

УДК 532.516.013

## ПОТЕРЯ СИММЕТРИИ В ТЕЧЕНИИ ОТ ЛИНЕЙНОГО ИСТОЧНИКА ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

ГОЛЬДШТИК М. А., ШТЕРН В. Н.

Для стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости при малых числах Рейнольдса доказаны теоремы существования единственности [1, 2], справедливые в ограниченных областях и для ряда задач обтекания.

В данной работе строится пример, когда при любом, даже сколь угодно малом значении числа Рейнольдса существует бесконечное множество стационарных решений. Естественно, что некоторые условия указанных теорем при этом не выполняются. В частности, допускается наличие особой точки, где скорость обращается в бесконечность. Конкретно рассмотрена простейшая плоская задача, в которой особая точка является источником или вихреисточником жидкости. В отсутствие границ наряду с осесимметричным классическим решением существует счетное число решений, отвечающих значениям азимутального числа  $m=1, 2, \dots$ . Показано, что все эти решения бифурцируют от осесимметричного при соответствующих числах Рейнольдса. При этом в случае источника или стока ответвляются новые стационарные режимы, а в случае вихреисточника — автоколебания. Однако при любом значении числа Рейнольдса, построенного как отношение расхода к вязкости, таких решений счетное число.

Эти результаты коррелируют с множественностью решений в задаче Джеффри — Гамеля [3, 4] о течении в плоском диффузоре. Обнаружено, что и в этом случае существует счетное число бифуркационных точек, каждая из которых связывает изолированную группу решений.

**1. Класс автомодельных решений.** Рассматриваются плоские течения вязкой несжимаемой жидкости. Уравнения Навье — Стокса, записанные в полярных координатах (см., например, [5, 6]) и традиционных обозначениях

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \Delta_1 v_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) \\ \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\varphi}{r} &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nu \left( \Delta_1 v_\varphi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right) \\ \frac{\partial (rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} &= 0, \quad \Delta_1 f = \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rf) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \end{aligned} \quad (1.1)$$

допускают класс автомодельных решений вида

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{\nu}{r} U(\varphi, T), \quad v_\varphi = \frac{\nu}{r} V(\varphi, T) \\ p - p_\infty &= \frac{\rho \nu^2}{r^2} P(\varphi, T), \quad T = \frac{1}{2} \ln \frac{\nu t}{r^2} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Такая структура решений обязательна, если постановка задачи не содержит характерного масштаба длины [7], как это свойственно для задач Джеффри — Гамеля и течения, индуцированного точечным источником. При выборе вида переменной  $T$ , играющей роль безразмерного времени, предполагается, что физическое время  $t$  меняется от нуля до бесконечности. При фиксированном значении  $t$  комплекс  $T$  изменяется от  $-\infty$  до  $\infty$  при изменении  $r$  от  $\infty$  до 0. После подстановки (1.2) в (1.1) получается сис-

$$\begin{aligned} 1/2e^{-2\tau}\dot{U}-U(U+\dot{U})+V(U'-V)&=2P+\dot{P}+\dot{U}+U'' \\ 1/2e^{-2\tau}\dot{V}-U\dot{V}+VV'&=-P'+\dot{V}+V''+2\dot{V}+2U' \\ V'&=\dot{U} \end{aligned} \quad (1.3)$$

где точка означает дифференцирование по  $T$ , а штрих — по  $\varphi$ .

При стационарном течении  $V'=0$ ,  $V=V_0=\text{const}$ . Из  $P'=2U'$  следует

$$P=2U+C_1 \quad (1.4)$$

и в случае  $V_0=0$  уравнение для  $U$  принимает вид

$$U''=C-4U-U^2 \quad (1.5)$$

где  $C=-2C_1$ . Свойства решений уравнений (1.4), (1.5) сравнительно полно изучены применительно к задаче о течении в плоском диффузоре [5].

**2. Бифуркации решений в задаче об источнике.** Уравнение (1.5) имеет классическое решение  $U=U_0=\text{const}$ ,  $C=C_0=4U_0+U_0^2$ , соответствующее осесимметричному течению, вызванному точечным источником с расходом  $Q$ . Если ввести число Рейнольдса  $\text{Re}=Q/\nu$ , то  $U_0=\text{Re}/(2\pi)$ .

