

УДК 532.526.2.013.4

О ВОЗБУЖДЕНИИ ВОЛН ГОЛЛМИНА — ШЛИХТИНГА ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ АКУСТИЧЕСКОГО ПОЛЯ С ТРЕХМЕРНОЙ НЕРОВНОСТЬЮ НА ОБТЕКАЕМОЙ ПОВЕРХНОСТИ

ЖУК В. И.

Анализ вопроса о генерации волн неустойчивости звуком показал, что преобразование акустических возмущений в собственные колебания пограничного слоя происходит на неоднородностях течения [1], порожденных, например, изломом обтекаемой поверхности или расположенной на ней короткой неровностью [2–4]. Предельный случай больших чисел Рейнольдса допускает математическое описание с помощью асимптотической трехслойной теории [5–7] для частот, близких к нижней ветви нейтральной кривой [2], причем возбуждение происходит в индуцируемой стационарной неровностью области свободного взаимодействия с протяженностью порядка длины волны Толлмина — Шлихтинга. Ниже в предположениях [2] рассматривается рассеяние плоской звуковой волны на трехмерной неровности.

Пусть неровность, расположенная на расстоянии L от передней кромки плоской пластины, имеет высоту порядка $LR^{-3/8}$ и характерные размеры $LR^{-3/8}$ по осям x, z декартовой системы с осью x , лежащей на поверхности пластины, и осью y , направленной по нормали к ней. Здесь число Рейнольдса R определено по расстоянию L и скорости U_∞ набегающего вдоль оси x невозмущенного потока с числом Маха M_∞ .

В окрестности неровности с указанными масштабами компоненты скорости u, v, w и избыточное давление p подчиняются следующей системе уравнений [5–9]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, & \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (1)$$

где p в отличие от классических уравнений Прандтля, принадлежит к числу искомых величин. Если частота звука имеет порядок $U_\infty L^{-1} R^{1/4}$, а амплитуда возмущений продольной скорости в звуковой волне оценивается как $U_\infty R^{-1/4}$, то влияние акустического поля будет учитываться в краевых условиях к системе уравнений (1). Для плоской звуковой волны, распространяющейся вдоль оси x , краевые условия в случае $M_\infty < 1$ приобретают вид

$$p = -\frac{(1-M_\infty^2)^{1/2}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 A(t, \xi, \eta) / \partial \xi^2 d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2 + (1-M_\infty^2)(z-\eta)^2]^{1/2}} + \alpha p_\alpha \quad (2)$$

$$\begin{aligned} y \rightarrow \infty: & \quad u \rightarrow y + A(t, x, z) + \alpha u_\alpha, \quad w \rightarrow 0 \\ x \rightarrow -\infty: & \quad u \rightarrow y + \alpha u_\alpha, \quad w \rightarrow 0 \\ y = \beta F(x, z): & \quad u = v = w = 0 \end{aligned}$$

$$(u_\alpha, p_\alpha) = \text{Re}[(u'_\alpha, p'_\alpha) e^{i\omega t}], \quad u'_\alpha = \frac{i}{\omega} [e^{-(1+i)(\omega/2)^{1/4} y} - 1], \quad p'_\alpha = -x$$

Система уравнений (1) и краевые условия (2) записаны в специальной безразмерной системе единиц [2, 9]. Функции u_α , p_α , в отсутствие которых сформулированная задача определяет картину обтекания невозмущенным сдвиговым потоком $u=y$ препятствия $y=\beta F(x, z)$ на поверхности пластины, связаны с воздействием акустической волны частоты ω и амплитуды α . Указанные функции представляют собой первые члены тейлоровского разложения по $xR^{-1/2}$ приведенного в [2] решения задачи о проникновении акустического поля в пограничный слой, поскольку для рассматриваемых частот длина звуковой волны порядка $LM_\infty^{-1}R^{-1/2}$ много больше области взаимодействия с характерным размером $LR^{-1/2}$. Заметим, что при $F=0$ точным решением нелинейной задачи (1), (2) является суперпозиция невозмущенного потока и звуковых колебаний

