

ЛИТЕРАТУРА

1. Афонина Н. Е., Власов А. Ю., Громов В. Г. Расчет вязкого обтекания треугольного крыла гиперзвуковым потоком воздуха // Аэродинамика входа тел в атмосферы планет. М.: Изд-во МГУ, 1983. С. 29–45.
2. Ковеня В. М., Яненко Н. Н. Метод расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1981. 304 с.

Москва

Поступила в редакцию
29 IX.1987

УДК 532.522.2.034

РЕШЕНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ СТРУЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

АМРОМИН Э. Л., ЗИЛИСТ Л. П., ТИМОШИН Ю. С.

Предложен метод последовательных приближений для решения трехмерных нелинейных задач теории струй идеальной жидкости (см., например, [1–3]). Каждое приближение включает в себя расчет обтекания известной поверхности, т. е. решение внешней задачи Неймана для уравнения Лапласа относительно потенциала скорости, и корректировку части этой поверхности с целью уменьшить невязку в условии постоянства давления на поверхности струй. Корректировка производится малыми деформациями, отыскиваемыми из системы интегральных уравнений, при этом уточняется и форма каверны в плане. Представлены результаты расчетов обтекания трехосных эллипсоидов, полученные с использованием обобщенной схемы Жуковского – Рошко для замыкания струй.

При обтекании преграды установившимся безвихревым потоком идеальной несжимаемой жидкости во всей области течения может быть введен скалярный потенциал скорости Φ . На поверхности сходящих с преграды струй должны выполняться условия непротекания и постоянства давления. Поэтому вне полубесконечной поверхности S для отыскания производных Φ может быть сформулирована задача

$$\Delta \Phi = 0 \quad (1)$$

$$\nabla \Phi \rightarrow \{1, 0, 0\}, \quad x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty \quad (2)$$

$$N \nabla \Phi|_S = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \Phi \nabla \Phi|_S = 1 + \sigma \quad (4)$$

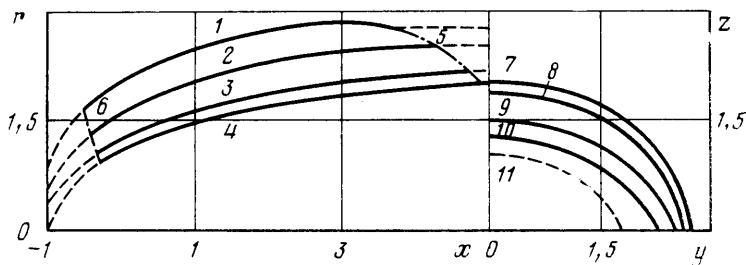
где N – внешняя нормаль к S , $\{x, y, z\}$ – декартовы координаты плоскости течения. Поверхность S состоит из трех частей: S_1 , S^* и S_2 . Здесь S_1 – заданная поверхность преграды; на полубесконечной фиктивной поверхности S_2 , на которую замыкается струя [1, 4–8], известна только компонента нормали N_x , а сама поверхность струй S^* расположена между S_1 и S_2 . Соотношения (3), (4) – условие непротекания и записанное с использованием интеграла Бернулли условие постоянства давления. Постоянная σ задается заранее, а форма и размеры S^* подлежат определению при решении задачи. Этим и обусловлена нелинейность задачи (1)–(4) для линеиного уравнения (1).

Классический подход к решению аналогичных плоских задач [1], не так давно обобщенный на осесимметричные [4], основан на обращении переменных. Выбирая в качестве независимых переменных, например, Φ и функцию тока, можно определить изображение S в плоскости этих переменных (хотя для сложных форм S_1 такой путь связан с преодолением существенных трудностей [5]). Подобное обращение в трехмерных задачах использовать не удавалось, а известные попытки [6] решения задачи (1)–(4) в переменных $\{x, y, z\}$ не привели к заметным успехам.

Описываемый ниже метод использует изложенные в [7] идеи решения плоских струйных задач и опыт [8] решения осесимметричных. Однако трехмерная задача обладает специфическими трудностями. На фиг. 1 изображены сечения поверхности S , соответствующей струйному обтеканию преграды. В правой половине фигуры приведены сечения S плоскостями $x = \text{const}$ (кривая 11 соответствует линии схода струй; 7–10 – $x = 5; 3,32; 1,42; 0,54$), а в левой – плоскостями $\theta = \arctg(z/y) = \text{const}$ (кривые 1–4 соответствуют $\theta = 0, 30, 60, 90^\circ$). Сечения S_1 и S_2 плоскостями $\theta = \text{const}$ нанесены штриховыми линиями. Здесь $r = (z^2 + y^2)^{0,5}$, а линии 5, 6 – проекции схода струй $x = x_1(\theta)$ и линий их замыкания $x = x_2(\theta)$ – нанесены штрихпунктиром. Видно, что на S^* разным сечениям $\theta = \text{const}$ соответствуют разные интервалы изменения x .

