

УДК 533.6.011.55

ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ ТОНКИЙ ВЯЗКИЙ УДАРНЫЙ СЛОЙ ПРИ ОТСУТСТВИИ В ТЕЧЕНИИ ПЛОСКОСТЕЙ СИММЕТРИИ

БОРОДИН А. И., ПЕЙГИН С. В.

В рамках модели тонкого вязкого ударного слоя исследуются основные закономерности обтекания с большой сверхзвуковой скоростью гладких затупленных тел с проницаемой поверхностью потоком вязкого однородного газа. Предлагается эффективный численный метод решения этих уравнений, позволяющий рассматривать случаи обтекания тел под углами атаки и скольжения, когда плоскости симметрии в течении отсутствуют. В качестве примера приведены некоторые результаты расчета обтекания трехосного эллипсоида с соотношениями между осями 10:7:3 под углами атаки $\alpha=0-45^\circ$ и углами скольжения $\beta=0-45^\circ$ в широком диапазоне чисел Рейнольдса. Проанализировано влияние основных определяющих параметров задачи на структуру течения в ударном слое, коэффициенты трения и теплообмена на поверхности. На основании решений, полученных в данной работе, и работ других авторов предлагается формула для расчетов тепловых потоков к непроницаемой поверхности гладких затупленных тел, обтекаемых сверхзвуковым потоком однородного вязкого газа в широком диапазоне чисел Рейнольдса.

Ранее исследования обтекания тел в рамках модели тонкого вязкого ударного слоя проводились в ряде работ [1-6]. В [1, 2] рассмотрено течение в окрестности критической точки двойной кривизны, а в [3, 4] — течение в окрестности плоскости симметрии затупленных тел. Изучение обтекания тел с двумя плоскостями симметрии под нулевым углом атаки при умеренно малых числах Рейнольдса проведено в [5]. Приближенный численный метод решения для случая отсутствия в течении плоскостей симметрии предложен в [6].

1. Постановка задачи. Уравнения, описывающие течение однородного газа в пространственном тонком вязком ударном слое в криволинейной системе координат $\{x^i\}$ (x^3 отсчитывается по нормали к телу, x^1, x^2 некоторым образом выбраны на поверхности тела), имеют следующий безразмерный вид [7]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^i} \left\{ \rho u^i \sqrt{\frac{a}{a_{(ii)}}} \right\} &= 0 & (1.1) \\ \rho (Du^\alpha + A_{\beta\delta} u^\beta u^\delta) &= - \frac{2\varepsilon a^{\alpha\beta}}{1+\varepsilon} \sqrt{a_{(\alpha\alpha)}} \frac{\partial p}{\partial x^\beta} + \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\frac{\mu}{K} \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^3} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial x^3} &= - \frac{1+\varepsilon}{2} \rho A_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta \\ \rho DT &= \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon} D^\circ p + \frac{\mu}{K} \Psi_{\alpha\beta} \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^3} \frac{\partial u^\beta}{\partial x^3} + \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\frac{\mu}{\sigma K} \frac{\partial T}{\partial x^3} \right) \\ p &= \rho T, \quad \mu = T^\omega, \quad K = \varepsilon \operatorname{Re}, \quad T_0 = T_\infty (\gamma - 1) M_\infty^2 \\ \varepsilon &= \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}, \quad \operatorname{Re} = \frac{\rho_\infty V_\infty R}{\mu(T_0)}, \quad D \equiv D^\circ + u^3 \frac{\partial}{\partial x^3} \\ D^\circ &\equiv \frac{u^\alpha}{\sqrt{a_{(\alpha\alpha)}}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \quad \Psi_{\alpha\beta} = \frac{a_{\alpha\beta}}{\sqrt{a_{(\alpha\alpha)} a_{(\beta\beta)}}} \end{aligned}$$

Здесь по паре повторяющихся индексов производится суммирование, по индексам, заключенным в круглые скобки, суммирование отсутствует; латинский индекс i принимает значения 1, 2, 3, а греческие индексы α, β, δ — 1, 2. Все линейные размеры отнесены к характерному размеру R , а нормальная координата — к εR ; $V_\infty u^\alpha, V_\infty \varepsilon u^3$ — физические компоненты вектора скорости в направлениях x^α, x^3 соответственно; $\rho_\infty V_\infty^2 (\gamma + 1) p / \gamma, \varepsilon^{-1} \rho_\infty \rho, T_0 T, \mu_0 \mu$ — давление, плотность, температура, коэффициент вязкости; $\sigma = \text{const}$ — число Прандтля; $a_{\alpha\beta}$ — ковариантные компоненты основного метрического тензора. Величины $A_{\alpha\beta^i}$ известным образом зависят от формы обтекаемого тела и приведены в [7].