$$u=y+\alpha u_\alpha, \quad v=0, \quad w=0, \quad p=\alpha p_\alpha$$

Считая α и β малыми, представим параметры газа в виде ряда

$$\begin{aligned} u &= y + \alpha u_\alpha + \beta u_\beta + \alpha\beta u_\gamma + \dots \\ v &= \beta v_\beta + \alpha\beta v_\gamma + \dots, \quad w = \beta w_\beta + \alpha\beta w_\gamma + \dots \\ p &= \alpha p_\alpha + \beta p_\beta + \alpha\beta p_\gamma + \dots, \quad A = \beta A_\beta + \alpha\beta A_\gamma + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Функции с индексом β находятся как решение стационарной задачи об обтекании задаваемой уравнением $y=\beta F(x, z)$ неровности (см. [8]). Нелинейный эффект возбуждения собственных колебаний пограничного слоя при рассеянии акустической волны описывается членами с индексом γ , для которых из (1), (2) получим задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\gamma}{\partial x} + \frac{\partial v_\gamma}{\partial y} + \frac{\partial w_\gamma}{\partial z} &= 0, \quad \frac{\partial p_\gamma}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u_\gamma}{\partial t} + y \frac{\partial u_\gamma}{\partial x} + v_\gamma &= -\frac{\partial p_\gamma}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial y^2} - u_\alpha \frac{\partial u_\beta}{\partial x} - v_\beta \frac{\partial u_\alpha}{\partial y} \\ \frac{\partial w_\gamma}{\partial t} + y \frac{\partial w_\gamma}{\partial x} &= -\frac{\partial p_\gamma}{\partial z} + \frac{\partial^2 w_\gamma}{\partial y^2} - u_\alpha \frac{\partial w_\beta}{\partial x} \\ p_\gamma &= -\frac{(1-M_\infty^2)^{1/2}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 A_\gamma / \partial \xi^2 d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2 + (1-M_\infty^2)(z-\eta)^2]^{1/2}} \\ y \rightarrow \infty: \quad u_\gamma &\rightarrow A_\gamma, \quad w_\gamma \rightarrow 0 \\ x \rightarrow -\infty: \quad u_\gamma &\rightarrow 0, \quad w_\gamma \rightarrow 0; \quad y=0: \quad u_\gamma = v_\gamma = w_\gamma = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Выделим у искомых функций осциллирующий временной множитель и совершим по пространственным переменным x и z преобразование Фурье

$$\begin{aligned} (u_\gamma, v_\gamma, w_\gamma, p_\gamma, A_\gamma) &= \\ = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{(2\pi)^2} e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (u_\gamma^*, v_\gamma^*, w_\gamma^*, p_\gamma^*, A_\gamma^*) e^{ikx+imz} dk dm \right] \end{aligned}$$

На комплексной плоскости Z в качестве вытекающего из (4) следствия имеем

$$\begin{aligned} Z &= (ik)^{1/2} y + \xi, \quad \xi = i^{1/2} \omega k^{-1/2}, \quad -3\pi/2 < \arg k < \pi/2 \\ \frac{\partial^3 U_\gamma}{\partial Z^3} - Z \frac{\partial U_\gamma}{\partial Z} &= \chi, \quad U_\gamma = u_\gamma^* + \frac{m}{k} w_\gamma^* \end{aligned} \quad (5)$$

