

ИТ-301 при М=8–11,5 // *Аэрофизические исследования*. Вып. 2. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1973. С. 89.

9. Антонов А. С., Бошнятов Б. В., Затолока В. В. Переход в турбулентное состояние и отрыв гиперзвукового пограничного слоя при повышенных числах Рейнольдса // *Аэрофизические исследования*. Вып. 3. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1974. С. 83–85.
10. Петров Г. В. Влияние скачка уплотнения, ограничивающего гиперзвуковой ударный слой, на устойчивость пограничного слоя // *Неустойчивость до- и сверхзвуковых течений*. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1982. С. 25–34.
11. Федорченко А. М., Коцаренко Н. Я. Абсолютная и конвективная неустойчивость в плазме и твердых телах. М.: Наука, 1981. 176 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию  
28.IX.1987

УДК 532.59:537.84

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УЕДИНЕННЫХ ВОЛН В МАГНИТНЫХ ТРУБКАХ

МОЛОТОВЩИКОВ А. Л.

Данные наблюдений показывают сильную неоднородность магнитных полей в атмосфере Солнца, причем распространенной является концентрация магнитных полей в виде магнитных трубок. В работе [1] получены дисперсионные соотношения для волн в цилиндрической магнитной трубке, а также отмечена возможность существования длинных (по сравнению с радиусом трубки) симметричных волн, распространяющихся вдоль трубки с фазовыми скоростями, близкими к дозвуковой доальфвеновской скорости  $c_T$ . Указанные возмущения равновесного состояния в соответствии с терминологией [1] и видом дисперсионных зависимостей для длинных симметричных волн [2, 3] являются медленными поверхностными или медленными захваченными волнами, в зависимости от того, превосходит  $c_T$  фазовую скорость или нет.

В [4, 5] получено уравнение, описывающее в длинноволновом приближении нелинейные медленные симметричные поверхностные волны в магнитной трубке в отсутствие внешнего магнитного поля. В [2, 3] учтено магнитное окружение трубки, выведена альтернативная версия уравнения для поверхностных волн и численно построены его решения в виде уединенных волн. Помимо этого в [2, 3] получено нелинейное уравнение для медленных захваченных волн. Интересно, что в работах [6–8] при описании распространения осесимметричных возмущений в вихревой трубке получены уравнения, близкие в длинноволновом приближении к выведенным в [2–5] уравнениям для медленных поверхностных волн в магнитной трубке. Связь родственных уравнений из [2–8], различающихся лишь значениями коэффициентов и видом дисперсионного члена, обсуждена в [2, 3].

В настоящей работе для случая медленных симметричных поверхностных волн в магнитной трубке численно решены задачи Коши о распространении одиночной и взаимодействии двух уединенных волн различной амплитуды. Найдено, что уединенные волны взаимодействуют подобно солитонам известных солитонных уравнений, таких, как уравнения Кортевега – де Вриза и Беньямина – Оно, т. е. сохраняют свою форму после столкновения. Обсуждается характер убывания солитонов на бесконечности.

**1. Основные уравнения.** Рассматривается идеальная жидкость с бесконечной проводимостью, описываемая уравнениями магнитной гидродинамики

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0; \quad p = p_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{4\pi\rho} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}; \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1.1)$$

Здесь  $t$  – время,  $\rho$  – плотность,  $p$  – давление,  $\mathbf{v}$  – скорость,  $\mathbf{B}$  – магнитная индукция,  $\gamma$  – показатель адиабаты. Индекс ноль относится к невозмущенному состоянию. Движение рассматривается в цилиндрической системе координат  $r, \theta, z$  и является осесимметричным, т. е. не зависящим от угла  $\theta$ , с  $\mathbf{v} = (u, 0, w)$ ;  $\mathbf{B} = (B_r, 0, B_z)$ .

В невозмущенном состоянии  $\mathbf{v} = 0$ ,  $B_r = 0$ . Предполагается также, что в отсутствие возмущений плотность, давление и  $z$ -компонента вектора магнитной индукции не

зависят от времени и координат внутри и вне цилиндрической магнитной трубки радиуса  $R$ , определенной неравенством  $r < R$ , а на поверхности трубки испытывают разрыв.

На возмущенной границе трубки, задаваемой уравнением  $r = R + \eta(t, z)$ , должны выполняться граничные условия

$$\left[ u - w \frac{\partial \eta}{\partial z} \right] = 0; \quad \left[ p + \frac{B^2}{8\pi} \right] = 0; \quad u = \frac{\partial \eta}{\partial t} + w \frac{\partial \eta}{\partial z} \quad (1.2)$$

где квадратные скобки означают скачок величины.