Фиксируем значение числа Рейнольдса и линеаризуем уравнение (1.5) вблизи  $U=U_0$ :  $U=U_0+u$ ,  $|u|\ll 1$ . Линеаризованное уравнение имеет вид

$$u''+(4+2U_0)u=0$$

Оно имеет нетривиальные решения, удовлетворяющие требованию периодичности по  $\varphi$ , при условии  $4+2U_0=m^2$ ,  $m=1, 2, \dots$ . При этом с учетом произвола выбора начала координат по углу  $\varphi$  собственная функция  $u=A \sin(m\varphi)$ , а бифуркационные значения числа Рейнольдса определяются формулой

$$\text{Re}_{*m}=\pi(m^2-4); m=1, 2, \dots$$

Таким образом, первая бифуркация происходит при  $\text{Re}_{*1}=-3\pi$  (отрицательные числа Рейнольдса отвечают стоку, а положительные — источнику). Наиболее неожиданно то, что ноль тоже служит бифуркационным значением числа Рейнольдса ( $m=2$ ), т. е. при сколь угодно малых расходах решение не единственно.

Для выяснения характера бифуркации используем метод разложения по амплитуде  $A$  как по малому параметру [8]. Используя для удобства выкладок вместо числа Рейнольдса величину  $C$  в качестве промежуточного параметра, будем разыскивать решение вблизи точки  $(U_0^*, C_0^*)$  в виде ряда

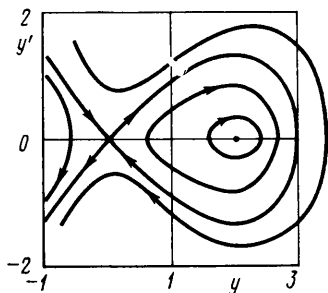
$$\begin{aligned} U &= U_0^* + AU_1(\varphi) + A^2U_2(\varphi) + \dots \\ C &= C_0^* + AC_1 + A^2C_2 + \dots \\ U_0^* &= \text{Re}_{*m}/(2\pi), C_0^* = 4U_0^* + U_0^{*2} = 1/4(m^2 - 16) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Подставляя ряды (2.1) в уравнение (1.5) и приравнявая нулю коэффициенты при степенях  $A$ , получим систему рекуррентных уравнений

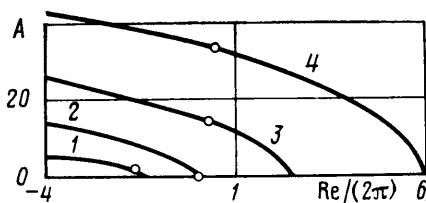
$$U_i'' + m^2U_i = f_i(C_0^*, \dots, C_{i-1}; U_0^*, \dots, U_{i-1}); i=1, 2, \dots$$

Значения коэффициентов  $C_i$  определяются из требования ортогональности правой части собственной функции  $U_i = \sin(m\varphi)$ . В силу присущей задаче симметрии относительно преобразования  $\varphi \rightarrow -\varphi$  коэффициенты с нечетными индексами оказываются равными нулю. После несложных выкладок находим

$$U_2 = -1/12 m^{-2} [1 + 2 \cos(2m\varphi)], C_2 = 5/12$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Определяя число Рейнольдса и в случае неосесимметричных течений по расходу, имеем

$$\text{Re} = \int_0^{2\pi} U d\varphi = 2\pi \langle U \rangle$$

$$\text{Re} = \text{Re}_m - \frac{1}{6} \pi m^{-2} A^2 + O(A^4)$$

Таким образом, неосесимметричные решения бифурцируют от осесимметричного в сторону уменьшения числа Рейнольдса.

Если амплитуды не малы, то колебания по  $\varphi$  становятся ангармоническими и выражаются через эллиптические функции. Основные свойства решений становятся наглядными, если воспользоваться методом фазовой плоскости. Подстановками

$$U = \sqrt{C+4}(y-1) - 2, \quad \theta = \sqrt{2}(C+4)^{1/4} \varphi$$

уравнение (1.5) приводится к виду

$$2y'' = 2y - y^2 \quad (2.2)$$

Умножение на  $y'$  и интегрирование дает

$$(y')^2 = y^2 - y^3/3 + B$$

Типичные интегральные кривые на фазовой плоскости  $\{y, y'\}$  изображены на фиг. 1. Периодическим решениям отвечают замкнутые линии. Величина  $B$  меняется от  $-2/3$  для бесконечно малых колебаний вблизи  $y=2$  до нуля для сепаратрисы  $y_c = 3 \text{ch}^{-2}(\theta/2)$ . Для колебаний конечной амплитуды величину  $A$  удобно определить как  $(U_{\max} - U_{\min})/2$ . В момент бифуркации из точки  $y=2$  рождается цикл, с увеличением  $A$  его размер возрастает и при  $A \rightarrow \infty$  цикл «влипают» в петлю сепаратрисы. Асимптотическая зависимость между  $A$  и  $\langle U \rangle$  определяется соотношениями

$$\langle U \rangle = \sqrt{C+4}(\langle y \rangle - 1) - 2, \quad A = \sqrt[3]{2} \sqrt{C+4}$$

$$\langle y \rangle = \frac{1}{\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} y_c d\theta = \frac{12}{\Delta}, \quad \Delta = \frac{2\pi \sqrt{2}}{m} (C+4)^{1/4}$$

где  $\Delta$  — период по  $\theta$ . В итоге имеем

$$\langle U \rangle = -2/3 A (1 - 3\sqrt{3}\pi^{-1} m A^{-1/2}) + O(1)$$

Асимптотические зависимости при малых и больших амплитудах сопрягаются на основе численных расчетов (фиг. 2).

