

УДК 533.6.011.72

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ О РАСПАДЕ ДВУМЕРНОГО ПРОИЗВОЛЬНОГО РАЗРЫВА

ТУГАЗАКОВ Р. Я.

Аналитически и численно исследована задача о распаде двумерного произвольного разрыва в газе. В случае, когда граница первоначального разрыва является прямой линией с точкой излома, задача сведена к взаимодействию двух одномерных произвольных разрывов. Показано, что максимальное отличие двумерного решения от одномерного реализуется, когда при распаде разрыва образуются ударные волны, взаимодействующие между собой и с другими газодинамическими разрывами. Оценено влияние угла излома первоначальной границы разрыва на двумерность течения.

Автомодельная задача о распаде произвольного разрыва [1] является основополагающей при изучении газодинамических задач, имеющих разрывы в начальных условиях. Это относится, например, к задачам дифракции и отражения ударных волн на неподвижных и движущихся телах [2–3]. Кроме того, задача о распаде произвольного разрыва является смысловым элементом, на котором построен конечно-разностный метод Годунова [4].

Обычно исследование вопроса о поведении произвольного разрыва сводится к локальной одномерной задаче [5–9].

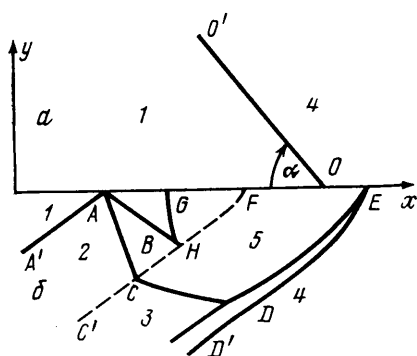
В случае же, если на поверхности начального разрыва имеются точки излома, то с самого начала задача является двумерной и нестационарной. Так, в численном методе Годунова течение в окрестности угловых точек расчетной ячейки двумерное [4]. Но при этом, если граница начального разрыва является прямолинейной с точкой излома, задача распада двумерного разрыва является автомодельной. И она сводится к взаимодействию двух одномерных разрывов, наклоненных друг к другу под углом, равным углу излома первоначальной границы.

В такой постановке ранее численно исследована задача о распаде произвольного разрыва на границах нескольких соседних угловых областей в [10–11]. В этих работах использован конечно-разностный метод Годунова с выделением границ сильного разрыва.

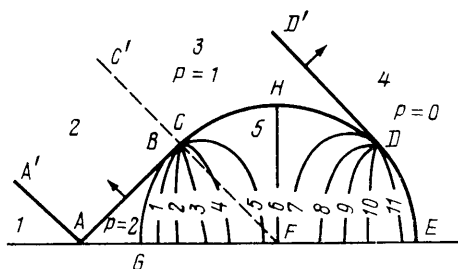
В настоящей работе проведена систематизация типов конфигураций разрывов и численно исследован распад произвольного разрыва более общего типа по сравнению с [10–11], когда в начальный момент времени вдоль границы разрыва возникают касательные составляющие скорости. Эта ситуация возникает в нестационарных дифракционных задачах, когда сталкиваются движущиеся потоки разных газов. По физической сути близка к этим задачам и локальная задача о внезапном движении в каждый момент времени частиц газа в турбулентных движениях, когда течение рассчитывается без учета диссипативной вязкости.

Кроме того, в работе найдено аналитическое решение задачи, описывающее сильную зависимость течения газа в области излома границы от угла ее излома.

1. Рассмотрим течение двух газов, находящихся в областях 1 и 4 (фиг. 1, а) и разделенных в начальный момент времени ($t=0$) границей $O'O$. Вдоль этой границы в общем случае имеется разрыв в начальных данных величин давления, плотности, компонент скорости и показателя адиабаты γ . Угол α , характеризующий отклонение течения газа от одномерного, меняется от 0 до 90° . При $\alpha=90^\circ$ излом границы разрыва в точке O отсутствует и течение вдоль осей границы разрыва является одномерным. При $0<\alpha<90^\circ$ течение в окрестности точки излома двумерное. Задача симметрична относительно оси x , поэтому в дальнейшем течение газа рассматривается в верхней полуплоскости. При этом разрывы, образующиеся при распаде начального разрыва $O'O$, отражаются от оси x , как от твердой стенки.



