02} = {}^1/2b_0\eta^2 + O(\eta^5 + \eta^9) \\ \psi_{01} &= {}^1/120(a_0c_0 + c_0^2)\eta^5, \quad \eta = y(-x)^{-1/4} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Конкретный вид F_{02} не представляет интереса; константы a_0 , c_0 , b_0 определяются из расчета полных уравнений (1.3), причем a_0 — наклон продольной компоненты трения впереди от особой точки, а c_0z — величина поперечной компоненты напряжения трения

$$F_1 = {}^1/2(-x)^{1/2-\lambda}a_1\eta^2 + \dots, \quad \lambda = 1 - c_0/a_0$$

Члены F_1 и ψ_1 определяют возмущения, вносимые изменением угла атаки.

С другой стороны, можно изучить, какие возмущения вносятся пространственностью при $\Delta\alpha = 0$, а $z \neq 0$. Для этого случая

$$F = F_0 + z^2F_2 + \dots, \quad \psi = z\psi_0 + z^3\psi_2 + \dots$$

Относительно членов F_2 и ψ_2 имеется система уравнений (1.4), решение ее при $x \rightarrow -0$ ищется в виде координатного разложения по собственным функциям

$$\begin{aligned} F_2 &= (-x)^n F_{20}(\eta) + (-x)^{n+3/4} F_{21} + \dots, \quad \psi_2 = (-x)^{n-1/4} \psi_{20}(\eta) + \dots \\ F_{20}''' - {}^1/8p_{00}\eta^3 F_{20}'' + {}^1/2p_{00}(n+1/4)\eta^2 F_{20}' - np_{00}\eta F_{20} &= 0 \\ F_{20} = F_{20}' &= 0, \quad \eta = 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Третье условие для (1.6) — это отсутствие экспоненциального роста F_{20} при $\eta \rightarrow +\infty$. Решение (1.6) следующее: $F_{20} = {}^1/2a_2\eta^2$, где a_2 — произвольна.

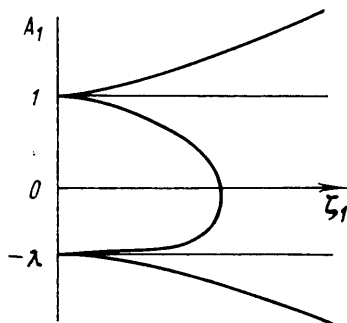
Краевая задача для ψ_{20} и ее решение имеют вид

$$\begin{aligned} \psi_{20}''' - {}^1/8p_{00}\eta^3 \psi_{20}'' - {}^1/2p_{00}({}^1/2 - n)\eta^2 \psi_{20}' &= -{}^1/2a_2c_0({}^1/2 - n)\eta^2 \\ \psi_{20} = \psi_{20}' &= 0, \quad \eta = 0 \\ \psi_{20} &= \frac{a_2c_0}{p_{00}} \int_0^\eta \left[1 - \frac{\Gamma(3/4 - n)}{\Gamma(1/4)} U\left(\frac{1}{2} - n, \frac{3}{4}, \frac{p_{00}}{32}\eta^4\right) \right] d\eta \\ n &\neq {}^1/2, {}^3/2, {}^5/2, \dots; \quad \psi_{20} = 0, \quad n = {}^1/2 \end{aligned}$$

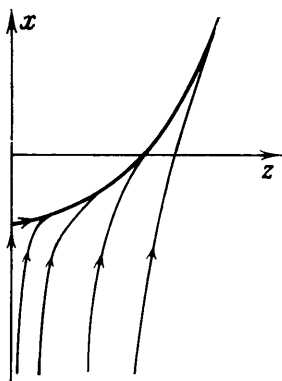
Здесь U — вырожденная гипергеометрическая функция [9]. Краевая задача для F_{21} имеет вид

$$\begin{aligned} F_{21}''' - {}^1/8p_{00}\eta^3 F_{21}'' + {}^1/2p_{00}(n+1)\eta^2 F_{21}' - (n+3/4)p_{00}\eta F_{21} &= \\ = {}^1/2a_2[3c_0 - a_0(n+1/2)]\eta^2 + {}^3/80c_0p_{00}a_2({}^1/2 - n)\eta^6 - 3p_{00}\eta\psi_{20} \\ F_{21} = F_{21}' &= 0, \quad \eta = 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Решение задачи (1.7) не растет экспоненциально при $n = -{}^1/2 + 3c_0/a_0$; ${}^1/2$; ${}^3/2$; ... Если $n < {}^3/2$, то при фиксированном малом z пригодность разложения решения в ряд Тейлора (1.2) нарушается вблизи точки $x=0$. Решение уравнений (1.3) в окрестности особой точки характеризуется параметром $\lambda = 1 - c_0/a_0$, который представляет отношение наклонов продольного трения: $\lambda = a_0^+/a_0$, a_0^+ — наклон сзади от особой точки, a_0 — спереди. В терминах λ первое собственное число имеет вид $n = {}^5/2 - 3\lambda$, оно является



Фиг. 2



Фиг. 3

первым при $\lambda \geq 2/3$. При $0 < \lambda < 2/3$ первое собственное число $n = 1/2$. Отметим, что $\lambda > 1$ означает $c_0 < 0$ — т. е. линию стекания, а не растекания.