При больших амплитудах профиль радиальной скорости по углу имеет форму цветка, число лепестков которого равно  $m$ , ширина лепестков пропорциональна  $A^{-1/2}$ , а максимальная скорость вытекания в 2 раза превосхо-

дит максимальную скорость вытекания. Другими словами, на фоне практически равномерного стока из особой точки истекают узкие сильные струи.

Таким образом, анализ, казалось бы, простейшей задачи об источнике обнаруживает удивительный факт — существование счетного числа стационарных решений при всех числах Рейнольдса. Это новое, можно сказать, парадоксальное свойство уравнений Навье — Стокса. Заметим, что счетное число решений существует, в частности, при  $Re=0$ . При этом решения с  $m \geq 3$  отвечают не малым значениям  $U$ . Хотя  $\langle U \rangle = 0$ , скорости на участках втекания и вытекания конечны и при  $m \gg 1$  весьма велики. Однако, поскольку значение  $Re=0$  является бифуркационным, в любой окрестности  $|U| < \varepsilon$  существуют два решения, отвечающие  $m=0$  и  $m=2$ .

Найденное множество стационарных решений уравнений Навье — Стокса, связанное с особой точкой  $r=0$ , принципиально отличается от мультиполей, например, приведенного ниже вида (3.1), для которых угловая и радиальная зависимости согласованы одинаковым индексом  $m$ . Для всех найденных решений радиальная зависимость одна и та же  $\sim r^{-1}$ . Кроме того, мультиполи вида (3.1) могут иметь произвольные интенсивности, тогда как для каждого данного числа Рейнольдса амплитуды нового семейства образуют вполне определенную дискретную последовательность, соответствующую фиг. 2. В силу обязательной автомодельности при заданном расходе  $Q$  никаких других решений не существует. Таким образом, для выделения какого-либо определенного решения необходимо задать число Рейнольдса  $Re$  и дискретный параметр  $m$ .

**3. Нестационарные автомодельные решения.** Можно убедиться, что поле

$$v_r = \frac{v}{r} \left( \frac{\sqrt{V} \sqrt{t}}{r} \right)^m \cos(m\varphi); \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.1)$$

$$v_\varphi = \text{sign}(m) \frac{v}{r} \left( \frac{\sqrt{V} \sqrt{t}}{r} \right)^m \sin(m\varphi)$$

является потенциальным. Его суперпозиция с течением от вихреисточника  $v_r = v U_0 r^{-1}$ ,  $v_\varphi = v V_0 r^{-1}$  также представляет собой потенциальное решение уравнений Эйлера, а в силу отсутствия границ — и уравнений Навье — Стокса. Эти решения при  $m > 0$  имеют сильную особенность в начале координат, а при  $m < 0$  не убывают на бесконечности. Очевидно, что переходные траектории между найденными стационарными решениями не содержатся в этом потенциальном классе. Около точек бифуркации осесимметричное и неосесимметричное стационарные решения близки между собой. Поэтому естественно предположить, что переходные траектории будут в определенном смысле малы.

Положим  $U = U_0 + u$ ,  $V = V_0 + v$ ,  $P = P_0 + q$ . Интересуясь асимптотическим поведением при  $T \gg 1$  и поэтому отбрасывая члены, содержащие  $\exp(-2T)$ , линеаризуем уравнения (1.3) относительно  $u$ ,  $v$ ,  $q$

$$\begin{aligned} V_0(u' - 2v) - U_0(2u + \dot{u}) &= 2q + \dot{q} + \ddot{u} + u'' \\ V_0 v' - U_0 \dot{v} + q' &= \ddot{v} + v'' + 2\dot{v} + 2u', \quad v' = \dot{u} \end{aligned}$$

Разыскивая решения в нормальной форме  $u = \exp(\lambda T - im\varphi)$ , находим

$$\begin{aligned} v &= i\lambda m^{-1} u \\ q &= [(\lambda + 2)(1 - \lambda^2 m^{-2}) - U_0 \lambda^2 m^{-2} - iV_0 \lambda m^{-1}] u \end{aligned}$$