$$\chi = F^*(k, m) H(k, m, \omega, Z) =$$

$$\begin{aligned}
&= (ik)^{1/2} \frac{\partial}{\partial Z} \left[u_{\alpha}' \left(u_{\beta}^* + \frac{m}{k} w_{\beta}^* \right) + (ik)^{-1/2} v_{\beta}^* \frac{\partial u_{\alpha}'}{\partial Z} \right] \\
p_{\Gamma}^* &= \frac{k^2}{\mu} A_{\Gamma}^*, \quad \mu = \left(k^2 + \frac{m^2}{1-M_{\infty}^2} \right)^{1/2}, \quad \operatorname{Re} \mu > 0 \\
Z = \xi: \quad \frac{\partial^2 U_{\Gamma}}{\partial Z^2} &= (ik)^{1/2} \left(1 + \frac{m^2}{k^2} \right) p_{\Gamma}^*, \quad U_{\Gamma} = 0 \\
Z \rightarrow \infty: \quad U_{\Gamma} &\rightarrow A_{\Gamma}^*
\end{aligned}$$

Задача (5) сводится к отысканию константы C в выражении

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U_{\Gamma}}{\partial Z} &= C \operatorname{Ai}(Z) + F^* \Theta \\
\Theta &= -\frac{1}{W} \left[\operatorname{Ai}(Z) \int_z^{\infty} H \operatorname{Bi}(Z') dZ' + \operatorname{Bi}(Z) \int_z^{\infty} H \operatorname{Ai}(Z') dZ' \right]
\end{aligned}$$

определяющем затухающее при $Z \rightarrow \infty$ решение уравнения Эйри с правой частью F^*H . Здесь $\operatorname{Ai}(Z)$, $\operatorname{Bi}(Z)$ — два линейно независимых решения однородного уравнения Эйри [10] с вронскианом $W = \pi^{-1}$. Краевые условия в (5) позволяют, помимо указанной константы, найти также неизвестный заранее фурье-образ давления

$$p_{\Gamma}^* = \frac{k^2 F^*(k, m) S(k, m, \omega, \xi)}{\mu \Phi(\xi) - (ik)^{1/2} (k^2 + m^2)} \quad (6)$$

$$S = \Phi(\xi) \int_{\xi}^{\infty} \Theta dZ - \frac{\partial \Theta(k, m, \omega, \xi)}{\partial Z}, \quad \Phi(\xi) = \frac{d \operatorname{Ai}(\xi)}{dZ} \left[\int_{\xi}^{\infty} \operatorname{Ai}(Z) dZ \right]^{-1}$$

Обратимся к частному случаю, когда форма неровности задается уравнением

$$F(x, z) = G(x - z \operatorname{tg} \psi), \quad F^*(k, m) = 2\pi \delta(m + k \operatorname{tg} \psi) G^*(k) \quad (7)$$

где через $\delta(k)$ обозначена дельта-функция, G^* — фурье-образ функции G . Определяемая с помощью (7) неровность представляет собой прямолинейную полосу, ориентированную под углом ψ относительно оси z (фиг. 1). Обратное преобразование Фурье в применении к выражению (6) с функцией F^* вида (7) сводится к однократному интегралу

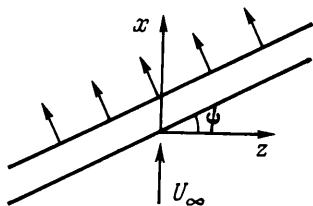
$$\begin{aligned}
p_{\Gamma} &= \operatorname{Re} \left[\frac{e^{i\omega t}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|k| G^* S}{\sigma \Phi - (ik)^{1/2} |k| (1 + \operatorname{tg}^2 \psi)} e^{ik(x - z \operatorname{tg} \psi)} dk \right] \\
\sigma &= [1 + (1 - M_{\infty}^2)^{-1} \operatorname{tg}^2 \psi]^{1/2}
\end{aligned} \quad (8)$$

Изменением пути интегрирования в комплексной плоскости k с разрезом вдоль положительной мнимой полуоси выражение (8) можно представить в виде суммы интегральных членов и вычетов в полюсах подынтегральной функции [11]. Положение последних находится из уравнения