Фиг. 1



Фиг. 2

Рассмотрим течение газа при $t > 0$, когда начинается распад произвольного разрыва вдоль всей границы $O'O$. На фиг. 1, б приведена (с учетом результатов численных расчетов) картина течения, которая получается при распаде начального разрыва $O'O$ (фиг. 1, а) на ударную волну AA' , тангенциальный разрыв CC' и волну разрежения DD' . Параметры газа во вновь образовавшихся областях 2 и 3 легко рассчитываются по формулам одномерного распада разрыва и могут быть использованы для контроля точности решения задачи численным методом. В окрестности точки O все полученные разрывы, отражаясь от стенки, взаимодействуют между собой, образуя сложную дифракционную картину течения.

Из теории распада одномерного разрыва известно, что конфигурации образуемых разрывов AA' , CC' , DD' определяются начальными данными в областях 1 и 4. В то же время каждая одномерная конфигурация разрывов порождает новую картину двумерного течения газа в области 5 (фиг. 1, б). Воспользовавшись результатами теории одномерного распада разрыва, определим типы конфигураций разрывов, в зависимости от которых формируются разные краевые условия для нахождения двумерного течения газа в области 5: 1) A — две ударные волны с тангенциальным разрывом между ними; 2) B — ударная волна, тангенциальный разрыв и волна разрежения; 3) C — волна разрежения, тангенциальный разрыв, ударная волна; 4) D — волна разрежения, тангенциальный разрыв, волна разрежения.

Причем границы этих разрывов наклонены к оси x под углом α , от величины которого картина течения в области 5 сильно меняется. Так, на фиг. 1, б представлена конфигурация типа B , где в точке A реализуется правильное отражение ударной волны от стенки. Если угол α превышает предельно допустимое значение, то в точке A для волн умеренной интенсивности реализуется маховское отражение. Картина течения существенно усложняется.

Кроме того, сильное влияние на картину течения в области 5 для каждого типа конфигураций играет интенсивность тангенциального разрыва. Так, на фиг. 1, б скорость звука в области 3 значительно больше, чем в области 2. В результате этого скорость точки C относительно области 3 — звуковая, а относительно области 2 — сверхзвуковая, т. е. в области 5 существует сверхзвуковая область ACH .

Случай, когда α близко к 90° , рассмотрен в [9], где сформулированы краевые условия для линейной задачи по малому углу $\epsilon = 90^\circ - \alpha$, т. е. в [9] рассмотрено течение газа, мало отличающееся от одномерного, когда ударная волна AA' , тангенциальный разрыв $C'F$ и волна разрежения ED' в области 5 претерпевают малые изменения. Решение задачи в такой постановке не ухватывает характера течения, возникающего при конечном угле α . Для сравнения получим решение линейной задачи при конечном угле α , когда интенсивность образующихся волн мала.

2. Предположим, что после распада начального разрыва реализуется конфигурация типа A . Когда интенсивность образующихся волн близка к единице, уравнения движения допускают линеаризацию по малой величине, равной безразмерному избыточному давлению $p=p_3-p_1$ в волнах AA' и DD' (фиг. 2). Как обычно, в линейной задаче приводится поле избыточного давления P , отнесенного к указанному давлению p . Пусть угол наклона разрыва к оси x равен $(180-\alpha)^\circ$ (фиг. 2). Тогда при условии, что скорости звука в газе в областях 2 и 3 равны между собой, для области 5 в полярных координатах можно сформулировать краевую задачу Дирихле для величины избыточного давления. При этом значения на границе полукружности G, B, C, D, E принимают следующие значения:

$$P=0, 0<\varphi<\pi/2-\alpha; P=1, \pi/2-\alpha<\varphi<\pi-\alpha; P=2, \pi-\alpha<\varphi<\pi \quad (2.1)$$

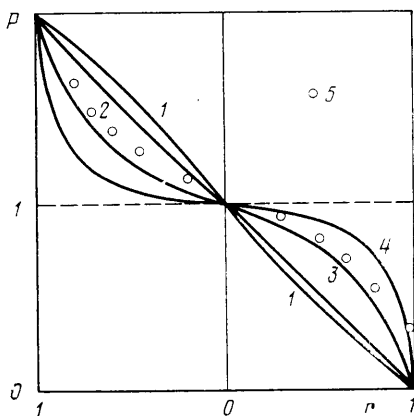
Решение задачи Дирихле представляется в виде интегральной формулы Пуассона. Непосредственные вычисления для величины избыточного давления дают:

$$P=2+\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^2(-1)^{i+1}\arctg\{(-1)^iA_i\operatorname{tg}0,25[\pi+2\alpha(-1)^{i+1}]-B_i\}+ \\ +\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^2(-1)^{i+1}\arctg\{(-1)^iA_i\operatorname{tg}0,25[\pi+2\alpha(-1)^i]-B_i\} \\ A_i=\frac{2Rr\cos\varphi+R^2+r^2}{R^2-r^2}, \quad B_i=\frac{2Rr\sin\varphi}{R^2-r^2} \quad (2.2)$$