Величина  $\lambda$  определяется из характеристического уравнения

$$[(\lambda + 2)^2 + U_0(\lambda + 2) - m^2 + imV_0](m^2 - \lambda^2) = 0$$

Корни  $\lambda = \pm m$  соответствуют описанным выше потенциальным возмущениям. Для оставшейся пары корней имеем выражения

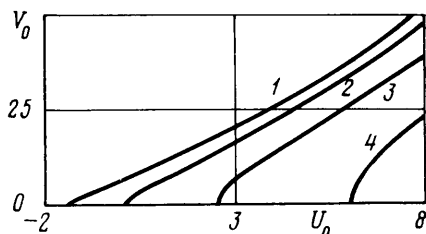
$$\lambda = -2^{-1/2} U_0 \pm (1/4 U_0^2 + m^2 - im V_0)^{1/2}$$

У корня, отвечающего знаку минус перед радикалом, вещественная часть  $\lambda_r$  всегда отрицательна. У другого корня  $\lambda_r$  меняет знак при  $m V_0 = \pm (U_0 + 4)(2U_0 + 4 - m^2)^{1/2}$ .

Вид этих нейтральных кривых показан на фиг. 3. В критической ситуации  $\lambda_i = -m V_0 / (U_0 + 4)$ . Если  $V_0 = 0$ , то  $U_{0*} = 1/2(m^2 - 4)$  и нейтральные возмущения стационарны, что согласуется с результатами разд. 2. При  $V_0 \neq 0$  нейтральные возмущения имеют колебательный характер. Течение имеет форму спиральных волн, положение гребня которых описывается уравнением

$$\varphi = -\frac{V_0}{2(U_0 + 4)} \ln \frac{vt}{r^2} = \omega T$$

$$\omega = -\frac{V_0}{U_0 + 4}$$



Фиг. 3

а число рукавов равно  $m$ .

Чтобы выяснить, каково поведение возмущений вблизи нейтральных кривых, фиксируем величину  $V_0$  и вычислим производную от  $\lambda$  по  $U_0$  при  $U_0 = U_{0*}$ .

$$\frac{\partial \lambda}{\partial U_0} = -\frac{2[(U_0 + 4)^3 + m^2 V_0^2] - im V_0 U_0 (U_0 + 4)}{(U_0 + 4)^4 + 4m^2 V_0^2}$$

Так как  $U_{0*} \geq -3/2$ , производная  $\partial \lambda_r / \partial U_0$  отрицательна. Следовательно, при  $U_0 < U_{0*}$  (левее соответствующих кривых на фиг. 3) возмущения нарастают, а при  $U_0 > U_{0*}$  затухают. Выясним теперь, в какую сторону ветвятся установившиеся колебательные режимы.

**4. Бифуркация автоколебаний от вихреисточника.** Для компактности выкладок введем функцию тока  $\Psi$ :  $U = \Psi'$ ,  $V = \Psi$ . Тогда система (1.3) сводится к уравнению относительно  $\Phi = \Psi'' + \dot{\Psi}$

$$1/2 e^{-2T} \ddot{\Phi} + \dot{\Psi} \Phi' - \Psi' \dot{\Phi} - 2\Psi' \Phi = \Phi'' + \ddot{\Phi} + 4\dot{\Phi} + 4\Phi \quad (4.1)$$

Вихреисточнику отвечает решение  $\Psi_0 = U_0 \Phi + V_0 T$ . Автоколебательное решение ищется в виде  $\Psi = \Psi_0 + \Psi(\chi)$ ,  $\chi = \psi - \omega T$ , при этом первый член в уравнении (4.1) отбрасывается. Подстановка в (4.1) дает

$$(1 + \omega^2) \psi^{IV} - [V_0 + \omega(U_0 + 4)] \psi''' + (2U_0 + 4) \psi'' = -((\psi')^2)'$$

Интегрируя и учитывая, что должно допускаться однородное решение  $\psi = 0$ , получим для  $u = \psi'$

$$(1 + \omega^2) u'' - [V_0 + \omega(U_0 + 4)] u' + (2U_0 + 4) u = -u^2 \quad (4.2)$$

Представляя решение в виде ряда по амплитуде, получим

$$u = A u_1 + A^2 u_2 + \dots, \quad U_0 = U_{0*} + A^2 U_2 + \dots$$

$$\omega = \omega_0 + A^2 \omega_2 + \dots, \quad u_1 = \sin(m\chi)$$

$$u_2 = -[3 + \cos(2m\chi)] / [6m^2(1 + \omega_0^2)]^{-1}$$

Уравнение для  $u_3$  имеет вид

$$(1 + \omega_0^2)(u_3'' + m^2 u_3) = -2u_1 u_2 - 2\omega_0 \omega_2 u_1'' - 2U_2 u_1 + [\omega_2(U_{0*} + 4) + \omega_0 U_2] u_1'$$