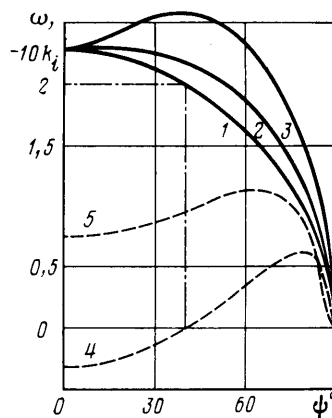
$$\Phi \left(i^{1/2} \frac{\omega}{k^{1/2}} \right) = -i^{1/2} k^{1/2} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \psi}{\sigma} \quad (9)$$

С помощью преобразования

$$K = \frac{(1 - M_{\infty}^2)^{1/4} (1 + \operatorname{tg}^2 \psi)^{1/4}}{(1 - M_{\infty}^2 + \operatorname{tg}^2 \psi)^{1/4}} k, \quad \Omega = \frac{(1 - M_{\infty}^2)^{1/4} (1 + \operatorname{tg}^2 \psi)^{1/4}}{(1 - M_{\infty}^2 + \operatorname{tg}^2 \psi)^{1/4}} \omega \quad (10)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

уравнение (9), связывающее величины ω , ψ , k и являющееся одним из обобщений дисперсионного соотношения линейной теории устойчивости на трехмерный случай, приводится к стандартной форме

$$\Phi\left(i^{1/2} \frac{\Omega}{K^{1/2}}\right) = -i^{1/2} K^{1/2} \quad (11)$$

Каждый корень K , Ω уравнения (11), хорошо изученного в двумерной теории [11, 12], порождает в соответствии с (10) дисперсионные кривые $k_r = k_r(\omega, \psi)$, $k_i = k_i(\omega, \psi)$. Наибольший интерес представляет первый корень уравнения (11), так как при действительных Ω его траектория в комплексной плоскости K пересекает действительную ось. Вычет в полюсе подынтегральной функции выражения (8) $k = k(\omega, \psi)$, отвечающем первому корню дисперсионного соотношения (11), дает вклад в избыточное давление ниже по потоку от неровности

$$p_1 = \text{Re} \left\{ \frac{3(ik)^{1/2} G^* S}{2[\sigma \omega k^{-2} d\Phi/d\xi - 2(1 + \text{tg}^2 \psi)]} e^{i\omega t + ik(x - z \text{tg} \psi)} \right\} \quad (12)$$

Данная компонента возмущенного фона представляет собой косую волну Толлмина — Шлихтинга, волновой вектор которой составляет угол ψ с осью x . В зависимости от соотношения между ω и ψ волна Толлмина — Шлихтинга (12) может быть как устойчивой, так и неустойчивой.

Подстановка в (10) действительного решения дисперсионного уравнения (11), а именно $K = K^0 = -1,0005$, $\Omega = \Omega^0 = 2,298$ [12], определяет форму нейтральных кривых $k = k_r = k_r(\psi)$, $k_i = 0$, $\omega = \omega(\psi)$. Нейтральные кривые в плоскости ψ , ω , задаваемые вторым соотношением (10) при $\Omega = \Omega^0$, изображены на фиг. 2 сплошными линиями, цифры 1—3 соответствуют числам Маха $M_\infty = 0, 1/\sqrt{2}, 0,9$. При $\psi = 0$ все кривые сходятся в точку $\omega = \Omega^0$, отвечающую критическому значению частоты для первой моды двумерных колебаний.

Таким образом, линейная неровность на пластине под воздействием звука порождает наклонную волну Толлмина — Шлихтинга, причем нейтральная частота для такой волны изменяется вместе с ориентацией неровности. Область устойчивости ($k_i > 0$ в волне Толлмина — Шлихтинга (12)) на плоскости ψ , ω заключена между осью абсцисс и нейтральной кривой. Область неустойчивости $k_i < 0$ располагается выше нейтральной кривой. С помощью (10) легко показать, что для $1/2 < M_\infty^2 < 1$ нейтральная кривая $\omega = \omega(\psi)$ достигает максимума, величина $\omega = \omega_m > \Omega^0$ и поло-