Граничные условия имеют вид

$$x^3 = 0: \quad u^\alpha = 0, \quad (\rho u^3)_w = G(x^1, x^2), \quad T = T_w(x^1, x^2) \quad (1.2)$$

$$x^3 = x_s^3(x^1, x^2): \quad \rho(u^3 - D^\circ x_s^3) = u_\infty^3 \quad (1.3)$$

$$u_\infty^3 \{ T - 0,5 [(u_\infty^3)^2 + \psi_{\alpha\beta} (u^\alpha - u_\infty^\alpha) (u^\beta - u_\infty^\beta)] \} = \frac{\mu}{\sigma K} \frac{\partial T}{\partial x^3}$$

$$u_\infty^3 (u^\alpha - u_\infty^\alpha) = \frac{\mu}{K} \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^3}, \quad p = 0,5(1 + \varepsilon) (u_\infty^3)^2$$

Здесь и далее индексы w, ∞, s соответствуют значениям переменных на теле, в набегающем потоке и на поверхности ударной волны. Как показано в [7], система (1.1)–(1.3) является асимптотической формой уравнений Навье — Стокса при $\varepsilon \rightarrow 0, \text{Re} \rightarrow \infty, K \gg O(1)$.

Конкретизируем выбор системы координат (x^1, x^2) на поверхности тела. Пусть $\{z^i\}$ — декартова система координат, в которой уравнение поверхности обтекаемого тела имеет вид $F(z^1, z^2, z^3) = 0$, а $\mathbf{l}$ — единичный вектор, совпадающий по своему направлению с вектором скорости набегающего потока и имеющий в системе $\{z^i\}$ компоненты $(\cos \alpha, \sin \alpha \sin \beta, \sin \alpha \cos \beta)$ (α — угол атаки, β — угол скольжения). От системы $\{z^i\}$ перейдем к декартовой системе $\{y^i\}$ по формулам

$$\mathbf{z} - \mathbf{z}_0 = \Lambda(A\mathbf{y}) \quad (1.4)$$

где $\mathbf{z}_0$ — радиус-вектор критической точки, Λ — диагональная матрица, определяющая преобразование сжатия (растяжения), а A — матрица, задающая поворот осей таким образом, чтобы ось y^1 была направлена по нормали внутрь тела. Далее выберем на оси y^1 точку B и введем сферическую систему координат по формулам

$$\begin{aligned} y^1 - y_B^1 &= -r \cos(mx^1), \quad y^2 = r \sin(mx^1) \cos x^2 \\ y^3 &= r \sin(mx^1) \sin x^2 \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $m = m(x^2)$ — некоторая функция, осуществляющая растяжение координат по оси x^1 (об условиях выбора ее будет сказано ниже). Компоненты основного метрического тензора $a_{\alpha\beta}$ в системе (x^1, x^2) выражаются следующим образом:

$$a_{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x^\beta} \right) \quad (1.6)$$

При этом $\partial \mathbf{z} / \partial x^\alpha$ ($\alpha = 1, 2$) определяются на основе преобразований (1.4)–(1.5), а необходимые при этом величины $r = r(x^1, x^2)$, $\partial r / \partial x^\alpha$ получаются при подстановке (1.4)–(1.5) в уравнение поверхности тела $F(z^1, z^2, z^3) = 0$.