Сравнивая второй член разложения функции тока F_0 в (1.5) с первым членом разложения функции F_2 , найдем, что они одинаковы по величине, когда $z = O((-x)^{1/2(3\lambda-1)})$ ($\lambda \geq 2/3$) и $z = O((-x)^{1/2})$ ($\lambda < 2/3$).

2. Зная область неприменимости тейлоровского разложения решения, будем искать решение в ней в виде ($\Delta\alpha = 0$)

$$u = (-x)^{1/2} p_{00} \eta^2 + (-x)^{3/4} u_{01}(\eta, \xi) + (-x)^2 u_{02} + \dots \quad (2.1)$$

$$w = (-x)^{1/4+\beta} c_0 \eta \xi + (-x)^{1+\beta} w_{01} + \dots$$

$$v = (-x)^{1/2} [-1/2 c_0 \eta^2 + v_{01}] + (-x)^{3/4} v_{02} + \dots$$

$$\eta = y(-x)^{-1/4}, \quad \xi = z(-x)^{-\beta}, \quad \beta = 1/2(3\lambda-1)$$

Решая соответствующую краевую задачу, можно определить u_{01} с точностью до произвольной функции $A(\xi)$

$$u_{01} = A(\xi) \eta^{-1/4} c_0 p_{00} \eta^5$$

Найдя u_{01} и удовлетворив требованию отсутствия растущей экспоненты для u_{02} при $\eta \rightarrow \infty$, получим уравнение для A

$$A = a_0 A_1, \quad \xi = \sqrt{a_0} \xi_1 \quad (2.2)$$

$$1/2(3\lambda-1) \xi_1 A_1 A_1' - A_1^2 + \lambda + (1-\lambda) \xi_1 A_1' + (1-\lambda) A_1 = 0$$

$$A_1 = 1 + a_2 \xi_1^2 + \dots, \quad \xi_1 \rightarrow 0$$

Уравнение (2.2) может быть проинтегрировано; для $A_1 > 1$ решение имеет вид ($a_2 > 0$)

$$(A_1 - 1)(A_1 + \lambda)^{3\lambda-2} = G_2 \xi_1^2, \quad G_2 = a_2(1 + \lambda)^{3\lambda-1}$$

На фиг. 2 изображены все решения уравнения (2.2), верхняя кривая соответствует $a_2 > 0$, средняя $a_2 < 0$. Решение уравнения (2.2) справедливо в полуплоскости $x < 0$; причем, как видно из фиг. 2, параметр a_2 влияет на область определения решения. При $a_2 > 0$ решение определено во всей полуплоскости, в частности при $x = 0$ продольное напряжение трения $\tau_x = O(z^{2/(3\lambda-1)})$. Это означает, что $\tau_x = 0$ в изолированной точке $x = z = 0$.

Если $a_2 < 0$, то это приводит к убыванию функции A_1 с ростом ξ_1 и, соответственно, к торможению продольного течения. Это торможение при $z \neq 0$ более сильное, чем при $z = 0$, и носит катастрофический характер, так как решение определено только до некоторой линии $z_* = \text{const}(-x)^{(3\lambda-1)/2}$, а на самой этой линии $A_1' = \infty$. Вертикальная компонента скорости обращается в бесконечность на этой линии, и решение уравнений пограничного слоя за нее продолжено быть не может. В этом смысле поведение решения на особой линии аналогично особенностям Гольдштейна [8] в

плоском пограничном слое. Знак параметра a_2 определяется распределением давления на внешней границе пограничного слоя и, как показано выше, дает область определения решения при $z > 0$. Будем считать в дальнейшем $a_2 > 0$, т. е. решение сбоку от линии растекания существует.

