

УДК 532.51.013.4

УСТОЙЧИВОСТЬ И ЗАКРИТИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ КВАЗИДВУМЕРНЫХ СДВИГОВЫХ ТЕЧЕНИЙ ПРИ НАЛИЧИИ ВНЕШНЕГО ТРЕНИЯ (ТЕОРИЯ)

МАШИН Д. Ю.

В работе [1] продемонстрировано определяющее влияние внешнего (придонного) трения на устойчивость квазидвумерных сдвиговых течений несжимаемой жидкости и развита качественная теория линейной устойчивости таких течений. Результаты этой работы представляют особый интерес для исследования нелинейной эволюции вихревых возмущений, возникающих на неустойчивом сдвиге. Разработанный в [2, 3] метод разложения по степеням малой, но конечной амплитуды возмущения, приводящий к уравнению Ландау [4] для этой амплитуды, применим лишь для медленно растущих возмущений. В то же время характер закритического течения определяется в первую очередь возмущением с максимальным линейным инкрементом, которое, вообще говоря, не является медленно растущим. Сделать инкремент малым можно с помощью вязкости [5, 6], стратификации [7, 8], β -эффекта [9] или внешнего трения [1]. Принципиальное отличие последнего случая (с точки зрения нелинейной теории) состоит в том, что растущими остаются возмущения с волновыми числами, близкими к максимуму дисперсионной кривой уравнения Рэлея, а не к нейтральным волновым числам, как в первых трех. Кроме того, не повышается порядок уравнений, как при включении сильной вязкости ($Re \sim 1$), а сама постановка задачи становится более реалистической, поскольку в квазидвумерном течении всегда присутствует внешнее (придонное) трение.

Подробное экспериментальное исследование двумерных сдвиговых течений с внешним трением описано в [10]. Анализ, проведенный в ней с привлечением экспериментальных данных других авторов, подтверждает выводы [1], касающиеся линейной устойчивости. Результаты [10], относящиеся к исследованию закритических режимов, дают материал для сравнения с теоретической моделью, построенной в настоящей работе.

1. Пусть квазидвумерное течение жидкости описывается уравнением

$$\partial_t \Delta \Psi + [\Delta \Psi, \Psi] = \varepsilon \nu \Delta^2 \Psi - \lambda \Delta \Psi + \lambda (1+s) f$$

$$\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2, [F, G] = \partial_x F \partial_y G - \partial_y F \partial_x G$$
(1.1)

Здесь Ψ — функция тока, $f(y)$ — «внешняя сила», направленная вдоль оси x , λ — коэффициент внешнего трения, ε — малый параметр, $\varepsilon \nu$ — малая вязкость. Все величины, кроме ε , считаются порядка единицы. Уравнение (1.1) с $\varepsilon = 0$ имеет очевидное решение, соответствующее основному течению со скоростью, направленной вдоль оси x и зависящей только от y

$$\Psi = \Psi_0 = (1+s) \iint f dy'' dy' \quad (1.2)$$

Обезразмерим силу f так, чтобы основное течение (1.2) теряло устойчивость при $s=0$, тогда s будет иметь смысл надкритичности $s = Re/Re_* - 1$. Кроме того, критическое значение числа Рейнольдса по внешнему трению [1] $Re_* = U_* / \lambda D$ оказывается обратным к обезразмеренному значению λ .

Считая надкритичность малой, можно искать решение (1.1) в виде малого и медленно меняющегося во времени возмущения на фоне основного течения. Положим

$$s = \varepsilon s_1 + \varepsilon^2 s_2 + \dots, \Psi = \psi_0 + \varepsilon \psi_1 + \varepsilon^2 \psi_2 + \dots$$

Собирая члены одного порядка по ϵ , будем получать уравнения для неизвестных функций ψ_i .