Определенная таким образом система координат (x^1, x^2) на поверхности тела представляет собой систему координат типа цилиндрической с началом в критической точке $x^1 = 0$. Как показывает анализ, при $x^1 \rightarrow 0$ эта система координат вырождается, причем в окрестности критической

$$a_{11}=O(1), \quad a_{12}=O(x^1), \quad a_{22}=O(x^1)^2 \quad (1.7)$$

2. Численное решение задачи. Для удобства численного решения задачи перейдем в (1.1)–(1.3) к новым переменным.

$$\xi^\alpha = x^\alpha, \quad \zeta = \frac{1}{\Delta} \int_0^{x^3} \rho \, dx^3, \quad \Delta = \int_0^{x^3} \rho \, dx^3, \quad l = \frac{\mu \rho}{K \Delta^2} \quad (2.1)$$

$$u_1^\alpha = \frac{u^\alpha}{u_*^\alpha} = \frac{\partial f_\alpha}{\partial \xi^\alpha}, \quad \theta = \frac{T}{T_*}, \quad P_1 = \frac{1}{\xi^1} \frac{\partial p}{\partial \xi^1}, \quad P_2 = (\xi^1)^{-2} \frac{\partial p}{\partial \xi^2}$$

$$\rho u^3 \bar{v} a = - \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} (\psi_{(\alpha)}^* f_\alpha) - \psi_{(\alpha)}^* \frac{\partial f_\alpha}{\partial \xi} \frac{\partial \zeta}{\partial x^\alpha}, \quad \varphi_\alpha^* = \frac{u_*^\alpha}{\bar{v}_{(\alpha\alpha)}}$$

$$\psi_\alpha^* = \Delta \bar{v} \varphi_\alpha^*$$

В переменных (2.1) уравнение неразрывности удовлетворится тождественно, а оставшаяся система уравнений примет вид (нижний индекс 1 опускаем)

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(l \frac{\partial u^\alpha}{\partial \xi} \right) = D u^\alpha + C_{\beta\delta}^\alpha u^\beta u^\delta + \frac{2\varepsilon}{(1+\varepsilon)\rho} L_\beta^\alpha P_\beta \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{l}{\sigma} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) = D \theta + F_\alpha u^\alpha \theta - \frac{2\varepsilon u^\beta}{(1+\varepsilon)\rho} L_{(\beta)}^\alpha P_\beta - l C_{\alpha\beta}^3 \frac{\partial u^\alpha}{\partial \xi} \frac{\partial u^\beta}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} = -0,5(1+\varepsilon) P_{\alpha\beta}^3 u^\alpha u^\beta, \quad \frac{\partial P_\alpha}{\partial \xi} = -0,5(1+\varepsilon) \left(K_{\beta\delta}^\alpha u^\beta u^\delta + M_{\beta\delta}^{\alpha\alpha} u^\beta \frac{\partial u^\delta}{\partial \xi^\alpha} \right),$$

$$D = \varphi_{(\alpha)}^* u^\alpha \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} - \left(\varphi_{(\alpha)}^* \frac{\partial f_\alpha}{\partial \xi^\alpha} + B_\alpha f_\alpha \right) \frac{\partial}{\partial \xi}$$

Последние два уравнения в (2.2) получены из третьего уравнения в (1.1) (уравнения импульсов в проекции на нормаль), к которому были применены операторы $(\xi^1)^{-1} \partial / \partial \xi^1$ (при $\alpha=1$) и $(\xi^1)^{-2} (\partial / \partial \xi^2)$ (при $\alpha=2$).

Граничные условия запишутся в следующем виде:

$$\zeta=0: u^\alpha=0, \quad \theta=\theta_w(\xi^1, \xi^2), \quad \Delta \left(B_\alpha f_\alpha + \varphi_{(\alpha)}^* \frac{\partial f_\alpha}{\partial \xi^\alpha} \right) = -G \quad (2.3)$$

$$\zeta=1: l \Phi(u^\alpha) \zeta' + u^\alpha = u_\infty^\alpha, \quad p=0,5(1+\varepsilon)(u_\infty^3)^2 \\ l \Phi \sigma^{-1} \theta \zeta' + \theta = \theta_\infty + 0,5 C_{\alpha\beta}^3 (u^\alpha - u_\infty^\alpha) (u^\beta - u_\infty^\beta) \quad (2.4)$$

$$B_\alpha f_\alpha + \varphi_{(\alpha)}^* \frac{\partial f_\alpha}{\partial \xi^\alpha} = \Phi^{-1}, \quad P_1 = P_{1\infty} = \frac{1+\varepsilon}{\xi^1} \frac{\partial u_\infty^3}{\partial \xi^1} u_\infty^3$$

$$P_2 = P_{2\infty} = \frac{1+\varepsilon}{(\xi^1)^2} \frac{\partial u_\infty^3}{\partial \xi^2} u_\infty^3, \quad \Phi = - \frac{\Delta}{u_\infty^3}$$