Поэтому в трехмерных задачах нельзя заранее задать даже область определения описывающих S^* функций (например, компонент N), в отличие от плоских или симметричных задач, в которых обычно задают размер S (длину каверны, например).

Предполагаемый для решения задачи (1)–(4) метод последовательных приближений основан на использовании при проверке (4) двух упрощающих допущений. Согласно первому из них, поверхность, отождествляемая при проверке условия (4) с искомой поверхностью S^* , слабо изменяется от приближения к приближению: в k -м приближении при проверке (4) используется поверхность S_k^* , в $(k+1)$ -м – S_{k+1}^* . При этом мало различаются, во-первых: области определения S_k^* и S_{k+1}^* в плоскости $\{x, \theta\}$, во-вторых, проекции на эту плоскость линии тока на S_k и S_{k+1} , а в-третьих, значения $Q = \nabla \Phi$, $\nabla \Phi$ в сопоставляемых по нормали к S_k^* точках поверхностей S_k и S_{k+1} .



Фиг. 1

Согласно второму допущению, разность значений Q в упомянутых точках пропорциональна невязке (4) на S_k^* . При указанных предположениях можно добиваться выполнения граничных условий на S_{k+1}^* с помощью гидродинамических особенностей, распределенных по S_k^* (т. е. линеаризации (3), (4) на S_k^* или квазилинеаризации), поскольку

$$|n| \ll 1, |h| \ll L, \nabla \Phi \nabla \Phi \ll Q \quad (5)$$

Здесь h – расстояние от S_k^* до S_{k+1}^* ; L – длина S_k^* ; Φ – возмущение потенциала обтекания S , происходящее только за счет изменения плотности потенциала простого слоя Φ ; n – разность нормалей в последовательных приближениях. Принцип сопоставления S_k^* и S_{k+1}^* иллюстрируется на фиг. 2, где приведены сечения S_0^* и S_3^* плоскостью $\theta = \text{const}$ и соответствующие им распределения $U = Q^{0.5}$. Кривые 1 и 2 отвечают сечениям S для нулевого и пятого приближений, 3 и 4 – распределениям U вдоль них.

Производные Φ на S_{k+1}^* в линейном приближении заменяются выражениями типа

$$\nabla \Phi N = N \nabla \Phi^* + N \nabla \Phi + h N \frac{\partial}{\partial N} \nabla \Phi^* + n \nabla \Phi^* \quad (6)$$

Учитывая в (6) условия (3) и (4), можно получить квазилинеаризованное условие непротекания через S_{k+1}^* , записанное с помощью распределенных по S_k^* особенностей

$$\frac{\partial \Phi}{\partial N} + \frac{\partial}{\partial T} h U^* = 0, \quad \Phi^* = \Phi(S_k^*), \quad U = U(S_k^*) \quad (7)$$

где T – орт вдоль касательной к линии тока на S_k^* . Квазилинеаризация условия (4) производится с использованием (3) и однотипных с (6) выражений. При этом учитывается, что вклад ортогональных T компонент скорости в Q будет величиной второго порядка малости. Обозначив через κ кривизну линий тока на S_k^* , квазилинеаризованное условие постоянства давления можно записать в виде

$$\frac{\partial \Phi}{\partial T} + \kappa h U^* = \frac{U^{*2} - 1 - \sigma}{2U^*} \quad (8)$$

Уравнения (7), (8) подобны используемым в [8], однако в отличие от осесимметричного течения в трехмерном течении при одном и том же θ поверхности S_k^* и S_{k+1}^* имеют разные размеры вдоль оси x .