Опираясь на разложения (2.1), ищем решение в общем случае $\Delta\alpha \neq 0$, $a_2 \neq 0$

$$u = \varepsilon^{1/2} / 2 p_{00} y_1^2 + \varepsilon^{5/4} u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots, \quad u = \varepsilon^{1/4 + \beta} c_0 y_1 z_1 + \varepsilon^{1+\beta} w_1 + \dots \quad (2.3)$$

$$v = \varepsilon^{1/2} [-1/2 c_0 y_1^2 + v_1] + \varepsilon^{5/4} v_2 + \dots$$

$$x_1 = x/\varepsilon, \quad z_1 = z/\varepsilon^\beta, \quad y_1 = y/\varepsilon^{1/4}$$

Из (1.5) следует, что характерные возмущения угла атаки $\alpha = \alpha_0 + \varepsilon^{1+\lambda} \Gamma$. Подставляя асимптотические разложения (2.3) в уравнения (1.1), можно получить краевые задачи относительно возмущений компонент скорости. Решение для u_1 и v_1 имеет вид

$$u_1 = B(x_1, z_1) y_1^{-1/4} c_0 p_{00} y_1^5, \quad v_1 = -\frac{1}{2} \frac{\partial B}{\partial x_1} y_1^2$$

причем функция B произвольна.

Краевая задача для w_1

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial y_1^2} - \frac{1}{2} p_{00} y_1^2 \frac{\partial w_1}{\partial x_1} = \frac{1}{2} z_1 \left(c_0^2 - c_0 \frac{\partial B}{\partial x_1} \right) y_1^2 \quad (2.4)$$

$$w_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad w_1 \neq \exp(y_1), \quad y_1 \rightarrow +\infty.$$

Решение задачи (2.4) может быть построено с помощью преобразования Фурье

$$w_1 = z_1 W, \quad W = \frac{c_0^2 + c_0 a_0}{24} y_1^4 - G + w_3$$

$$w_3^* = \int_{-\infty}^{+\infty} w_3 e^{i\omega x_1} dx_1 = \frac{\pi i G^*}{2^{1/4} \Gamma(1/4)} t^{1/4} H_{1/4}^{(1)}(t)$$

$$t = \frac{1}{2} \left(\frac{p_{00}}{2} i\omega \right)^{1/2} y_1^2, \quad G = -\frac{c_0}{p_{00}} (B + a_0 x_1)$$

Здесь $H_{1/4}^{(1)}(t)$ — функция Ганкеля [9]. Разрез в комплексной плоскости ω проведен вдоль мнимой отрицательной полуоси; ветвь $(i\omega)^{1/2}$ выбрана так: $(i\omega)^{1/2} = |\omega|^{1/2} \exp(i\pi/4)$ при $\omega > 0$.

Относительно u_2 получается следующая краевая задача:

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial y_1^2} - \frac{p_{00}}{2} y_1^2 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - p_{00} y_1 v_2 = u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \left(v_1 - \frac{c_0}{2} y_1^2 \right) \frac{\partial u_1}{\partial y_1} + c_0 y_1 z_1 \frac{\partial u_1}{\partial z_1} \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial y_1} + W + z_1 \frac{\partial W}{\partial z_1} = 0$$

$$u_2 = v_2 = 0, \quad y_1 = 0, \quad u_2 \neq \exp(y_1), \quad y_1 \rightarrow +\infty$$

Решая задачу (2.5) с помощью преобразования Фурье, найдем, что ее решение существует, если $B(x_1, z_1)$ удовлетворяет уравнению

$$A \frac{\partial A}{\partial x} - \lambda x + (1-\lambda) A + (1-\lambda) z \frac{\partial A}{\partial z} = 0$$

$$A = -x - \frac{\text{sign } \Gamma}{(-x)^\lambda} + z^2 \text{sign } a_2 (-x)^{2-3\lambda} + \dots, \quad x \rightarrow -\infty \quad (2.6)$$

$$x_1 = c_2 x, \quad B = a_0 c_2 A$$

$$c_2 = \left[\frac{(-a_1) |\Gamma|}{a_0} \right]^{1/(1+\lambda)}, \quad z_1 = \left[\frac{a_0 c_2^{3\lambda-1}}{|a_2|} \right]^{1/2} z$$

Из начального условия в (2.6) следует, что все решения при различных Γ и a_2 подобны друг другу. Параметр λ , как было оговорено выше, принадлежит диапазону $\lambda \geq 2/3$.

Для задачи (2.6) известны следующие частные интегралы:

$$\begin{aligned} (A - \lambda x)^\lambda (A + x) &= G_1(\Gamma), \quad a_2 = 0 \text{ или } z = 0 \\ (A - \lambda x)^{3\lambda-2} (A + x) &= G_2(a_2) z^2, \quad \Gamma = 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Ищем решение уравнения (2.6) в виде неявной функции $F(x, z, A_1(x, z)) = d$, $A_1 = zA$, для которой уравнение может быть записано в одном из следующих эквивалентных видов:

$$\begin{aligned} A_1 \frac{\partial F}{\partial x} + \lambda x z^2 \frac{\partial F}{\partial A_1} + (1 - \lambda) z^2 \frac{\partial F}{\partial z} &= 0 \\ \frac{dx}{A_1} &= \frac{dA_1}{\lambda x z^2} = \frac{dz}{(1 - \lambda) z^2} \end{aligned} \quad (2.8)$$