Коэффициенты, введенные в (2.2)–(2.4), определены следующим образом:

$$C_{(\alpha\alpha)}^\alpha = A_{(\alpha\alpha)}^\alpha u_*^{(\alpha)} + \frac{\partial u_*^{(\alpha)}}{\partial \xi^\alpha} (a_{(\alpha\alpha)})^{-1/2}, \quad B_\alpha = (\Delta \bar{v} a)^{-1} \frac{\partial \psi_{(\alpha)}^*}{\partial \xi^\alpha}$$

$$C_{12}^\alpha = C_{21}^\alpha = A_{12}^\alpha u_*^\beta + 0,5 \varphi_{(\beta)}^* \frac{\partial \ln u_*^\alpha}{\partial \xi^\beta} \quad (\alpha \neq \beta)$$

$$C_{(\beta\beta)}^\alpha = A_{(\beta\beta)}^\alpha \frac{(u_*^{(\beta)})^2}{u_*^{(\alpha)}} \quad (\alpha \neq \beta), \quad C_{\alpha\beta}^3 = T_*^{-1} \psi_{\alpha\beta} u_*^{(\alpha)} u_*^{(\beta)}$$

$$F_\alpha = \frac{\partial \ln T_*}{\partial \xi^\alpha} \Phi_{(\alpha)}, \quad L_\beta^\alpha = (u_*^{(\alpha)})^{-1} a^{(\alpha\beta)} \sqrt{a_{(\alpha\alpha)}} (\xi^1)^\beta \quad (2.5)$$

$$P_{\alpha\beta}^3 = A_{\alpha\beta}^3 \Delta u_*^{(\alpha)} u_*^{(\beta)}, \quad L_\beta^3 = \frac{u_*^{(\beta)} (\xi^1)^\beta}{\sqrt{a_{(\beta\beta)}} T_*}, \quad M_{\beta\delta}^\alpha = \frac{2}{(\xi^1)^\alpha} P_{\beta\delta}^3$$

$$K_{\beta\delta}^\alpha = (\xi^1)^{-\alpha} \frac{\partial P_{\beta\delta}^3}{\partial \xi^{(\alpha)}}, \quad u_*^\alpha = \frac{u_\infty^\alpha}{u_*^\alpha}, \quad \theta_s = \frac{(u_\infty^3)^2}{2T_*}$$

Остановимся теперь на вопросе о выборе введенных выше в (2.1) функций $u_*^\alpha(\xi^1, \xi^2)$ и $T_*(\xi^1, \xi^2)$. В общем случае их необходимо выбирать из условия отсутствия особенностей в коэффициентах (2.5) системы (2.2)–(2.4) в критической точке. Надо при этом учитывать, что точка $\xi^1=0$ является особой точкой системы дифференциальных уравнений (1.1) и что в ней система координат (ξ^1, ξ^2) является вырожденной. Исходя из того, что критическая точка это точка локального максимума давления, и учитывая характер поведения компонент метрического тензора при $\xi^1 \rightarrow 0$, можно показать, что особенности в (2.5) разрешаются при выполнении условий

$$\lim_{\xi^1 \rightarrow 0} \frac{u_*^\alpha}{\xi^1} = O(1), \quad \lim_{\xi^1 \rightarrow 0} (\xi^1)^{-1} \frac{\partial T_*}{\partial \xi^1} = O(1) \quad (2.6)$$

Учитывая (2.6), положим $u_*^1 = u_\infty^1(\xi^1, \xi^2)$, $u_*^2 = \xi^1$, $T_* = 0,5(u_\infty^3)^2$. В этом случае коэффициенты u_*^α и θ_s в граничных условиях (2.4) несколько упрощаются и принимают вид $u_s^1 = \theta_s = 1$, $u_s^2 = u_\infty^2/\xi^1$.