Из требования разрешимости следует

$$\begin{aligned}\omega_2 &= -\omega_0 U_2 / (U_0 + 4), \quad U_2 = 5bd \\ b &= [12m^2(1 + \omega_0^2)]^{-1}; \quad d = [1 + \omega_0^2 m^2 / (U_0 + 4)]^{-1} \\ \langle U \rangle &= U_0 + A^2(U_2 + \langle u_2 \rangle) + O(A^4) = \\ &= U_0 - A^2 b(6 - 5d) + O(A^4)\end{aligned}$$

Как и следовало ожидать, при  $V_0 = \omega_0 = 0$  это совпадает с результатом разд. 2. Поскольку  $U_0 \geq -3/2$ , то выражение в фигурных скобках в формуле для  $\langle U \rangle$  положительно для любых значений  $V_0$  и  $m$ . Таким образом, бифуркация автоколебательных решений тоже происходит в сторону уменьшения чисел Рейнольдса.

В случае автоколебаний немалой амплитуды подстановки  $\omega = -V_0 / (U_0 + 4)$ ,  $u = (U_0 + 2)y$ ,  $\theta = [(2U_0 + 4)/(1 + \omega^2)]^{1/2}(\varphi - \omega T)$  приводят уравнение (4.2) к уравнению (2.2). Поэтому колебательные неосесимметричные решения качественно ведут себя так же, как и стационарные. При больших амплитудах формируется волновой режим в виде спирального солитона, имеющего  $m$  рукавов.

Следует подчеркнуть необычность найденных автоколебаний, периодических по переменной  $T$ , но не по физическому времени  $t$ . В соответствии с (2) период линейно растет со временем и движение становится квазистационарным. Однако если  $\exp(4\pi/\omega) - 1 \ll 1$ , то изменение периода за одно колебание мало и волна бежит с почти постоянной угловой скоростью.

**5. Начальная эволюция вдали от источника.** Автомоделные колебания, как нейтральные, так и эволюционирующие, имеют характер волн, распространяющихся от особой точки. До сих пор рассматривался случай  $T \gg 1$ , когда волновые возмущения уже охватывают область течения и выходят на асимптотический режим. Однако представляет интерес рассмотреть этап эволюции, когда  $r > \sqrt{vt}$ , т. е. на таких расстояниях, куда возмущения от источника еще не дошли. Введем вместо  $T$  переменную  $\tau = vtr^{-2}$ . Учитывая, что  $\partial/\partial T = 2\tau \partial/\partial \tau$ , из (4.1) получим

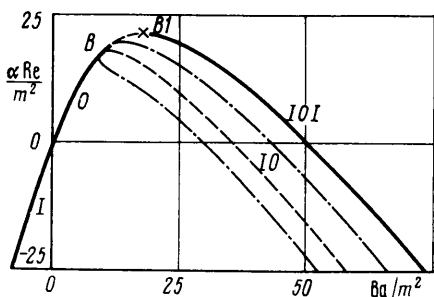
$$\begin{aligned}\Phi_\tau - 2\Psi'\Phi + 2\tau(\Phi'\Psi_\tau - \Psi'\Phi_\tau) &= \Phi'' + 4\Phi + \\ + 2\tau(2\tau\Phi_\tau + 4\Phi)_\tau, \quad \Phi &= \Psi'' + 2\tau(2\tau\Psi_\tau)_\tau\end{aligned}$$

где индекс  $\tau$  означает дифференцирование. Пренебрегая линейными по  $\tau$  членами и линеаризуя около  $\Psi_0$ , находим

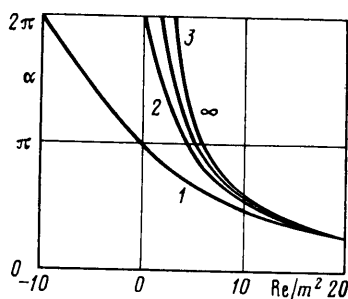
$$\Phi_\tau = \Phi'' - V_0\Phi' + (2U_0 + 4)\Phi$$

Откуда, принимая для возмущений нормальную форму  $\Phi = \exp(\mu\tau - im\varphi)$ , определяем инкремент  $\mu = 2U_0 + 4 - m^2 + imV_0$ . Следовательно, на начальном этапе возмущения ведут себя противоположным образом по сравнению с асимптотическим поведением. При  $U_0 > U_0^*$  они нарастают, а при  $U_0 < U_0^*$  затухают. Таким образом, полная эволюция всегда носит мономонотонный характер.