Функция ψ_0 имеет вид (1.2), где $s=0$. Для ψ_1 получается уравнение

$$\partial_t \Delta \psi_1 + [\Delta \psi_0, \psi_1] + [\Delta \psi_1, \psi_0] + \lambda \Delta \psi_1 = v \Delta^2 \psi_0 + \lambda s_1 f \quad (1.3)$$

Его решение состоит из частного решения $\psi_{10}(y)$ неоднородного уравнения (1.3) и общего решения $\psi_{11}(x, y, t)$ однородного

$$\psi_{10} = \frac{v}{\lambda} U' + s_1 \int U dy, \quad \psi_{11} = A e^{i\alpha(x-Ct)} \varphi_{11}(y) + \text{к. с.} \quad (1.4)$$

Здесь через $U = \psi_0'$ обозначен профиль скорости основного течения при $s=0$, т. е. при значении числа Рейнольдса, равном критическому; A — пока не определенная константа. Уравнение для φ_{11} , следующее из (1.3), (1.4), есть уравнение Рэлея [5]

$$\varphi_{11}'' - \frac{U''}{U - i\lambda/\alpha - C} \varphi_{11} - \alpha^2 \varphi_{11} = 0 \quad (1.5)$$

Решение (1.5) с соответствующими граничными условиями дает дисперсионное соотношение $-i\alpha c = \lambda - i\alpha C = \gamma(\alpha)$, из которого находится инкремент $\text{Im}(\alpha C)$ роста возмущения (через c обозначена комплексная фазовая скорость, которую имело бы соответствующее возмущение в отсутствие внешнего трения). Поскольку масштабы обезразмеривания выбраны так, что при $s=0$ число Рейнольдса равно критическому, инкремент наиболее быстро растущего возмущения должен обращаться в нуль (возмущения с другими волновыми числами затухают). Это означает, что $\text{Im} C = 0$. Для антисимметричных профилей скорости $U(-y) = -U(y)$ вещественная часть фазовой скорости возмущений C тоже равна нулю. Поэтому надо положить $\lambda = \alpha_0 c_{i0}$, где $\alpha = \alpha_0$ и $c = i c_{i0}$ соответствуют максимуму дисперсионной кривой (далее индекс ноль будем опускать).

Итак, в первом порядке теории возмущений получается искажение среднего профиля плюс вихревое возмущение с неопределенной амплитудой. Эта амплитуда как функция «медленного времени» определяется из условий разрешимости для уравнений второго порядка. Запишем

$$\psi_2 = \psi_{20} + (\varphi_{21} e^{i\alpha x} + \text{к. с.}) + (\varphi_{22} e^{2i\alpha x} + \text{к. с.}), \quad A = A(t_1), \quad t_1 = t/\epsilon.$$

Тогда легко найти

$$\psi_{20} = -i \frac{|A|^2}{c_i} (\varphi_{11}' \varphi_{11}^* - \varphi_{11}^{*'} \varphi_{11}) + \frac{v^2}{\alpha^2 c_i^2} U''' + s_1 \frac{v}{\alpha c_i} U' + s_2 \int U dy \quad (1.6)$$

$$\varphi_{22}'' - \frac{2U''}{2U - i c_i} \varphi_{22} - 4\alpha^2 \varphi_{22} = \frac{-A^2}{2U - i c_i} (\varphi_{11}'^2 - \varphi_{11}'' \varphi_{11})' \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{21}'' - \frac{U''}{U - i c_i} \varphi_{21} - \alpha^2 \varphi_{21} = & \frac{1}{i\alpha} \frac{1}{U - i c_i} \left[-\frac{\partial A}{\partial t_1} (\varphi_{11}'' - \alpha^2 \varphi_{11}) - \right. \\ & \left. - i\alpha A (\varphi_{11}'' - \alpha^2 \varphi_{11}) \left(\frac{v}{\alpha c_i} U'' + s_1 U \right) + i\alpha A \varphi_{11} \left(\frac{v}{\alpha c_i} U^{iv} + s_1 U'' \right) + v A (\partial_v^2 - \alpha^2)^2 \varphi_{11} \right] \end{aligned} \quad (1.8)$$