Анализ линеаризованных уравнений (1.1), (1.2) и пропорциональных  $\exp(ikz - i\omega t)$  решений отмеченных уравнений ( $\omega$  — частота,  $k$  — волновое число,  $i$  — мнимая единица) показывает возможность распространения по магнитной трубке медленных симметричных поверхностных волн, которые в длинноволновом приближении, соответствующем условию  $kR \ll 1$ , подчиняются дисперсионной зависимости [2, 3]

$$\omega = kc_T + 2\beta k^3 \left( \ln \frac{\alpha |k|}{2} + C \right) \quad (1.3)$$

$$\alpha^2 = \frac{(c_e^2 - c_T^2)(c_T^2 - v_{ae}^2)}{(c_e^2 + v_{ae}^2)(c_T^2 - c_{Te}^2)} R^2, \quad \beta = \frac{\rho_{e0} c_T^3 (c_T^2 - v_{ae}^2)}{8\rho_0 v_a^4} R^2$$

$$c_T^2 = \frac{c_0^2 v_a^2}{c_0^2 + v_a^2}, \quad c_{Te}^2 = \frac{c_e^2 v_{ae}^2}{c_e^2 + v_{ae}^2}$$

Здесь  $\rho_0$ ,  $c_0$ ,  $v_a$  — соответственно плотность, скорость звука и альфвеновская скорость внутри невозмущенной трубки,  $\rho_{e0}$ ,  $c_e$ ,  $v_{ae}$  — аналогичные параметры вне трубки,  $C = 0,577$  — постоянная Эйлера.

Медленные поверхностные волны могут распространяться вдоль магнитной трубки при выполнении неравенства  $v_{ae}^2 < c_T^2 < c_e^2$ . При этом возмущения быстро убывают при удалении от трубки, а распределение продольной скорости  $w$  по поперечному сечению трубки в приближении длинных волн близко к однородному. Отметим также, что в соответствии с проведенным в [2–4] анализом нелинейного распространения медленных поверхностных волн граница трубки может существенно деформироваться, причем параметр  $\eta$  сопоставим по порядку величины с возмущениями продольной скорости, плотности и давления внутри трубки.

В [2, 3] на основе (1.1), (1.2) с помощью метода разномасштабных разложений получено нелинейное уравнение для медленных симметричных поверхностных волн малой амплитуды, которое в безразмерных переменных имеет вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \frac{\partial \varphi^2}{\partial x} + \frac{\partial^3}{\partial x^3} \int_{-\infty}^{\infty} F(x-x') \varphi(x', \tau) dx' = 0 \quad (1.4)$$

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{K_0(k)}{k K_1(k)} \cos(kx) k dk$$

$$x = \alpha^{-1}(z - c_T t); \quad \tau = \alpha^{-3} \beta t; \quad \varphi(x, \tau) = \frac{\alpha^2 b}{2\beta} W(z, t)$$

$$b = \frac{v_a^2 (3c_0^2 + (\gamma + 1)v_a^2)}{2(c_0^2 + v_a^2)^2}$$

Здесь  $x$  — «бегущая» координата,  $\tau$  — безразмерное время,  $W$  — осредненная по сечению трубки продольная компонента скорости среды,  $K_0$  и  $K_1$  — функции Макдональда нулевого и первого порядков. При этом уравнение (1.4) выведено в предположении  $\varphi(x, \tau) \rightarrow 0$  при  $|x| \rightarrow \infty$ . Нетрудно также получить для (1.4) законы сохранения

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi dx = 0; \quad \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2 dx = 0 \quad (1.5)$$

Отметим, что в задаче о распространении волн по магнитному слою, родственной рассматриваемой в настоящей работе задаче для цилиндрической магнитной трубки, аналогом уравнения (1.4) будет, как показано в [4, 5], уравнение Бенья-

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \frac{\partial \varphi^2}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x', \tau)}{x' - x} dx' \right\} = 0 \quad (1.6)$$

описывающее также распространение внутренних волн в стратифицированной жидкости большой глубины [9] и обладающее одно- и многосолитонными решениями [10]. В дальнейшем помимо уравнения (1.6) будем ссылаться на уравнение Кортевега — де Вриза [11]

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \frac{\partial \varphi^2}{\partial x} + 2 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} = 0 \quad (1.7)$$

Точные двухсолитонные решения уравнений (1.6), (1.7) могут быть получены из представленных соответственно в [10, 12] результатов заменой переменных.