У последней системы уравнений имеются интегралы вида

$$(A_1/z - \lambda x) z^{1/(1-\lambda)} = d_1, \quad (A_1/z + x) z^{-\lambda/(1-\lambda)} = d_2$$

Согласно [10] любая $F = F(d_1, d_2)$ является интегралом уравнения (2.8), конкретный вид $F(d_1, d_2)$ выбирается исходя из начальных условий. При известных значениях (2.7) интеграла полного уравнения, F примет вид

$$\begin{aligned} (A - \lambda x)^{3\lambda-2} (A + x) - G_1(A - \lambda x)^{2\lambda-2} &= G_2 z^2 \\ G_1 &= -\text{const} \cdot \text{sign } \Gamma, \quad G_2 = \text{const} \cdot \text{sign } a_2 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Полученное решение справедливо при $\lambda \geq 2/3$ и обладает следующими свойствами: при $\Gamma < 0$, $a_2 > 0$ — решение гладкое во всей области определения аргумента. При $\Gamma = 0$, $a_2 > 0$ решение гладкое везде, за исключением точки $x = z = 0$ — изолированной точки нулевого продольного трения. При $\Gamma > 0$, $a_2 > 0$ решение (2.9) определено только при $x \leq x_1(z)$ (на фиг. 3 качественно показано векторное поле касательных напряжений на поверхности тела для данного случая). В точке $x_1(0)$, как и в плоском случае для особенности Гольдштейна, $A(x_1, 0) = 0$, $\partial A / \partial x = \infty$; в остальных точках линии $x = x_1(z)$ обращается в бесконечность вертикальная составляющая скорости, а компоненты трения остаются конечными. В случае если $a_2 = 0$, решение не зависит от z и дано в [5]. Свойства решения (2.9) при $a_2 < 0$ аналогичны описанному, однако в этом случае при любом угле атаки Γ решение определено не во всей плоскости (x, z) . При $\lambda > 1$ (это соответствует линии стекания) и $\Gamma \leq 0$ решение аналогично описанному выше. Наконец, при $\lambda < 2/3$ решение имеет вид $A = A_0(x) + a_2 z^2$, $A_0(x)$ — удовлетворяет первому из равенств (2.7). В этом случае сглаживание при $\Gamma \rightarrow -0$ происходит на больших масштабах по z , чем рассмотренный.

Анализ уравнений пространственного пограничного слоя показал, что из точки нулевого напряжения трения на линии растекания может выходить особая линия, решение через которую непродолжимо. Эта линия является огибающей для предельных линий тока на дне пограничного слоя, и на ней вертикальная составляющая скорости обращается в бесконечность. Особенность такого типа непроходима в рамках уравнений пограничного слоя и требует перестройки всего глобального течения.

Возможна ситуация, когда на линии растекания реализуется более слабая проходимая особенность — точка нулевого продольного напряжения трения. В этом случае решение всюду гладкое, за исключением особой точки.

Автор выражает благодарность В. В. Сычеву и А. И. Рубану за высказанные замечания в ходе выполнения работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Brown S. N.* Singularities associated with separating boundary layers // *Phil. Trans. Roy. Soc., London. ser. A.* 1965. V. 257. No. 1084. P. 409–444.
2. *Williams J. C.* Singularities in solutions of the three-dimensional laminar-boundary-layer equations // *J. Fluid Mech.* 1985. V. 160. P. 257–279.
3. Асимптотическая теория отрывных течений/Под ред. Сычева В. В. М.: Наука, 1987. 256 с.
4. *Cebeci T., Stewartson K., Khattab A. K.* On nose separation // *J. Fluid Mech.* 1980. V. 97. № 3. P. 435–454.
5. *Brown S. N.* Marginal separation of a three-dimensional boundary layer on a line of symmetry // *J. Fluid Mech.* 1985. V. 158. P. 95–111.
6. *Stewartson K., Smith F. T., Kaups K.* Marginal separation // *Studies Appl. Math.* 1982. V. 67. No 1. P. 45–61.
7. *Brown S. N., Stewartson K.* On an integral equation of marginal separation // *SIAM J. Appl. Maths.* 1983. V. 43. No. 5. P. 1119–1126.
8. *Goldstein S.* On laminar boundary-layer flow near a position of separation // *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 1948. V. 1. Pt 1. P. 43–69.
9. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и мат. таблицами/Под ред. Абрамовица М., Стиган И.: Пер. с англ. М.: Наука, 1979. 830 с.
10. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. М.: Наука, 1974. Т. 2. 655 с.

Москва

Поступила в редакцию
26.I.1988