Уравнение для ψ_{20} интегрируется сразу, давая (1.6). Уравнение (1.7) для φ_{22} не имеет фундаментальных решений, удовлетворяющих граничным условиям, потому что значения α и c , собственные для оператора левой части (1.5), не являются собственными для левой части (1.7). Значит, неоднородное уравнение (1.7) всегда имеет решение, удовлетворяющее граничным условиям. Зато левая часть (1.8) обращается в нуль подстановкой $\varphi_{21} = \varphi_{11}$. Поэтому для разрешимости уравнения (1.8) необходимо выпол-

нение условия ортогональности

$$\int_a^b \varphi_{11} F_{21} dy = 0 \quad (1.9)$$

где F_{21} — правая часть (1.8), а a и b — границы по y . Легко видеть, что (1.9) является эволюционным уравнением для амплитуды A . Это линейное уравнение первого порядка, описывающее экспоненциальный рост или затухание возмущения в зависимости от баланса надкритичности s_1 и вязкости ν . Чтобы получить нелинейное уравнение Ландау для амплитуды, следует рассмотреть стационарный в этом приближении случай $\partial A / \partial t_1 = 0$ и обратиться к следующему порядку теории возмущений. Очевидно, что уравнение Ландау получится из условия разрешимости уравнения для φ_{31} . Последнее имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi_{31}'' - \frac{U''}{U - ic_i} \varphi_{31} - \alpha^2 \varphi_{31} = \frac{1}{i\alpha} \frac{1}{U - ic_i} \left[-\frac{\partial A}{\partial t_2} (\varphi_{11}'' - \alpha^2 \varphi_{11}) + \nu (\partial_y^2 - \alpha^2)^2 \varphi_{21} + \right. \\ \left. + \left(\frac{\nu}{\alpha c_i} U^{IV} + s_1 U'' \right) i\alpha \varphi_{21} - i\alpha (\varphi_{21}'' - \alpha^2 \varphi_{21}) \left(\frac{\nu}{\alpha c_i} U'' + s_1 U \right) - \right. \\ \left. - i\alpha A (\varphi_{11}'' - \alpha^2 \varphi_{11}) \psi_{20}' + i\alpha \psi_{20}''' \varphi_{11} A + i\alpha A (\varphi_{22}' (\varphi_{11}^{*''} - \alpha^2 \varphi_{11}^*) + \right. \\ \left. + 2(\varphi_{11}^{*''} - \alpha^2 \varphi_{11}^*)' \varphi_{22}) - i\alpha A (2(\varphi_{22}'' - 4\alpha^2 \varphi_{22}) \varphi_{11}^{*'} + (\varphi_{22}'' - 4\alpha^2 \varphi_{22})' \varphi_{11}^*) \right] \end{aligned} \quad (1.10)$$

Умножив (1.10) на φ_{11} и проинтегрировав между границами, получим уравнение Ландау

$$I_0 A = s_2 I_1 A + I_2 A |A|^2$$

Выпишем коэффициенты для случая $\nu = 0$

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{1}{i\alpha} \int_a^b \frac{\varphi_{11}'' - \alpha^2 \varphi_{11}}{U - ic_i} \varphi_{11} dy \\ I_1 &= \int_a^b \frac{U'' \varphi_{11} - U (\varphi_{11}'' - \alpha^2 \varphi_{11})}{U - ic_i} \varphi_{11} dy = \alpha c_i I_0 \\ I_2 &= \int_a^b \frac{\varphi_{11}}{U - ic_i} [(\varphi_{11}'' - \alpha^2 \varphi_{11}) \chi_{20}' + \varphi_{11} \chi_{20}''' + (\varphi_{11}^{*''} - \alpha^2 \varphi_{11}^*) \chi_{22}' + \\ &+ 2(\varphi_{11}^{*''} - \alpha^2 \varphi_{11}^*)' \chi_{22} - 2(\chi_{22}'' - 4\alpha^2 \chi_{22}) \varphi_{11}^{*'} - (\chi_{22}'' - 4\alpha^2 \chi_{22})' \varphi_{11}^*] dy \\ \chi_{20} &= -\frac{i}{c_i} (\varphi_{11}' \varphi_{11}^* - \varphi_{11}^{*'} \varphi_{11}), \quad \chi_{22} = \varphi_{22} / |A|^2 \end{aligned}$$

Для антисимметричных профилей скорости эти интегралы будут вещественными.