При сопоставлении дуговых абсцисс l_k и l_{k+1} в точках на S_k^* и S_{k+1}^* вводится

правило

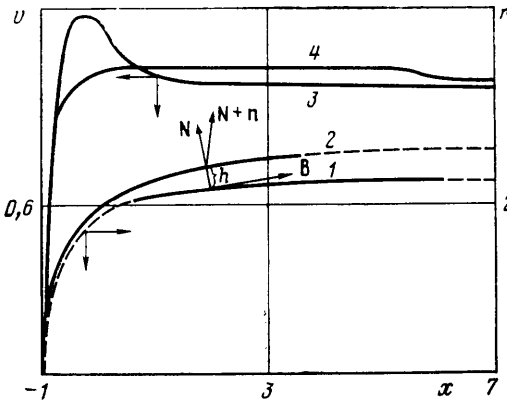
$$l_{k+1} - x_1 = (1 + \varepsilon)(l_k - x_1) \quad (9)$$

где функция $\varepsilon(\theta)$ заранее неизвестна. Используя (9), квазилинеаризованное условие постоянства давления можно преобразовать к виду

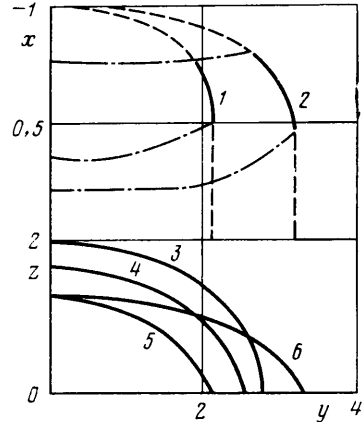
$$\kappa h U^* + \frac{\partial \varphi}{\partial T} = \frac{\varepsilon l}{2} \left(1 + \frac{1 + \sigma}{U^{*2}} \right) \frac{\partial U^*}{\partial l} + \frac{U}{2} - \frac{1 + \sigma}{2 U^*} \quad (10)$$

Если φ — потенциал простого слоя с плотностью q , то (10) — сингулярное интегральное уравнение относительно $q(l, \theta)$.

Содержащуюся в (10) неизвестную функцию $\varepsilon(\theta)$ можно найти из условия существования ограниченного на S_k^* решения (10). Для вывода такого условия надо,



Фиг. 2



Фиг. 3

как и в [9], на каждой линии тока выделить из $\partial \varphi / \partial T$ интеграл Коши с плотностью $0,5 q$

$$I_c(l) = \frac{1}{2\pi} \int_{x_1}^{x_1 + l_k} \frac{q(\xi) d\xi}{l - \xi}$$

Здесь l_k — длина линии тока на S_k^* , а функция $F = \partial \varphi / \partial T - I_c$ является уже регулярной. Тогда условие ограниченности $q(l, \theta)$ запишется для каждой линии тока на S_k^* в виде известного в теории интегралов Коши условия их обращения

$$2 \int_0^{l_k} \frac{(F + \kappa h U^*) d\xi}{\sqrt{\xi(l_k - \xi)}} = \varepsilon \int_0^{l_k} \sqrt{\frac{\xi}{l_k - \xi}} \left(1 + \frac{1 + \sigma}{U^{*2}} \right) \frac{\partial U^*}{\partial \xi} d\xi + \int_0^{l_k} \frac{U^{*2} - 1 - \sigma}{U^* \sqrt{\xi(l_k - \xi)}} d\xi \quad (11)$$

После определения из системы (10), (11) $\varepsilon(\theta)$ и $q(l, \theta)$ эти функции подставляются в соотношение (7), которое с использованием (9) принимает вид

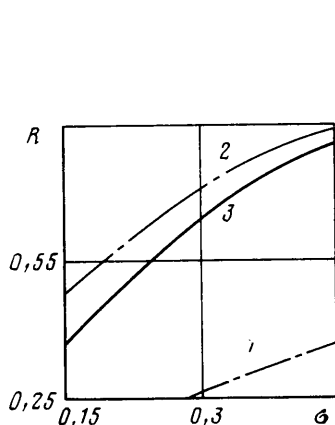
$$\frac{\partial}{\partial T} h \{l(1 + \varepsilon)\} U^* \{l(1 + \varepsilon)\} = - \frac{\partial \varphi}{\partial N}(q, l) \quad (12)$$

и интегрируется относительно h с начальным условием $h(x_1) = 0$.

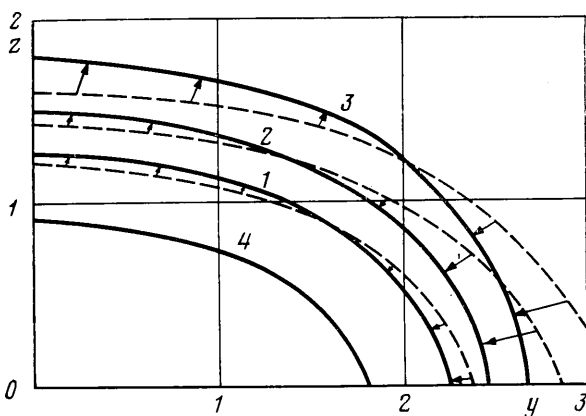
После отыскания h следует построить S_{k+1} , перестроить S_2 и решить для новой формы $S = S_1 \cup S_{k+1}^* \cup S_2$ внешнюю задачу Неймана (1)–(3). Если невязка в (4) и после этого окажется недопустимо большой, то следует приступить к построению нового приближения.