Подстановка решений вида  $\exp(ikx - i\omega\tau)$  в линеаризованные уравнения (1.4), (1.6) и (1.7) дает соответственно дисперсионные соотношения

$$\omega = -2k|k| \frac{K_0(|k|)}{K_1(|k|)}, \quad \omega = -2k|k|, \quad \omega = -2k^3$$

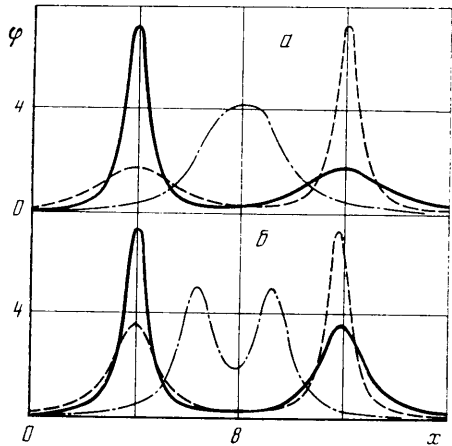
При этом первое из приведенных уравнений в длинноволновом приближении ( $k \ll 1$ ) эквивалентно уравнению  $\omega = 2k^3 \ln(1/2|k| + C)$ , которое с учетом выполненной замены переменных  $z, t$  совпадает с (1.3). Можно отметить промежуточный характер дисперсии длинных волн в магнитной трубке по сравнению с дисперсией, отвечающей уравнениям Беньямина — Оно и Кортевега — де Вриза.

**2. Результаты.** В [2, 3] предложенным в [13] численным методом были найдены решения уравнения (1.4) в виде уединенных волн  $\varphi(x - V\tau)$ ,  $V = \text{const}$ , и определена зависимость скорости  $V$  и длины волны от амплитуды. При этом вопросы эволюции найденных решений не рассматривались. В настоящей работе итерационный метод [13], изложенный также в [2, 3], используется для задания начальных условий для уравнения (1.4), которое решается взятым из [14] псевдоспектральным методом. Все представленные ниже расчеты проведены на отрезке интегрирования  $0 \leq x \leq 40$  и соответствуют солитонам, обладающим начальными скоростями  $1 \leq V \leq 6$ . Исследование распространения солитонов с меньшими скоростями (амплитудами) не проводилось в связи со значительным ростом погрешности вычислений.

Согласно расчетам, проведенным по представленному в [2, 3, 13] методу, солитоны Кортевега — де Вриза, солитоны в магнитной трубке и солитоны Беньямина — Оно, подчиняющиеся уравнениям (1.7), (1.4) и (1.6), имеют при  $V=4$  амплитуды соответственно 6; 7,29; 8 и минимальные на расчетной сетке значения  $\varphi$  порядка  $10^{-10}$ ;  $1,4 \cdot 10^{-3}$ ;  $1,3 \cdot 10^{-2}$ . Солитон Кортевега — де Вриза можно получить с высокой точностью даже для значений  $\varphi \leq 10^{-7}$ , тогда как большие ошибки усечения квадратично убывающего на бесконечности солитона Беньямина — Оно дают приемлемую точность (меньше 1–2%) лишь в области горба. Приведенные выше цифры с учетом типичности представленного примера для  $1 \leq V \leq 6$  можно, по-видимому, считать качественным проявлением медленного (по типу Беньямина — Оно) характера убывания солитона в магнитной трубке на бесконечности, несмотря на существенные при минимальных значениях  $\varphi$  вычислительные погрешности.

В целях проверки солитонных свойств найденных в [2, 3] решений уравнения (1.4) был проведен ряд расчетов для различных уединенных волн, обладающих скоростями из отмеченного выше диапазона. В качестве начального условия при этом задавалась либо одиночная уединенная волна, либо сумма двух таких волн различной амплитуды, разнесенных в пространстве и в процессе эволюции сталкивающихся друг с другом. Расчеты показали стационарный характер распространения одиночной волны и восстановление формы уединенных волн после взаимодействия. Отмеченные факты с учетом ошибок, вносимых численным алгоритмом, свидетельствуют об устойчивости рассмотренных солитонов.

Характер взаимодействия солитонов в магнитной трубке ясен из фигуры. Солитоны движутся в сторону возрастания значений  $x$ , причем больший из солитонов в



начальный момент является догоняющим. На фигуре, 6 отражено столкновение солитонов, соответствующих начальным скоростям  $V_1=4$  и  $V_2=2$ . Сплошная, штрихпунктирная и штриховая линии соответствуют моментам времени  $\tau=0; 3,25; 6,5$ . При этом штрихпунктирная и штриховая линии в целях удобства сравнения были сдвинуты влево по оси абсцисс соответственно на 10 и 19,7 единиц измерения. Момент времени  $\tau=3,25$  соответствует минимальному наблюдаемому расстоянию между горбами.