2. Введение внешнего трения снимает трудности, связанные с критическим слоем. С другой стороны, аналитические вычисления затрудняются необходимостью решать уравнение Рэлея при $c_i \neq 0$. Это ограничивает класс профилей скорости, для которых возможно аналитическое решение, кусочно-линейными профилями, на чем основан метод приближения гладких профилей ломаными [11]. В [12] течение с кусочно-линейным профилем скорости рассмотрено в отсутствие внешнего трения, когда кубич-

ный член уравнения Ландау мал по сравнению с линейными. В данной работе будет рассмотрен кусочно-линейный профиль при наличии внешнего трения.

Положим

$$\begin{aligned} U &= -1 \quad (y \leq -1), \quad U = y \quad (-1 \leq y \leq 1) \\ U &= 1 \quad (y \geq 1) \\ U' &= \delta(y+1) - \delta(y-1) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Решение уравнения (1.5) с профилем скорости (2.1) (в области $-\infty < y < \infty$) дает дисперсионное уравнение, найденное еще Рэлеем (см., например, [6])

$$2\alpha c_i = \sqrt{e^{-4\alpha} - (2\alpha - 1)^2} \quad (2.2)$$

Функция φ_{11} имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi_{11} &= A_{11} e^{\alpha y} \quad (y \leq -1), \quad \varphi_{11} = B_{11} e^{\alpha y} + B_{11}^* e^{-\alpha y} \quad (-1 \leq y \leq 1), \quad \varphi_{11} = A_{11}^* e^{-\alpha y} \quad (y \geq 1) \\ A_{11} &= i - \sqrt{1 + c_i^2} - c_i, \quad B_{11} = i c_i A_{11} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Функция (2.3) непрерывна, но ее производная терпит разрывы в точках $y = \pm 1$, как и производная от U . У функций следующих порядков появляются уже разрывы и сингулярности, которые из-за нелинейности уравнений перемножаются между собой и в таком виде входят в интегралы, определяющие коэффициенты амплитудного уравнения. Тем не менее интегралы от таких формальных произведений сингулярных функций оказываются хорошо определенными и конечными, что и оправдывает применение схемы разложения по малой амплитуде к кусочно-линейному профилю. Для иллюстрации происходящего в интегралах «сокращения бесконечностей» приведем вычисление одного из интегралов.

Два члена в коэффициенте при αA в первом амплитудном уравнении (см. правую часть (1.8)) имеют вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\alpha c_i} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{U^{1V}}{U - ic_i} \varphi_{11}^2 - \frac{U''}{U - ic_i} \varphi_{11} (\varphi_{11}'' - \alpha^2 \varphi_{11}) \right) dy = \\ & = \frac{1}{\alpha c_i} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{U^{1V}}{U - ic_i} - \frac{U''}{(U - ic_i)^2} \right) \varphi_{11}^2 dy \end{aligned} \quad (2.4)$$

Подынтегральное выражение равно нулю всюду, кроме точек сингулярности $y = \pm 1$, поэтому достаточно проинтегрировать в пределах от $-1-0$ до $-1+0$ и от $1-0$ до $1+0$. Будем интегрировать в общем виде по частям, используя уравнение Рэлея (1.5) и учитывая обращение в нуль старших производных от U . Продолжая равенство (2.4), имеем