Таким образом нелинейная задача (1)–(4) сводится к последовательности линейных задач Неймана и обратных линейных задач (10)–(12). При этом достаточная точность решения нелинейной задачи обеспечивается высокой точностью численного решения задачи Неймана и последующего вычисления U^* .

Не останавливаясь на описании известных преобразований соотношений (10)–(12) из местной прямоугольной системы координат в криволинейную ортогональную систему на S^* и на численном решении внешней задачи Неймана, укажем три модификации системы (10)–(14), упрощающие вычисления.



Фиг. 4



Фиг. 5

Первая из них — отбрасывание при расчетах в (10), (11) пропорционального χ члена. Вообще говоря, произведение χh может иметь тот же порядок, что и $\partial\varphi/\partial T$. Однако сохранение его снижает гладкость q и этим сильно ухудшает сходимость приближений.

Вторая модификация обеспечивает выполнение необходимых для квазилинеаризации (3), (4) условий (6). При квазилинеаризации невязка условия (4) умножается на число α , $0 < \alpha < 1$; в результате сходимость приближений замедляется, чтобы обеспечить их устойчивость.

Третья модификация вызвана тем, что удобнее интегрировать уравнения (10) — (12) вдоль меридиональных сечений S_k^* (на которых $\theta = \text{const}$), а не вдоль линий тока. Обозначим через B орты касательных к этим сечениям S_k^* , λ — длины их дуг и $\beta = BT$. Тогда уравнение (10) с учетом всех трех модификаций можно записать в виде

$$\frac{1}{\alpha\beta} \frac{\partial\varphi}{\partial B} = \frac{\varepsilon\lambda}{2} \left(1 + \frac{1+\sigma}{U^{*2}} \right) \frac{\partial U^*}{\partial \lambda} + \frac{U^{*2}-1-\sigma}{2U^*}$$

Аналогичным преобразованием подвергнутся (11), (12). Положение линии схода струй $x_1(\theta)$ определяется в ходе последовательных приближений с помощью условия Бриллюэна — Вилля [1].

Опыт вычислений подсказывает, что рационально назначать $\alpha \sim 0,3-0,5$, и чем меньше σ , тем меньше должно быть α .

Предложенный метод расчета демонстрируется на задаче обтекания эллипсоидов $x^2 + y^2 a^{-2} + z^2 = 1$ со срывом струй и их замыканием на фиктивную поверхность по схеме типа Жуковского — Рошко, на полубесконечный цилиндр. Приведенные на фиг. 1 сечения свободной границы относятся именно к такому расчету для $a=2$ и $\sigma=0,17$. Тому же примеру соответствует фиг. 2. На фиг. 3 приведены: в нижней половине — наибольшие поперечные сечения S^* , совпадающие с сечениями фиктивных тел плоскостями $x=\infty$, в верхней — сечения плоскостью $z=0$. Кривые 1, 5 соответствуют $\sigma=0,44$, $a=2$; кривые 2, 6 — $\sigma=0,44$, $a=3$; кривые 3, 4 — $\sigma=0,17$ и 0,3, $a=2$. Кривые на S_1 , S_2 и проекции x_1 , x_2 обозначаются, как и на фиг. 1.

На фиг. 4 представлены зависимости отношения площадей поперечных сечений преграды и струй R от σ для диска (1), шара (2) и эллипсоида ($a=2$) (3). Кривые 1, 2 получены методом [8].

Представленные результаты расчетов в основном соответствуют фактам известных теорий. Фигура 4 подтверждает, что для трехмерных течений сохраняется вид зависимостей $R(\sigma)$. По верхней половине фиг. 3, на которой изображены по сути формы каверн в плане, можно судить, насколько значительными будут погрешности линейной теории в описании торцов каверн. По нижней части фиг. 3 видно, что с уменьшением σ наибольшее поперечное сечение каверн S , как и в [3], приближается к кругу.

Наиболее четко деформации поперечных сечений каверн иллюстрируются фиг. 5. На ней наряду с этими сечениями приведены кривые, ограничивающие ту же самую площадь, но аффинные по отношению к линиям схода струй (они показаны штриховыми линиями); стрелочками указаны смещения сечений каверн по отношению к этим эллипсам. Кривым 1–3 соответствуют $x=1,42$; 3,32; 5; кривая 4 — проекция линии схода струй для $\sigma=0,17$. Видно, что, как и в известных опытах, струи «вспучиваются» над узкой частью преграды и «проседают» над широкой.