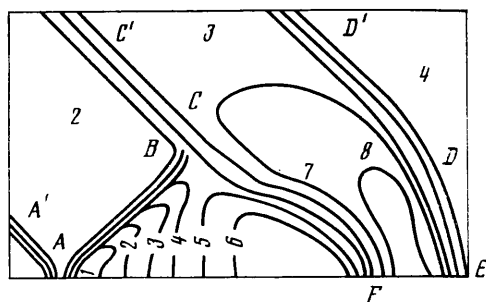
Результаты расчетов по формуле (2.2) для $\alpha=45^\circ$ даны на фиг. 2. Кривым 1–11 соответствуют значения изобар: $P=1,88; 1,7; 1,45; 1,3; 1,1; 1; 0,9; 0,74; 0,54; 0,35; 0,09$. Штриховой прямой $C'CF$ обозначен след тангенциального разрыва. Точки B и C в данном варианте задачи совпадают. Причем в точках B и D имеется особенность в решении, вызванная неточностями линейной теории. Характер таких особенностей хорошо изучен. И в нелинейном приближении в окрестности этих точек реализуется просто сильный градиент давления вдоль границы окружности. Координаты точек B, D на фиг. 2 определяются как функции угла α , т. е. $B(1,90^\circ+\alpha)$, $D(1,90^\circ-\alpha)$. Видно, что при $\alpha\rightarrow90^\circ$ точки B и D стремятся соответственно к точкам G и E . Области с большим ($P=2$) и малым ($P=0$) давлениями стягиваются в точки G и E , а центральные области 2 и 3 с $P=1$ занимают всю область 5, т. е. в пределе имеется одномерный распад.

При $\alpha\rightarrow0$ точки B и D стягиваются в точку H . Области с большим и малым давлениями занимают почти всю область, кроме центральной зоны вокруг линии FH . Течение в области 5 существенно неоднородное (двумерное). В пределе имеем, что от оси x отражается волна AB . Точка A устремляется в бесконечность влево, точка B совпадает с точкой H , а справа от точки B идут возмущения (звуковая окружность), являющиеся результатом обрыва ударной волны AB в точке B .

Угол φ , который составляет разрыв $C'CF$ с осью x , равен $(180-\alpha)^\circ$. Тогда при $\alpha\rightarrow0$ имеем, что точка C стремится к точке G , а B — к H . Отсюда видно, что при $\alpha<45^\circ$ волна AB и тангенциальный разрыв $C'F$ пересекаются. При умеренных и сильных интенсивностях разрывов это пересечение будет порождать новые ударные волны, тангенциальные разрывы и волны разрежения в соответствии с теорией взаимодействия ударной волны с тангенциальным разрывом. Причем это взаимодействие может быть регулярным или нерегулярным в зависимости от угла α и интенсивности взаимодействующих разрывов.



Фиг. 3



Фиг. 4

В случае $\alpha \rightarrow 90^\circ$ тангенциальный разрыв стремится совпасть с линией FH , что происходит при одномерном распаде разрыва.

На фиг. 3 приведено распределение избыточного давления на поверхности тела GFE в соответствии с формулой (2.2). Кривым 1–4 соответствуют значения углов $\alpha = 15, 45, 75$ и 85° . По теории распада одномерного разрыва ($\alpha = 90^\circ$) величина избыточного давления в областях 2 и 3 равна 1 (штриховая прямая). При малых и умеренных значениях угла α величина P убывает от 2 до 0 почти по линейному закону. При $\alpha \rightarrow 90^\circ$ изменение величины P происходит в основном в области точек G и E , а в средней части рассматриваемой области решение близко к одномерному. Решение (2.2) неверно при α , близких к 90° , так как в этом случае течение газа описывается нелинейными уравнениями. Точки 5 на фиг. 3 соответствуют задаче о столкновении двух потоков газа с малыми скоростями под углом $71,5^\circ$. Решение ее найдено с помощью полных уравнений Эйлера. В этом случае краевая задача для давления формулируется, как в (2.1), но вдоль границы CC' (фиг. 2) здесь существует разрыв касательных скоростей. Это вносит качественное отличие получаемого решения от линейного (2.2). Так, на дуге DE ударная волна не вырождается в характеристику, а течение в области 5 вихревое.