В силу выбора системы координат на поверхности численное решение двухточечной начально-краевой задачи (2.2)–(2.4) имеет ряд особенностей. Прежде всего, поскольку ξ^2 меняется в диапазоне $0 \leq \xi^2 \leq 2\lambda$ и все геометрические характеристики и коэффициенты (2.5) — периодические (с периодом 2λ) функции ξ^2 , при решении необходимо учитывать периодичность всех искомых функций по координате ξ^2 . Кроме того, из-за вырожденности системы (ξ^1, ξ^2) при $\xi^1=0$ для получения решения уравнений пространственного тонкого вязкого ударного слоя в окрестности критической точки использовалась невырожденная криволинейная система координат (t^1, t^2, t^3) . Ее начало находилось в критической точке, ось Ot^3 совпадала с нормалью к телу, а оси Ot^1 и Ot^2 — с пересечением касательной к поверхности тела плоскости с главными нормальными сечениями тела в данной точке. В указанной системе координат система уравнений вязкого ударного слоя сохраняет вид (2.2), а ненулевые коэффициенты в (2.5) принимают значения

$$B_1 = C_{11}^1 = \frac{R}{R_1}, \quad B_2 = C_{22}^2 = \frac{R}{R_2}, \quad L_1^1 = L_2^2 = 1$$

$$K_{(\alpha\alpha)}^\alpha = -2\Delta \left(\frac{R}{R_\alpha} \right)^2, \quad P_{\alpha s} = -(1+\varepsilon) \frac{R}{R_\alpha} \quad (2.7)$$

где R_1 и R_2 — радиусы главных кривизн тела в критической точке.

После определения решения u_0^α , θ_0 системы уравнений (2.2)–(2.4) в системе координат $\{t^i\}$ производился пересчет решения в систему координат (ξ^1, ξ^2, ξ) по формулам

$$u^1(0, \xi^2, \xi) = \frac{u_0^1 u_\infty^1 \alpha_{11} + u_0^2 u_\infty^2 \alpha_{21}}{u_\infty^1 \alpha_{11} + u_\infty^2 \alpha_{21}}$$

(2.8)

$$u^2(0, \xi^2, \zeta) = (\xi^1)^{-1} (u_0^1 u_\infty^1 \alpha_{12} + u_0^2 u_\infty^2 \alpha_{22}), \quad \theta(0, \xi^2, \zeta) = \theta_0$$

$$\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} m^{-1} \sqrt{a_{(ij)}} \beta_{ij} \quad (i, j=1, 2)$$

$$\beta_{i1} = \delta_{i1} \cos \theta + \delta_{i2} \sin \theta, \quad \beta_{i2} = -\delta_{i1} \sin \theta + \delta_{i2} \cos \theta$$

(2.9)

$$\delta_{i1} = \frac{\partial}{\partial \xi^i} (z^2 \sin \beta - z^3 \cos \beta), \quad m = \delta_{11} \delta_{22} - \delta_{12} \delta_{21}$$

$$\delta_{i2} = \frac{\partial}{\partial \xi^i} (z^2 \cos \alpha \cos \beta - z^1 \sin \alpha + z^3 \cos \alpha \sin \beta)$$

Здесь α_{11} , α_{12} и α_{21} , α_{22} — коэффициенты связи единичных векторов базиса систем координат (t^1, t^2) и (ξ^1, ξ^2) на поверхности в критической точке, θ — угол, на который нужно развернуть в касательной к поверхности тела плоскости оси Oy^2 и Oy^3 декартовой системы координат $\{y^i\}$, чтобы они лежали в плоскости главных нормальных сечений.