$$\begin{aligned} & = \frac{1}{\alpha c_i} \frac{U'''}{U - ic_i} \varphi_{11}^2 \Big|_{-1-0}^{-1+0} - \frac{1}{\alpha c_i} \int_{-1-0}^{-1+0} \left[U''' \left(\frac{2\varphi_{11}\varphi_{11}'}{U - ic_i} - \frac{U'\varphi_{11}^2}{(U - ic_i)^2} \right) + \frac{U''^2\varphi_{11}^2}{U - ic_i} \right] dy = \\ & = -\frac{1}{\alpha c_i} U'' \left(\frac{2\varphi_{11}\varphi_{11}'}{U - ic_i} - \frac{U'\varphi_{11}^2}{(U - ic_i)^2} \right) \Big|_{-1-0}^{-1+0} + \frac{1}{\alpha c_i} \int_{-1-0}^{-1+0} U'' \left[\frac{2\varphi_{11}''}{U - ic_i} - \frac{4U'\varphi_{11}\varphi_{11}'}{(U - ic_i)^2} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{2\varphi_{11}\varphi_{11}''}{U - ic_i} - \frac{U''\varphi_{11}^2}{(U - ic_i)^2} + 2 \frac{U'^2\varphi_{11}^2}{(U - ic_i)^3} - \frac{U''\varphi_{11}^2}{U - ic_i} \right] dy = \\ & = \frac{2}{\alpha c_i} \int_{-1-0}^{-1+0} U'' \left[\frac{\varphi_{11}''^2}{U - ic_i} - \frac{2U'\varphi_{11}\varphi_{11}'}{(U - ic_i)^2} + \alpha^2 \frac{\varphi_{11}^2}{(U - ic_i)^2} + \frac{U'^2\varphi_{11}^2}{(U - ic_i)^3} \right] dy \end{aligned} \quad (2.5)$$

Под знаком интеграла остались теперь члены, общий вид которых можно записать символически как $\delta\theta^n f$, где $f(y)$ — непрерывная функция, $\theta(y - y_0)$ — «единичная ступенька», а $\delta(y - y_0) = \theta' - \delta$ — дельта-функция Дирака. Интеграл от такого монома равен, очевидно, $1/n f(y_0)$. Он оказывается определенным (в общем случае это не так) благодаря соотношению $\delta = \theta'$, отражающему тот факт, что изломы φ_{11} «происходят из» изломов U и потому «имеют ту же структуру», так как φ_{11} и U связаны уравнением (1.5). Этим рассуждениям можно придать точный смысл, но можно интегриро-

вать (2.5) и не прибегая к ним. Приведем один пример

$$\int_{-1-0}^{-1+0} \frac{U''\varphi_{11}'\varphi_{11}U'}{(U-ic_i)^2} dy = \frac{1}{2} \left[\frac{U'^2\varphi_{11}\varphi_{11}'}{(U-ic_i)^2} \right]_{-1-0}^{-1+0} - \int_{-1-0}^{-1+0} U'^2 \left(\frac{U''\varphi_{11}^2}{(U-ic_i)^3} + \dots \right) dy =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{U'^2\varphi_{11}\varphi_{11}'}{(U-ic_i)^2} - \frac{1}{3} \frac{U'^3\varphi_{11}^2}{(U-ic_i)^3} \right]_{-1-0}^{-1+0} \quad (2.6)$$

Многоточием в (2.6) обозначены конечные члены, которые при интегрировании по интервалу нулевой длины дают нуль. Видно, что бесконечности сократились и результат конечен. Уровень строгости подобных вычислений легко довести до необходимого, вводя последовательности непрерывных функций, сходящихся к φ_{11} и U .

Реально сингулярности должны сглаживаться малой вязкостью. Этот эффект можно учесть, построив специальное разложение вблизи точек $y=+1$. Первое амплитудное уравнение при этом не меняется, что также подтверждает корректность вычислений с сингулярными функциями.

Первое амплитудное уравнение имеет следующий вид:

$$\frac{\partial A}{\partial t_1} = (\alpha c_i s_1 + 2\alpha^2(1-c_i^2)v)A \quad (2.7)$$

Неожиданным оказывается тот факт, что малая вязкость увеличивает инкремент неустойчивости (так как $c_i^2 < 1$). Двойная роль вязкости как демпфера и как генератора неустойчивости была до сих пор известна в иных ситуациях. Для кусочно-линейного профиля этот эффект получен и в работе [13], но ее автор не обратил на него внимания, по-видимому, из-за неудачной системы обозначений. Кроме того, он специфичен для «угловатых» профилей (см. ниже).