Для разрывов большой интенсивности решение задачи ищется численным методом установления.

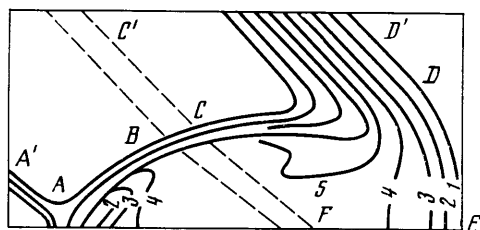
3. Опишем граничные и начальные условия задачи о двумерном распаде произвольного распада на фиг. 1, б при численном ее решении. Так как задача симметрична относительно оси x , на фиг. 1 рассмотрим верхнюю полуплоскость, которая в момент $t=0$ разбита на две области 1 и 4 прямой $y = y_0 - \operatorname{tg} \alpha x$. Тогда для областей 1 и 4 параметры газа в начальный момент времени принимают следующие значения:

$$P = P_i, \quad \rho = \rho_i, \quad u = u_i, \quad v = v_i \quad i=1, \quad y \leq y_0 - \operatorname{tg} \alpha x, \quad i=2, \quad y > y_0 - \operatorname{tg} \alpha x$$

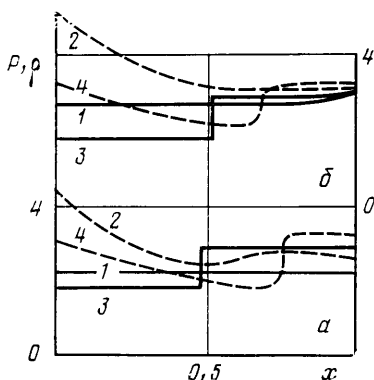
При $t > 0$ на границе областей происходит распад произвольного разрыва. Расчет параметров газа проводится в прямоугольной системе координат по известной численной схеме Лакса – Вендроффа [3], на внешних границах областей значения параметров получаются путем сноса из близлежащих внутренних точек. На оси выполняется процедура отражения. Для расчета течения газа используются нестационарные уравнения Эйлера. Так как задача автомодельна, то картина течения быстро устанавливается со временем.

На фиг. 4 приведено поле плотности для конфигураций типа A при следующих значениях параметров газа в областях 1 и 4: $P_1=1, \rho_1=1, u_1=1, P_4=1, \rho_4=2, u_4=-1$ и $\alpha=45^\circ$.

В дальнейшем начальные значения параметров будем указывать сокращенно в виде вектора: $(1, 1, 1, 1, 2, -1, 45^\circ)$. Этот случай соответствует столкновению потоков газа с разными плотностями. В результате распада



Фиг. 5



Фиг. 6

разрывов образуется сильный тангенциальный разрыв $C'SF$, который, взаимодействуя с отраженной волной AB , преломляется в точке C и подходит к поверхности тела AE под углом 90° .

Течение в области 5 неоднородное. В точке C реализуется нерегулярное взаимодействие ударной волны AB с тангенциальным разрывом $C'S$. В области $ABCF$ образуется сильная волна разрежения как результат отражения волны AC от тангенциального разрыва. При этом волна AC проходит через тангенциальный разрыв в виде слабой ударной волны CD .

Изохоры на фиг. 4 помечены цифрами 1–8, которым соответствуют следующие значения: 2,7; 2,54; 2,4; 2,26; 2,1; 1,97; 2,97; 3,1. В области 2 и 3 рассчитанные значения плотности равны 1,75 и 2,83.

На фиг. 5 приведено поле изобар для конфигурации типа B с начальными данными: $(1, 1, 0, 3, 3, 0, 45^\circ)$. Так как в этом варианте задачи в отличие от фиг. 4 на тангенциальном разрыве (штриховая кривая) нет начального разрыва касательной составляющей скорости, то тангенциальный разрыв претерпевает незначительные деформации и подходит к поверхности тела, почти не преломляясь. При этом параметры газа в области 5 существенно меняются лишь в окрестности точек A и E . Для сравнения был просчитан вариант $(1, 1, 0, 30, 30, 0, 45^\circ)$. Характер течения в области 5 в этом случае для более интенсивных начальных волн оказался тот же. Слабая ударная волна CD расположена параллельно стенке AE . Изменения величины угла α для конфигурации типа B не дали качественных изменений в характере поведения параметров газа вдоль поверхности тела. Значения изобар на фиг. 5 равны: $P=2,83; 2,69; 2,55; 2,4; 2,27$.