жение $\psi = \psi_n$ которого определяются выражениями

$$\omega_m = \omega(\psi_m) = \frac{\Omega^0}{[4M_\infty^2(1-M_\infty^2)]^{1/4}}, \quad \psi_m = \arctg [2M_\infty^2 - 1]^{1/2}$$

Пусть числа Маха удовлетворяют приведенному неравенству, а частота акустических колебаний $\Omega^0 < \omega < \omega_m$ фиксирована. Тогда при малых ψ возбуждаемые собственные колебания неустойчивы. Однако с увеличением угла поворота неровности неустойчивая мода исчезает, если $\psi_1 < \psi < \psi_2$, где ψ_1, ψ_2 — точки пересечения нейтральной кривой с линией $\omega = \text{const}$. Дальнейшее увеличение ψ снова приводит к генерации экспоненциально нарастающей вниз по потоку наклонной волны Толлмина — Шлихтинга, если $\psi > \psi_2$. Для $M_\infty^2 < 1/2$ поворот неровности на любой угол снижает границу устойчивости, поскольку нейтральная частота с ростом ψ убывает монотонным образом. Заметим, что указанное свойство не противоречит теореме Сквайра.

Вытекающая из уравнения (11) зависимость $K_i = K_i(\Omega)$, когда Ω пробегает действительную ось, позволяет вычислить инкремент нарастания $-k_i$ косой волны Толлмина — Шлихтинга как функцию частоты ω и угла ψ . На фиг. 2 штриховыми линиями показано изменение величины $-k_i$ с увеличением ψ при $M_\infty = 0$ и двух фиксированных частотах: $\omega = 2$ (кривая 4) и $\omega = 3$ (кривая 5). Соответствующая докритической (в смысле теории двумерных колебаний) частоте $\omega < \Omega^0$ кривая 4 проходит через нуль в точке $\psi = \psi_n$, при этом на плоскости ψ, ω точка $\psi = \psi_n, \omega = 2$ принадлежит нейтральной кривой 1. В пределе $\omega \rightarrow \infty$ справедлива асимптотическая формула

$$k_i = - \frac{(1 - M_\infty^2 + \text{tg}^2 \psi)^{1/2}}{[8(1 - M_\infty^2)]^{1/2}(1 + \text{tg}^2 \psi)} \frac{1}{\omega^{1/2}}$$

Как видно из фиг. 2, для каждой частоты ω можно указать угол распространения волны ψ , отвечающий максимальному инкременту нарастания.

Рассмотрим другой пример неровности, а именно периодическую в направлении z волнистость

$$F(x, z) = G(x) \cos(\nu z), \quad F^*(k, m) = \pi G^*(k) [\delta(m - \nu) + \delta(m + \nu)] \quad (13)$$

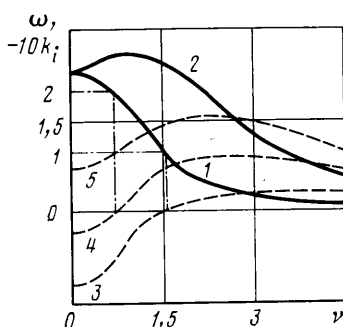
Влияние одномерной волнистости в направлении оси x на появление волн Толлмина — Шлихтинга изучалось ранее в [13]. В пространственном случае (13) из (6) получается следующее выражение для волны Толлмина — Шлихтинга:

$$p_i = \text{Re} \left\{ \frac{ikG^*S \cos(\nu z) e^{i\omega t + ikx}}{\Phi \kappa^{-1} - (ik)^{1/2} [(7k^2 + \nu^2)k + 2\kappa\omega d\Phi/d\xi] (3k^3)^{-1}} \right\} \quad (14)$$