Сосредоточивая далее внимание на нелинейных эффектах, положим $v=s_1=\partial/\partial t_1=0$ (при этом $\varphi_{21}=0$). Вычисление коэффициентов второго амплитудного уравнения тогда дает

$$\frac{\partial A}{\partial t_2} = \alpha c_i s_2 A + 3c_i \sqrt{1+c_i^2} \frac{1+c_i/\sqrt{1+c_i^2}}{(4+c_i^2)(1+c_i^2)^3} A|A|^2 \quad (2.8)$$

Видно, что и константа Ландау оказалась для кусочно-линейного профиля положительной. Это значит, что кубичный член не может обеспечить ограничение амплитуды. Между тем результаты [10] показывают, что стационарная амплитуда возмущения A растет пропорционально квадратному корню из надкритичности. Эта зависимость, имеющая место при значениях надкритичности до нескольких единиц, свидетельствует о том, что возмущение все же описывается уравнением Ландау с отрицательной константой. Учет малой внутренней вязкости не может изменить ситуацию, поскольку она входит только в коэффициенты при линейном члене в (2.8). Естественно поэтому предположить, что кусочно-линейный профиль плохо подходит для моделирования реальной ситуации (еще раз подчеркнем, что это не означает некорректности самого метода). Вычисления для других профилей проводились с помощью ЭВМ.

3. Теоретическая схема, описанная в разд. 1, была реализована на мини-ЭВМ. Методом пристрелки отыскивались решения граничных задач для уравнения Рэлея, которые затем подставлялись в интегралы. Для сравнения с экспериментом вычислялась величина

$$\eta = -\frac{2\alpha^3 c_i |\varphi_{11}(0)|^2}{K_L} = \frac{\partial}{\partial s_2} \langle v_y^2 \rangle \Big|_{y=0}$$

где K_L — константа Ландау: $A = \alpha c_i s_2 A + K_L A |A|^2$. Эта величина имеет смысл наклона линейной зависимости среднего квадрата поперечной скорости при $y=0$ от надкритичности; она определялась в [10]. Сама константа Ландау непригодна для сравнения, так как зависит от произвольной нормировки собственной функции φ_{11} . В выражениях для функции

тока ψ (см. (1.4)) и для η эта нормировка сокращается. Заметим также, что на самом деле в средний квадрат скорости $\langle v_y^2 \rangle$ вносит вклад и вторая гармоника φ_{22} . Но φ_{22} растет, как s_2 , а не как $\sqrt{s_2}$, а экспериментальные зависимости $\langle v_y^2 \rangle$ от s_2 линейны. Это значит, что вклад второй гармоники мал, и вычисления подтверждают этот вывод.

Результаты вычислений — волновое число наиболее неустойчивой моды α , ее инкремент $\gamma = \alpha c_i$ и коэффициент η — приведены ниже:

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
α	0,46	0,45	0,43	0,40	0,45	0,65	0,38	0,57	0,64	0,4	0,5	0,38
γ	0,187	0,182	0,181	0,20	0,18	0,16	0,15	0,16	0,27	0,14	0,14	0,22
η	0,011	0,5	<0	<0	0,06	0,003	0,025	0,02	0,11	0,04	0,15	0,09

Цифрами 1–9 обозначены следующие исследованные профили скорости:

$$U = 1 - a + a \operatorname{th}((y-1)/a+1) \quad (y \geq 1-a)$$

$$U = y \quad (|y| \leq 1-a), \quad U = -1 + a + a \operatorname{th}((y+1)/a-1) \quad (y \leq -1+a)$$

для четырех значений параметра: $a=1$ ($U=\operatorname{th} y$); 0,75; 0,5; 0 (кусочно-линейный профиль).

$$U = {}^{3/4}(\operatorname{th} {}^{4/3}y + {}^{1/3}\operatorname{th} {}^{3/4}y), \quad U = \frac{2}{\pi} \arctg \frac{\pi y}{2}$$

$$U = 1 - ce^{-ky} \quad (y \geq 1), \quad U = y - b \operatorname{sh} ky, \quad (|y| \leq 1), \quad U = -1 + ce^{ky} \quad (y \leq -1)$$

$$k=2, \quad b=e^{-k}/k, \quad c=\operatorname{sh} k/k$$

$$U = \sin y, \quad -\pi \leq y \leq \pi; \quad U = \sin y, \quad -\infty \leq y \leq \infty$$