**6. Новые свойства течения в диффузоре.** Задача об источнике тесно связана с задачей о течении в плоском диффузоре. Действительно, выше было показано, что при достаточно больших интенсивностях источника неосесимметричные течения становятся знакопеременными. Если выбрать два значения угловой координаты, где скорость обращается в ноль, и считать, что там расположены стенки диффузора, то получим одно из решений задачи Джефффри — Гамеля. Хотя эта задача весьма детально исследована [3—5, 9], некоторые ее свойства остались невыясненными. Например, Бэтчелор указывает на трудность определения закономерности возрастания числа решений с ростом критерия Рейнольдса, а в [9] содержатся неточности, касающиеся последовательности возникновения симметричных и несимметричных решений с обратными токами. Здесь приводятся ре-



Фиг. 4



Фиг. 5

зультаты анализа и численных расчетов, проливающие определенный свет на эти вопросы.

Обозначим величину угла между стенками диффузора через  $\alpha$ . Следуя [9], число Рейнольдса  $Re$  определим как отношение расхода к вязкости. Но поскольку существует идущая еще от Гамеля традиция использовать в качестве характерного масштаба максимальное значение скорости  $v_{r \max}$ , введем также безразмерный комплекс

$$Ba = \frac{1}{4} \alpha^2 r v^{-1} v_{r \max}$$

При достаточно малых  $\alpha$  комплекс  $Ba$  (или  $\alpha Re$ ) — единственный безразмерный параметр, от которого зависит структура решения [5]. Полезно ввести еще одну безразмерную характеристику течения

$$c_p = \alpha^4 r^2 \langle p - p_\infty \rangle (\rho v^2)^{-1}$$

Угловые скобки означают осреднение по угловой координате. Величина  $c_p$ , таким образом, характеризует изменение по  $r$  среднего давления. При малых  $\alpha$  комплекс  $c_p$  также является универсальной переменной.

Результаты расчетов представлены на фиг. 4 для угла раствора  $\alpha = 10^\circ$ . В полном соответствии с уже известными свойствами при  $Ba < Ba_*$  существует единственное решение, соответствующее течению в одном направлении — втекающему ( $I$ ) при  $Ba < 0$  и вытекающему ( $O$ ) при  $0 < Ba \leq Ba_*$ .

Точка  $B$  на фиг. 4 является бифуркационной. Поскольку угол достаточно мал, ее параметры близки к известным предельным величинам  $\alpha Re_* \approx 18,8$  [9],  $Ba_* = 10,3$  [5]. При переходе через точку  $B$ , во-первых, исходное симметричное относительно срединной плоскости течения диффузора перестает быть однонаправленным и переходит в режим с возрастными течениями у обеих стенок ( $IOI$ ). Во-вторых, происходит бифуркация пары асимметричных решений с возвратным течением у одной из стенок ( $IO$  и  $OI$ ), различающихся с точностью до отражения относительно срединной плоскости.

Покажем, что бифуркационных точек типа  $B$  счетное множество:  $B(1)$ ,  $B(2)$ , ...,  $B(m)$ , ..., где  $m$  — число участков вытекания. Пусть угол  $\alpha$  достаточно мал, чтобы считать свойства решения зависящими только от комплекса  $Ba$ . Если рассмотреть диффузор с углом раскрытия  $\alpha/m$ , то число Рейнольдса, отвечающее точке  $B$ , будем в  $m$  раз больше. Соединим далее  $m$  уменьшенных диффузоров вместе и уберем промежуточные стенки. Это можно сделать, поскольку в критической ситуации не только скорость, но и ее производная по углу на стенке равны нулю. В результате соединения расход увеличится еще в  $m$  раз. Имеем

$$Re_*(m) = m^2 Re_*(1), Ba_*(m) = m^2 Ba_*(1)$$

Аналогичное построение можно выполнить для асимметричных режимов, поскольку профиль скорости течения типа  $IO$  соответствует полному периоду эллиптической функции. Поэтому линия на фиг. 4 отвечает не

только этому режиму, но и любому режиму  $(IO)_m$  (существенно, что по осям координат отложены  $\propto Re/m^2$  и  $Ba/m^2$ ).

Для симметричных режимов такого подобия нет. На фиг. 4 штрих-пунктиром показаны результаты численного расчета при  $m=2$  соответствующих зависимостей для режимов  $OIO$  (слева) и  $IOIOI$  (справа). При  $m>2$  характер зависимостей  $Re(Ba)$  сохраняется качественно таким же, но с ростом  $m$  расстояние между ветвями на фиг. 4 убывает пропорционально  $m^{-1}$  и все они в пределе приближаются к линии  $IO$ .