Численное решение системы (2.2) — (2.4) находилось с использованием неявной разностной схемы, имеющей порядок аппроксимации $O(\Delta \xi)^4 + O(\Delta \xi^1) + O(\Delta \xi^2)^2$ и представляющей собой обобщение на трехмерный случай схемы [8]. При этом производные по ξ^1 вычислялись с первым порядком точности с использованием «разностей назад», а производные по угловой координате ξ^2 аппроксимировались центральными разностями на основании решения, полученного в предыдущей глобальной итерации на текущей окружности $\xi^1 + \Delta \xi^1 = \text{const}$.

Таким образом, решение в каждой точке $(\xi^1 + \Delta \xi^1, \xi^2)$ текущей окружности $\xi^1 + \Delta \xi^1$ определялось на основе решения, полученного на предыдущей окружности $\xi^1 = \text{const}$ в точке (ξ^1, ξ^2) , и решения, вычисленного в предыдущей глобальной итерации на данной окружности в точках $(\xi^1 + \Delta \xi^1, \xi^2 \pm \Delta \xi^2)$. При этом величина $\Delta(\xi^1 + \Delta \xi^1, \xi^2)$, характеризующая отход ударной волны, определялась на основе решения последнего из уравнений (2.4) с использованием алгоритма циклической прогонки по координате ξ^2 [9]. Этот же алгоритм применялся и для определения $f_{1w} = f_{2w} = f_w(\xi^1, \xi^2)$ при решении последнего из уравнений в (2.3) в случае, когда $G(\xi^1, \xi^2) \neq 0$ (для непроницаемой поверхности это уравнение имеет тривиальное решение $f_{1w} = f_{2w} = 0$).

3. Обсуждение результатов расчетов. В качестве примера приведем результаты расчета обтекания трехосного эллипсоида, уравнение которого в системе $\{z^i\}$ имеет вид $(z^1 - 1)^2 + (z^2/0.7)^2 + (z^3/0.3)^2 = 1$, под углом атаки α и углом скольжения β ($0 \leq \alpha \leq 45^\circ$, $0 \leq \beta \leq 45^\circ$). В этом случае диагональные члены матрицы Λ равны полуосям эллипсоида, уравнение его поверхности в сферической системе координат (ξ^1, ξ^2, r) имеет вид $r = 1$, а матрица A определяется следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} -DFB^{-1} & FB^{-1} & D \\ B & 0 & E \\ -EFB^{-1} & DB^{-1} & F \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

$$D = (M \cos \beta)^{-1}, \quad E = b \operatorname{tg} \alpha M^{-1}$$

$$F = c M^{-1} \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta, \quad B = \sqrt{D^2 + F^2}$$

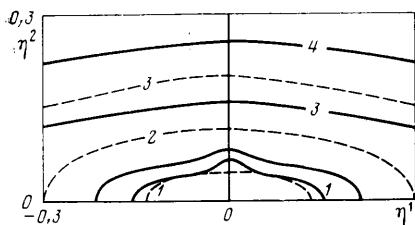
$$M = [1 + \operatorname{tg}^2 \beta (1 + c^2 \operatorname{tg}^2 \alpha) + b^2 \operatorname{tg}^2 \alpha]^{1/2}$$

$$b = 0.7; \quad c = 0.3$$

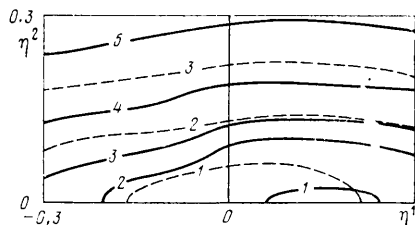
Функция $m = m(\xi^2)$ выбиралась так, чтобы на линии $\xi^1 = 1$ нормаль к поверхности тела была перпендикулярна вектору I . Определяющие параметры варьировались в следующих диапазонах:

$$\varepsilon = 0.1; \quad \omega = 0.5; \quad 0.1 \leq \theta_w \leq 0.35; \quad \sigma = 0.71 \quad (3.2)$$