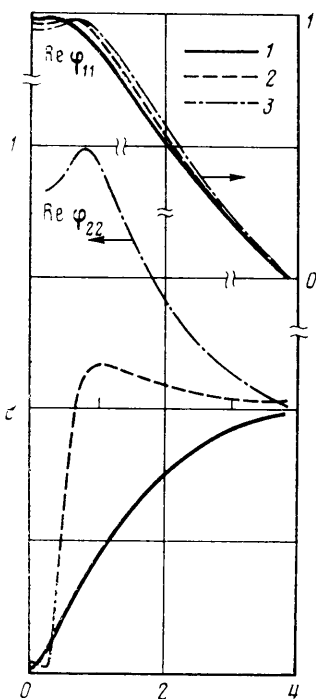
Последний профиль отвечает течению Колмогорова.

Здесь же приведены экспериментальные данные: 10 — течение с узкой зоной сдвига [10]; 11 — течение с профилем, близким к синусоидальному [10, 14]; 12 — слой смещения [10, 15]. Все профили антисимметричны и нормированы так, что $U(\infty)=1$, $U'(0)=1$. Кроме того, у профиля 5 дополнительно $U'''(0)=0$.

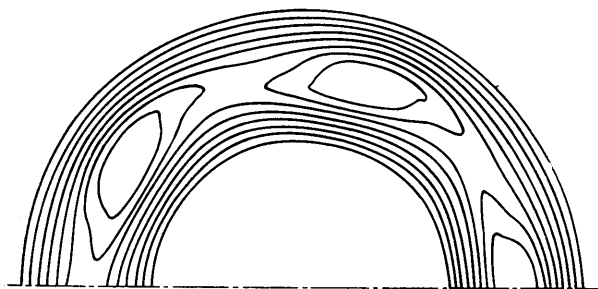
Обращает на себя внимание сильная зависимость η от вида профиля, резко контрастирующая с относительной универсальностью α и γ (экспериментальные значения γ пересчитаны по критическому числу Рейнольдса по внешнему трению: $\gamma=1/\operatorname{Re}$. [1, 10]).

Формально разброс значений η связан с тем, что в вычислении этой величины участвуют старшие производные от U , которые сильно различаются, для внешне близких профилей. То же справедливо и для самих решений уравнения Рэлея. Так, на фиг. 1 приведены графики вещественной части функций φ_{11} и φ_{22} для профилей 1–3 (кривые 1–3 соответственно), нормированные на максимальное значение. Функции φ_{11} близки одна к другой, а φ_{22} различаются сильно. По этой же причине сильно изменяется (и оказывается для большинства профилей отрицательной) поправка к инкременту, связанная с малой внутренней вязкостью. Такая ситуация неожиданна и требует обсуждения.

4. Отметим прежде всего, что константа Ландау для большинства профилей (кроме кусочно-линейного и близкого к нему профиля 3) оказалась отрицательной. Малость коэффициента η объясняет, почему корневая зависимость амплитуды возмущения от надкритичности сохраняется до значений s порядка нескольких единиц. Экспериментальные значения η (профили 10–12) близки по порядку величины к теоретическим и тоже демонстрируют значительный разброс при близких α и γ . Таким образом, качественное согласие имеет место. Оно подтверждается и сравнением картины линий тока, вычисленной для профиля 5 ($\eta=0,06$), с фотографиями течения для профиля 10 ($\eta=0,04$) (см. фиг. 2 в данной работе и фиг. 2 в [10]); на фиг. 2 течение для наглядности свернуто в кольцо, как в эксперименте.



Фиг. 1



Фиг. 2

Однако количественное сравнение с экспериментом едва ли вообще возможно (имеется в виду нелинейная теория). Дело в том, что для решения уравнений требуется знать зависимость $U(y)$ с точностью до третьей производной (правая часть (1.7) содержит φ'''_{11} , что эквивалентно U''') и эта третья производная существенна в отличие, например, от уравнения Рэлея (1.5), решение которого слабо зависит от U'' . Качественно U''' можно оценить, как $\max |U''|$, поскольку характерный масштаб изменения U по y порядка единицы. Таким образом, близость профилей следует определять с учетом производных до третьей или по крайней мере второй включительно. Но ни U'' , ни U''' не имеют самостоятельного физического смысла и не поддаются прямому измерению, а их оценка по измеренному профилю скорости $U(y)$ численным (двух- и трехкратным) дифференцированием крайне ненадежна. Наконец, реальные профили всегда изменчивы, а слабое изменение $U(y)$ может привести к существенному изменению производных.