Для того чтобы нагляднее показать количественное и качественное различие между одномерным и двумерным распадами произвольного разрыва, на фиг. 6 приведено сравнение эпюр давлений и плотности для двух вариантов задачи. Двумерное решение взято в области 5 вдоль поверхности тела, а координата x отнормирована по ее длине. Цифры 1, 2 соответствуют эпюрам давления, а 3, 4 — плотности, причем сплошные кривые получены по одномерной теории, а пунктирные — по двумерной.

Результаты, представленные на фиг. 6, а, соответствуют решению, данному на фиг. 4. На фиг. 6, б представлен случай, когда в конфигурации B волна разрежения вырождается. Начальные значения параметров равны: $(1, 1, 1, 3, 3, 0, 45^\circ)$. В этом случае параметры газа справа от тангенциального разрыва практически совпадают с параметрами из невозмущенной области 4. В обоих случаях на фиг. 6 видно существенное отличие в местоположении тангенциального разрыва по сравнению с одномерной теорией. Это объясняется влиянием касательных составляющих скорости в областях 2 и 3 (фиг. 4) на преломление тангенциального разрыва при столкновении с ударной волной.

Расчеты, аналогичные приведенным на фиг. 4–5, были проведены и для конфигураций типа *C* и *D*. Анализ результатов численного и аналитического исследования задачи о двумерном распаде произвольного разрыва показывает, что в точках, где сходятся два произвольных прямолинейных разрыва, со временем развивается сложное двумерное течение газа. Многообразие этих течений зависит от угла между произвольными разрывами и интенсивности начальных разрывов в областях 1 и 4. Наибольшее отличие течения от одномерного проявляется при малом значении α в конфигурациях типа *A* и *B*, когда образующиеся ударные волны взаимодействуют между собой и с тангенциальным разрывом.

Существенное влияние на картину течения оказывает также вихревой слой, образующийся на границе областей 2 и 3. В зависимости от величины касательных составляющих скоростей в этих областях образующийся тангенциальный разрыв может значительно деформироваться (скручиваться) в области 5. В частности, в задаче о столкновении потоков газа при величине касательных скоростей порядка единицы относительно скорости звука прирост энтропии в вихревом слое может увеличиваться вдвое по сравнению с ее величиной в областях 2 и 3.

В работе проведен расчет варианта задачи с начальными данными: (100, 100, 0, 1, 1, 0, 45°), который приведен на фиг. 1 и 2 в [10]. Сравнение результатов на сетке 60×75 выявило качественное различие в поведении контактного разрыва в области 5. В частности, прогиб контактного разрыва вблизи оси симметрии не наблюдается. Граница области со стороны волны разрежения находится ближе к началу координат. Точка, в которой наблюдается максимальная величина скорости на оси симметрии, является центром зоны эллиптичности течения.

Это различие, по-видимому, вызвано неточным вычислением начального положения границ разрывов в расчетной области из-за малого количества расчетных точек в [10].

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н. Е. К теории разрывов в жидкости // Собр. соч. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1949. Т. 2. С. 5–42.
2. Колган В. П., Фонарев А. С. Установление обтекания при падении ударной волны на цилиндр и сферу // Изв. АН СССР. МЖГ. 1972. № 5. С. 97–103.
3. Тугазаков Р. Я. Нестационарная пространственная задача о падении ударной волны на движущееся плоское треугольное крыло // Тр. ЦАГИ. 1978. Вып. 1917. С. 32–37.
4. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
5. Козманов М. Ю. К задаче о распаде двумерного разрыва // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР. 1978. Т. 9. № 2. С. 60–75.
6. Тугазаков Р. Я., Фонарев А. С. Начальная стадия столкновения взрывных волн // Изв. АН СССР. МЖГ. 1971. № 5. С. 41–48.
7. Тещуков В. М. Распад произвольного разрыва на криволинейной поверхности // ПМТФ. 1980. № 2. С. 126–133.
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1954. 795 с.
9. Тещуков В. М. Автомодельная задача о распаде двумерного разрыва // ПМТФ. 1972. № 2. С. 29–38.
10. Шуриалов Л. В. Об одном классе двумерных нестационарных течений с ударными волнами // Изв. АН СССР. МЖГ. 1974. № 2. С. 69–74.
11. Архангельский Н. А., Шуриалов Л. В. Задача о разлете конического объема раскаленного газа // Изв. АН СССР. МЖГ. 1977. № 1. С. 83–88.

Москва

Поступила в редакцию
10.IV.1987