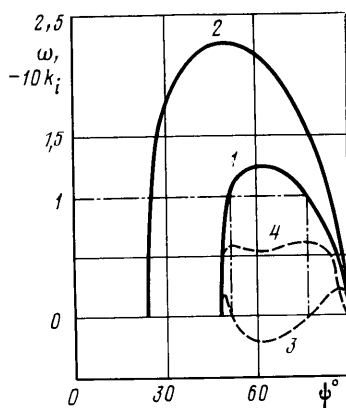
$$\kappa = [k^2 + (1 - M_\infty^2)^{-1}\nu^2]^{1/2}, \quad \text{Re } \kappa > 0$$

$$\Phi \left(i^{1/2} \frac{\omega}{k^{3/2}} \right) = (ik)^{1/2} \frac{k^2 + \nu^2}{\kappa} \quad (15)$$

Свойства (15) изложены в [14]. На фиг. 3 построены нейтральные кривые $\omega = \omega(\nu)$ для $M_\infty = 0$ и 0,9 (сплошные линии 1 и 2 соответственно). Часть плоскости ν, ω , расположенная выше нейтральной кривой, является областью неустойчивости, в которой инкремент нарастания $-k_i$, возбуждаемой звуком волны Толлмина — Шлихтинга (14), положителен. Уменьшение периода волнистости $2\pi/\nu$ приводит к расширению спектра неустойчивых частот, в то время как при $\nu = 0$ все нейтральные кривые дают не зависящее от числа Маха критическое значение частоты $\omega = \Omega^0$ из теории устойчивости плоскопараллельных течений. Поведение величины $-k_i$ в зависимости от ν в случае $M_\infty = 0$ проиллюстрировано на фиг. 3 штриховыми линиями 3–5 для докритических частот $\omega = 1, 2$ и для



Фиг. 3



Фиг. 4

сверхкритической частоты $\omega=3$ соответственно. Асимптотическое выражение для инкремента нарастания при $\nu \rightarrow \infty$ имеет вид [14]

$$k_i = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\omega^{1/2}}{1-M_\infty^2} \frac{1}{\nu^2}$$

В заключение укажем на возможность возбуждения звуковым полем трехмерной неустойчивости в пограничном слое при сверхзвуковых скоростях внешнего потока с сохранением тех же масштабов частот и размеров неоднородности, что и рассмотренные выше. Пусть неровность, в окрестности которой происходит преобразование акустических возмущений в собственные колебания пограничного слоя, имеет в безразмерных переменных [2, 9] вид линейной полосы (7), тогда косая волна Толлмина — Шлихтинга внизу по потоку от полосы возникает при условии

$$\psi > \psi_0 = \arctg(M_\infty^2 - 1)^{1/2} \quad (16)$$

Основываясь на системе уравнений (1) с видоизмененным применительно к случаю $M_\infty > 1$ граничным условием взаимодействия [5, 6, 9], нетрудно получить формулу для давления в волне Толлмина — Шлихтинга, аналогичную (8), (12), причем параметры волны удовлетворяют дисперсионному соотношению

$$\Phi\left(i^{1/2} \frac{\omega}{k^{1/2}}\right) = -i^{1/2} k^{1/2} \frac{1 + \tg^2 \psi}{[(M_\infty^2 - 1)^{-1} \tg^2 \psi - 1]^{1/2}} \quad (17)$$

где $\Phi(\xi)$ по-прежнему определяются с помощью (6). Нейтральные решения дисперсионного уравнения (17) в плоскости ψ, ω представлены сплошными линиями на фиг. 4 для двух значений числа Маха $M_\infty = 1,5$ (кривая 1) и $M_\infty = 1,1$ (кривая 2). Все нейтральные кривые имеют максимум $\omega = \omega_m$ в точке $\psi = \psi_m > \psi_0$, а именно

$$\omega_m = \omega(\psi_m) = \frac{\Omega^0}{[4M_\infty^2(M_\infty^2 - 1)]^{1/4}}, \quad \psi_m = \arctg(2M_\infty^2 - 1)^{1/2}$$