Таким образом, карта решений на плоскости параметров  $\{Re, Ba\}$  достаточно проста. Решения расположены изолированными группами по четыре в каждой. Решения, принадлежащие одной группе, переходят друг в друга в бифуркационной точке  $B(m)$ . Число решений с увеличением  $Ba$  растет асимптотически по закону

$$N=4m=4 \text{ int}\{[Ba/Ba^*(1)]^{1/2}\}$$

где  $\text{int}$  — целая часть. С ростом  $Re$  число решений «уменьшается», но при любом значении  $Re$ , в том числе при  $Re=0$ , существует счетное их число. На каждой группе связанных решений величина расхода ограничена сверху и достигает максимума на решении с наибольшим числом участков втекания (точка  $B_1$  на фиг. 4 при  $m=1$ ).

При монотонном увеличении расхода через диффузор в момент прохождения точки  $B_1$  (и аналогичных при  $m>1$ ) поле скорости испытывает скачок, в результате которого меняется как амплитуда, так и число колебаний в зависимости радиальной скорости от угла.

Свойства устойчивости решений существенно зависят от того, какую характеристику течения считать заданной. Если заданной величиной считать  $Ba$ , то в силу структуры кривых на фиг. 4 и общих теорем [8] в каждой группе из четырех решений устойчивыми (относительно возмущений из специального автомодельного класса) являются решения с минимальным числом колебаний профиля скорости. В первой четверке это совокупность режимов  $I$ ,  $O$  и  $IO$ ,  $OI$ . В следующей четверке — верхняя ветвь решений типа  $OIO$  и решения  $IOIO$ ,  $OIOI$  и т. д.

Однако задание величины максимальной скорости с физической точки зрения кажется искусственным. Представляется более естественным задавать расход или градиент давления, подразумевая, что диффузор является идеализацией части канала, соединяющего емкость большого давления с емкостью малого давления. В подобной конструкции с гидравлической точки зрения наибольшее значение имеет зависимость расхода от перепада давлений.

На автомодельном участке диффузора зависимость  $c_p(Re)$  имеет на первый взгляд парадоксальный характер. Например, для диффузора с углом раскрытия  $10^\circ$  величина  $c_p$  ограничена сверху значением 11,3, достигаемым при  $\propto Re \approx 3,65$ . При дальнейшем увеличении расхода перепад давления уменьшается, обращается в ноль при  $\propto Re \approx 8,4$ , а затем становится отрицательным! Другими словами, для обеспечения достаточно большого расхода вытекающей жидкости около вершины диффузора должно быть создано разрежение.

Здесь проявляется коренное различие между ползущими течениями вязкой жидкости, в которых для преодоления трения давление вниз по потоку должно падать, и течением идеальной жидкости, в котором в соответствии с теоремой Бернулли уменьшение скорости вниз по течению должно сопровождаться повышением давления. Все становится особенно наглядным, если вновь рассмотреть диффузор как переходной участок между двумя большими емкостями. Такой переходник в некотором сечении имеет пережим и при больших скоростях давление вниз по течению сначала падает, достигает минимального значения в горле сопла, а затем возрастает до величины давления в приемном резервуаре. Автомодельное решение

аппроксимирует течение на участке возрастания давления. Из сказанного следует, что параметр  $c_p$  характеризует лишь величину перепада давления на диффузорной части канала, соединяющего резервуары, в то время как расход является единой характеристикой течения как в его автомодельной части, так и на других участках. Поэтому задаваемой извне величиной целесообразно считать именно расход. В этом случае свойства устойчивости решений будут другими. На фиг. 4 устойчивым решениям для первой четверки соответствуют сплошные линии, а неустойчивым — штриховые.

Скачкообразное изменение поля скорости при увеличении расхода может быть связано с явлением отрыва. В переходном канале отрыв происходит вблизи горла сопла в неавтомодельной области. Если предположить, что течение при отрыве остается ламинарным или становится таковым вниз по потоку, то достаточно далеко отрывное течение должно соответствовать автомодельному решению со знакопеременным профилем радиальной скорости. Например,  $IOI$  отвечает симметричному отрыву у обеих стенок. Предположение ламинарности, конечно, весьма сильное и необходим анализ устойчивости автомодельных решений к возмущениям более общего характера.

Когда угол раствора диффузора не мал, качественно картина сохраняется, хотя геометрическое подобие, использованное на фиг. 4, достигается асимптотически при  $Re \gg 1$  и  $m \gg 1$ . Зависимость критических значений, соответствующих точкам  $B(m)$ , от угла  $\alpha$  приведена на фиг. 5. Однонаправленное течение существует в области, лежащей левее кривой для  $m=1$ , и при числах Рейнольдса, отвечающих кривым для  $m=2, 3, \dots$ . При  $\alpha \rightarrow 2\pi$  решения, соответствующие кривым на фиг. 5, переходят в решения для свободного источника (см. точки, отмеченные на фиг. 2). При этом бифуркационные значения параметров для течения в диффузоре, вообще говоря, не переходят в бифуркационные для свободного источника, за исключением случая  $m=2$ .