Приведенные результаты позволяют надеяться на успешное использование предложенного метода для расчетов различных течений несжимаемой жидкости со сво-

бодными границами. Малое отличие принимаемого за окончательный результат рас-
пределения U_3^* от U_0^* на большей части S^* , например для представленного на
фиг. 2 случая, указывает на возможность сращивания решений линейных и нели-
нейных струйных задач.

Авторы признательны В. П. Карликову за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1979. 536 с.
2. Басин М. А., Шадрин В. П. Гидроаэродинамика крыла вблизи границы раздела
сред. Л.: Судостроение. 1980. 304 с.
3. Логвинович Г. В., Буйвол В. Н., Дудко А. С. и др. Течения со свободными поверх-
ностями. Киев: Наук. думка, 1985. 295 с.
4. Brennen C. A numerical solution of axysymmetric cavity flows // J. Fluid. Mech. 1969.
V. 37. № 4. P. 671-688.
5. Амромин Э. Л., Васильев А. В., Иванов А. Н. Решение плоских задач кавитации
с учетом капиллярности и вязкости жидкости // Динамика сплошных сред с гра-
ницами раздела. Чебоксары, 1983. С. 3-10.
6. Street R. L. A review of numerical methods for solution of three-dimensional cavity
problems // Sec. Intern. Conf. on Numerical Ship Hydr. Berkley. 1977.
7. Иванов А. Н. Симметричное кавитационное обтекание удлиненного плоского кон-
тура // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1962. № 3. С. 61-66.
8. Амромин Э. Л., Иванов А. Н. Осесимметричное кавитационное обтекание тела в
трубе // Изв. АН СССР. МЖГ. № 4. С. 50-55.
9. Поляхов Н. Н., Пастухов А. И. Теория несущей поверхности прямоугольной фор-
мы // Вестн. ЛГУ. 1959. № 13. Вып. 3. С. 93-110.

Ленинград

Поступила в редакцию
29.IX.1987

УДК 532.526.3.013.4

ВЛИЯНИЕ ПОКАЗАТЕЛЯ АДИАБАТЫ НА УСТОЙЧИВОСТЬ И ПЕРЕХОД СВЕРХЗВУКОВОГО ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В ТУРБУЛЕНТНЫЙ

ЛЫСЕНКО В. И.

При больших сверхзвуковых скоростях обтекания тел в связи со значительным
повышением температуры торможения и химическими реакциями меняется показа-
тель адиабаты γ набегающего на тело потока (строго говоря, в этом случае течение
допустимо описывать при помощи модели совершенного газа с «эффективным» пока-
зателем адиабаты γ_{ef} ; как правило, $\gamma_{ef} < \gamma$). Это может повлечь изменение положе-
ния перехода ламинарного пограничного слоя на модели в турбулентный. Определе-
нию влияния показателя адиабаты на переход пограничного слоя и посвящена дан-
ная работа.

Расчетным и экспериментальным путем (при использовании воздуха, углекис-
лого газа и аргона в качестве рабочих газов) получено, что при уменьшении пока-
зателя адиабаты число Рейнольдса перехода ламинарного пограничного слоя в тур-
булентный значительно уменьшается. В расчетах (как и в [1]) использовался ме-
тод e^n предсказания положения перехода: положение перехода фиксируется при
достижении отношения амплитуд возмущения $A=Q/Q_0$ значения e^n (Q_0 — ам-
плитуда возмущения на нижней ветви кривой нейтральной устойчивости, Q — теку-
щая величина амплитуды, n задано), представляющего собой коэффициент усиле-
ния возмущений в неустойчивой области (этот метод применяется, когда отсутству-
ет информация о начальном спектре возмущений в пограничном слое). Число Рей-
нольдса перехода, определенное таким путем, является интегральной характерис-
тикой устойчивости течения в пограничном слое.

За основу взята программа расчета степеней нарастания возмущений α_i в по-
граничном слое при теплообмене [2]. Методика расчета характеристик устойчивости
подробно изложена в [3].

Рассмотрено течение сжимаемого теплопроводного газа в двумерном погранич-
ном слое (систему уравнений см., например, в [4]). Расчеты проведены для плос-
кой пластины с непроницаемой поверхностью и заданной температурой стенки. При-
нят закон изменения вязкости от температуры по Саттерленду $\mu = cT^{1.5}(T+T'_s)^{-1}$
($c = \text{const}$, T'_s — безразмерная постоянная Саттерленда). Расчеты проведены в ос-