Из вида нейтральных решений $\omega = \omega(\psi)$ следует, что при фиксированной частоте $\omega < \omega_m$ существует два интервала изменения углов ψ , в которых генерируется экспоненциально нарастающая по амплитуде волна Толлмина — Шлихтинга: $\psi_0 < \psi < \psi_1$ и $\psi > \psi_2$, где ψ_1, ψ_2 — точки пересечения нейтральной кривой с линией $\omega = \text{const}$. В качестве примера на фиг. 4 штриховой линией 3 показана зависимость инкремента нарастания $-k_i$ от угла ψ в случае $\omega = 1, M_\infty = 1,5$ ($\omega_m = 1,255$). Волна неустойчивости

возбуждается для всех углов $\psi > \psi_0$, если $\omega > \omega_m$. Штриховая линия 4 на фиг. 4, относящаяся к $\omega = 2$, $M_\infty = 1,5$, иллюстрирует изменение $-k_i$ как функции ψ при выполнении последнего неравенства.

Для формирования возмущений типа косой волны Толлмина — Шлихтинга существенна лишь компонента скорости набегающего потока по направлению волнового вектора. Условие (16) означает, что данная компонента должна быть дозвуковой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Ю. С., Козлов В. В., Левченко В. Я. Возникновение турбулентности в пограничном слое. Новосибирск: Наука, 1982. 152 с.
2. Рубан А. И. О генерации волн Толлмина — Шлихтинга звуком // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 5. С. 44–52.
3. Goldstein M. E. Scattering of acoustic waves into Tollmien — Schlichting waves by small streamwise variations in surface geometry // J. Fluid Mech. 1985. V. 154. P. 509–529.
4. Жигулев В. Н., Федоров А. В. О восприимчивости пограничного слоя к акустическим возмущениям // ПМТФ. 1987. № 1. С. 30–37.
5. Нейланд В. Я. Асимптотические задачи теории вязких сверхзвуковых течений // Тр. ЦАГИ. 1974. Вып. 1529. 124 с.
6. Stewartson K. Multistructured boundary layers on flat plates and related bodies // Advances in Appl. Mech. New York — San Francisco — London: Acad. Press, 1974. V. 14. P. 145–239.
7. Рубан А. И., Сычев В. В. Асимптотическая теория отрыва ламинарного пограничного слоя в несжимаемой жидкости // Успехи механики. 1979. Т. 2. Вып. 4. С. 57–95.
8. Smith F. T., Sykes R. I., Brighton P. W. M. A two-dimensional boundary layer encountering a three-dimensional hump // J. Fluid Mech. 1977. V. 83. Pt 1. P. 163–176.
9. Рыжов О. С. О нестационарном пространственном пограничном слое, свободно взаимодействующем с внешним потоком // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 6. С. 1035–1052.
10. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и матем. таблицами // Под ред. Абрамовица М., Стиган И. Пер. с англ. М.: Наука, 1979. 832 с.
11. Терентьев Е. Д. Линейная задача о вибраторе в дозвуковом пограничном слое // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 6. С. 1049–1055.
12. Жук В. И., Рыжов О. С. Свободное взаимодействие и устойчивость пограничного слоя в несжимаемой жидкости // Докл. АН СССР. 1980. Т. 253. № 6. С. 1326–1329.
13. Завольский Н. А., Реутов В. П., Рыбушкина Г. В. Возбуждение волн Толлмина — Шлихтинга при рассеянии акустических и вихревых возмущений в пограничном слое на волнистой поверхности // ПМТФ. 1983. № 3. С. 79–86.
14. Ryzhov O. S., Zhuk V. I. On the stability of a compressible boundary layer against three-dimensional disturbances with self-induced pressure gradient // Current Problems in Computational Fluid Dynamics/Eds Belotserkovskii O. M., Shidlovsky V. P. Moscow: MIR Publishers. 1986. P. 286–307.

Москва

Поступила в редакцию
12.11.1988