**7. Обсуждение.** Наиболее необычным результатом данной работы является обнаружение множественности режимов истечения из линейного источника любого заданного расхода. Все они бифурцируют от осесимметричного течения, которое оказывается неустойчивым по отношению к малым автомодельным возмущениям с любым азимутальным числом  $m$ . Эти результаты относятся к точечному плоскому вихреисточнику, порождающему движение с обязательной автомодельностью. Их естественно интерпретировать как асимптотические для реального источника на расстояниях, с которых он представляется точечным. Можно предположить, что в этой ситуации детальная структура потока, порожденного реальным источником, забывается и движение определяется лишь величинами, сохраняющимися вниз по течению, т. е. интегралами сохранения. Именно такой подход принят в теории струй вязкой жидкости [10, 11]. Для вязкой жидкости интегралами сохранения служат потоки массы, импульса и момента импульса. Как известно [12], для плоского течения с заданным потоком импульса скорость убывает как  $r^{-1/2}$ . Когда поток импульса равен нулю, главными становятся потоки массы и момента импульса. Теперь скорость убывает как  $r^{-1}$ , что и характеризует течение в стационарном вихреисточнике. Приведенные соображения показывают, что величиной, характеризующей интенсивность источника, должен быть взят именно расход, хотя определение числа Рейнольдса, например, по максимуму модуля скорости  $Re_{\max} = |v_{r \max}| r / \nu$  обнаруживает более естественную картину неустойчивости: при каждом фиксированном  $Re_{\max}$  растущими являются возмущения с азимутальным числом, не превышающим значения  $m$ .

Для выяснения вопроса, какие из найденных решений асимптотически реализуются вдали от конечного источника, необходимо рассмотреть проблему устойчивости по отношению к пространственному росту возмущений, что представляет собой неавтомодельную задачу, выходящую за рамки настоящей работы. Впрочем, исследование автомодельной эволюции в це-

лом на основе системы (1.3) также до сих пор не проведено и его результаты трудно предвидеть.

Заметим, что в случае отсутствия пространственного роста возмущений причина несимметрии течения, очевидно, заложена в устройстве самого источника. Например, при стоке в отверстие обычно наблюдаются осцилляции по углу, имеющие, вероятно всего, капиллярное происхождение. Связанные с ними спиральные волны на периферии течения могут соответствовать полученным здесь решениям, будучи автомоделным следом этих колебаний.

Среди других возможных приложений упомянем так называемую пальцевую неустойчивость и спиральную структуру галактик. При закачке воды в пласт для более полного извлечения нефти возникает нежелательный эффект. Вода, вместо того чтобы вытеснять нефть, прорывается сквозь нее струями. Неустойчивость фронта вода — нефть объясняется различием их свойств. Но дальний след подобной неустойчивости коррелирует с полученными здесь решениями для стока с выбросами жидкости узкими струями.

Если галактику идеализированно представить в виде материальной плоскости с центральным вихрестокком, то реализация неосесимметричных режимов может привести к возникновению полос повышенной плотности, вдоль которых выносятся часть вещества, стекающего к центру в промежутках. Решение с азимутальным числом  $m=2$ , ветвящееся при малых расходах, моделирует в рамках этой схемы развитие двухрукавной структуры галактики.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Физматгиз, 1970. 288 с.
2. *Темам Р.* Уравнения Навье — Стокса. Теория и численный анализ: Пер. с англ. М.: Мир, 1981. 408 с.
3. *Jeffery G. B.* Two-Dimensional Steady Motion of a Viscous Fluid // *Phil. Mag. (Ser. 6)*. 1915. V. 29. № 172. P. 455–465.
4. *Hamel G.* Spiralförmige Bewegungen Zaher Flüssigkeiten // *J. Deut. Math. — Verlin.*, 1916. B. 25. H. 1/3. S. 34–60.
5. *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости: Пер. с англ. М.: Мир, 1973. 758 с.
6. *Гольдштик М. А.* Вихревые потоки. Новосибирск: Наука, 1981. 366 с.
7. *Седов Л. И.* Методы размерности и подобия в механике. М.: Наука, 1977. 438 с.
8. *Иосс Ж., Джозеф Д.* Элементарная теория устойчивости и бифуркаций: Пер. с англ. М.: Мир, 1983. 300 с.
9. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 73 с.
10. *Вуллис Л. А., Кашкаров В. П.* Теория струй вязкой жидкости. М.: Наука, 1965. 431 с.
11. *Мартыненко О. Г., Коровкин В. Н., Соколов Ю. А.* Теория ламинарных вязких струй. Минск.: Наука и техника, 1985. 286 с.
12. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя: Пер. с нем. М.: Наука, 1974. 711 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию  
5.XI.1987