Заметим, что подобная ситуация не уникальна. Так, необходимое условие неустойчивости сдвигового течения на β -плоскости (простейшее обобщение критерия Рэлея) состоит в том, что разность $U''(y) - \beta$ должна проходить через ноль. Очевидно, что критическое значение параметра β , равное $\beta_* = \max |U''|$, сильно зависит от вида профиля, обращаясь для кусочно-линейного в бесконечность.

В заключение укажем на возможное практическое следствие полученных результатов. Квазидвумерные сдвиговые течения играют важную роль в атмосфере Земли и других планет. Неустойчивость глобальных широтных течений порождает крупномасштабные вихри — циклоны и антициклоны. При этом в результате медленных неадиабатических процессов профиль средней скорости слабо меняется, а это может привести к значительному изменению интенсивности вихревых образований, которые в свою очередь существенно влияют на погоду.

Автор благодарит Ф. В. Должанского за предложенную тему и плодотворные обсуждения и В. А. Крымова за предоставленные данные эксперимента и помощь в расчетах на ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Должанский Ф. В. О влиянии внешнего трения на устойчивость плоскопараллельных течений однородной несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. ФАО. 1987. Т. 23. № 4. С. 348–356.
2. Stuart J. T. On the non-linear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows P. 1. // J. Fluid Mech. 1960. V. 9. P. 353–370.
3. Watson J. On the non-linear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows. P. 2. // J. Fluid Mech. 1960. V. 9. P. 371–389.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 738 с.
5. Линь Цзяцзяо. Теория гидродинамической устойчивости. Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 194 с.
6. Бетцов Р., Криминале В. Вопросы гидродинамической устойчивости. М.: Мир, 1971. 350 с.
7. Drazin P. G. The stability of a shear layer in an unbounded heterogeneous inviscid fluid // J. Fluid Mech. 1958. V. 4. Pt 2. P. 214–224.
8. Чурилов С. Н., Шухман И. Г. Нелинейная устойчивость свободных течений жидкости. Вязкий критический слой: Препринт № 5–85. Иркутск: СибИЗМИР СО АН СССР, 1985. 34 с.
9. Чурилов С. М., Шухман И. Г. Нелинейное развитие возмущений в зональном сдвиговом потоке: Препринт № 17–85. Иркутск: СибИЗМИР СО АН СССР, 1985.
10. Крымов В. А. Устойчивость и закритические режимы квазидвумерных сдвиговых течений при наличии внешнего трения. Эксперимент // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 2. С. 12–18.
11. Герценштейн С. Я. О применении метода Рэлея к нелинейным и трехмерным задачам // Докл. АН СССР. 1976. Т. 231. № 6. С. 1319–1322.
12. Герценштейн С. Я., Лезин Е. М., Шкадов В. Я. О нелинейном развитии и взаимодействии колебаний в плоском следе // II Всесоюзная конференция «Современные проблемы тепловой конвекции». Тезисы докладов. Пермь, 1975. С. 50–51.
13. Esch R. E. The instability of a shear layer between two parallel streams // J. Fluid Mech. 1957. V. 3. Pt 3. P. 289–303.
14. Довженко В. А., Крымов В. А., Пономарев В. М. Экспериментальное и теоретическое исследование сдвигового течения, возбуждаемого аксиально-симметричной силой // Изв. АН СССР. ФАО. 1984. Т. 20. № 8. С. 693–704.
15. Miksad R. W. Experiments on nonlinear stages of free-shear-layer transition // J. Fluid Mech. 1972. V. 56. Pt 4. P. 695–720.

Москва

Поступила в редакцию
12.I.1988