Фигура, а отражает взаимодействие солитонов с  $V_1=4$  и  $V_2=1$ . Сплошная, штрихпунктирная и штриховая линии соответствуют значениям  $\tau=0; 2,375; 4,75$ . Сдвиг штрихпунктирной и штриховой линий влево по оси абсцисс составил 6 и 12 единиц измерения. В процессе взаимодействия наблюдалось слияние солитонов.

Отметим, что пары солитонов уравнения (1.6), соответствующие скоростям 4 и 2, 4 и 1, взаимодействуют подобно солитонам в магнитной трубке, изображенным на фиг. 16. Возможность слияния солитонов Бенъямина – Оно показана аналитически в [45]. Для точных двухсолитонных решений уравнения Кортевега – де Вриза также характерна представленная фигурой, а, б эволюция.

Во всех проведенных расчетах законы сохранения (1.5) выполнялись с приемлемой точностью.

Автор благодарит М. С. Рудермана за постановку задачи и В. Б. Баранова за внимание к работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Edwin P. M., Roberts B.* Wave propagation in a magnetic cylinder // *Solar Phys.* 1983. V. 88. № 1–2. P. 179–191.
2. *Молотовщиков А. Л., Рудерман М. С.* Нелинейные медленные симметричные волны в магнитной трубке: Препринт Пр-1147. М.: ИКИ АН СССР, 1986.
3. *Molotovshchikov A. L., Ruderman M. S.* Long nonlinear waves in a compressible magnetically structured atmosphere. IV. Slow sausage waves in a magnetic tube // *Solar Phys.* 1987. V. 109. № 2. P. 247–263.
4. *Roberts B.* Solitary waves in a magnetic flux tube // *Phys. Fluids.* 1985. V. 28. № 11. P. 3280–3286.
5. *Roberts B.* Solitons in astrophysics // *Proc. 6th Gen. Conf. Europ. Phys. Soc. «Trends in Physics», 1984. Prague, p. 177–185.*
6. *Leibovich S.* Weakly nonlinear waves in rotating fluids // *J. Fluid Mech.* 1970. V. 42. Pt 4. P. 803–822.
7. *Pritchard W. G.* Solitary waves in rotating fluids // *J. Fluid Mech.* 1970. V. 42. Pt 1. P. 61–83.
8. *Leibovich S., Randall J. D.* Solitary waves in concentrated vortices // *J. Fluid Mech.* 1972. V. 51. Pt 4. P. 625–635.
9. *Ono H.* Algebraic solitary waves in stratified fluids // *J. Phys. Soc. Japan.* 1975. V. 39. № 4. P. 1082–1091.
10. *Matsuno Y.* Exact multi-soliton solution of the Benjamin – Ono equation // *J. Phys. A: Math. Gen.* 1979. V. 12. № 4. P. 619–621.
11. *Korteweg D. J., de Vries G.* On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves // *Phil. Mag.* 1895. Ser. 5. V. 39. P. 422–443.
12. *Узлем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
13. *Петвиашвили В. И.* Об уравнении необыкновенного солитона // *Физика плазмы.* 1976. Вып. 3. С. 469–472.
14. *Spangler S. R., Sheerin J. P., Payne G. L.* A numerical study of nonlinear Alfvén waves and solitons // *Phys. Fluids.* 1985. V. 28. № 1. P. 104–109.
15. *Matsuno Y.* Soliton and algebraic equation // *J. Phys. Soc. Japan.* 1982. V. 51. № 10. P. 3375–3380.

Москва

Поступила в редакцию  
15.IX.1987

УДК 533.6.011.55

### НЕСТАЦИОНАРНОЕ СВЕРХЗВУКОВОЕ ОБТЕКАНИЕ СФЕРЫ ПРИ ДВИЖЕНИИ ЧЕРЕЗ ТЕПЛОВУЮ НЕОДНОРОДНОСТЬ

ГОЛОВАЧЕВ Ю. П., ЛЕОНТЬЕВА Н. В.

Нестационарные эффекты, обусловленные изменением параметров набегающего потока, могут оказывать существенное влияние на характеристики сверхзвукового обтекания тел. Различные задачи такого рода решались в [1–5] в рамках модели идеального газа. Результаты этих расчетов дают информацию о структуре течения вблизи обтекаемой поверхности и распределении давления. Они могут быть исполь-