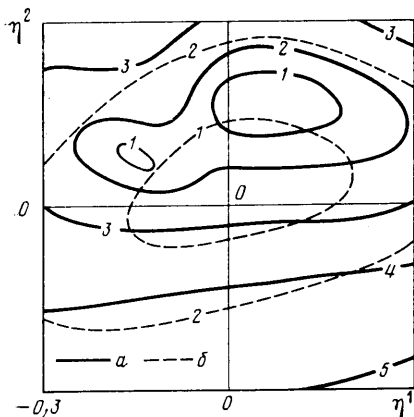
$$10 \leq \operatorname{Re} \leq 10^6, \quad 0 \leq G \leq 10^{-2}$$



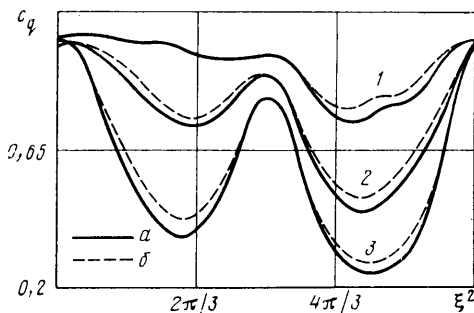
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

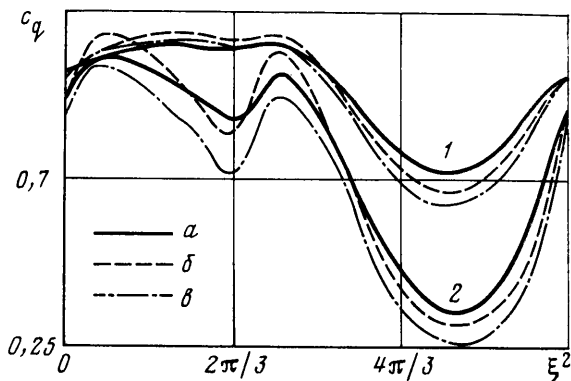
В процессе решения системы (2.2)–(2.4) определялись компоненты вектора скорости, температура и давление поперек ударного слоя, отход ударной волны, а также коэффициенты трения и теплообмена на поверхности тела:

$$q = \frac{2\sqrt{\text{Re}}}{\rho_\infty V_\infty^3} \lambda \frac{\partial T}{\partial x^3}, \quad \tau_\alpha = \frac{\sqrt{\text{Re}}}{\rho_\infty V_\infty^2} \frac{\mu}{u_*^\alpha} \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^3} \quad (3.3)$$

$$c_q = \frac{q(\xi^1, \xi^2)}{q(0, \xi^2)}, \quad c_\alpha = \frac{\tau_\alpha(\xi^1, \xi^2)}{\tau_\alpha(0, \xi^2)}$$

На фиг. 1–3 изображены изолинии c_q (линии a) и относительного распределения давления p_w° на поверхности (линии b) в плоскости переменных $\eta^1 = \xi^1 \cos \xi^2$, $\eta^2 = \xi^1 \sin \xi^2$ при $\theta_w = 0,25$ для различных значений чисел Рейнольдса, углов α и β . На фиг. 1 приведены результаты при $\text{Re} = 5 \cdot 10^4$, $\alpha = \beta = 0$; здесь $c_q = 0,95; 0,9; 0,6; 0,3$ — линии 1–4, $p_w^\circ = 0,9; 0,6; 0,3$ — линии 1–3. На фиг. 2 ($\text{Re} = 5 \cdot 10^4$, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 0$) $c_q = 1,02; 0,9; 0,8; 0,6; 0,3$ — линии 1–5, $p_w^\circ = 0,9; 0,6; 0,3$ — линии 1–3. На фиг. 3 ($\text{Re} = 5 \cdot 10^5$, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 45^\circ$) $c_q = 1,1; 1,06; 0,9; 0,6; 0,3$ — линии 1–5, $p_w^\circ = 0,9; 0,6$ — линии 1, 2.

Из приведенных результатов видно, что при заданной форме обтекаемого тела наличие углов атаки и скольжения приводит к значительному изменению картины изолиний теплового потока на его поверхности. При $\alpha = \beta = 0$ распределения c_q и p_w° носят симметричный характер и для рассмотренной в работе формы эллипсоида имеют локальный максимум в критической точке. При ненулевых значениях α и β максимум p_w° остается в критической точке, в то время как максимум c_q смещается из точки $\xi^1 = 0$ и при $0 \leq \xi^2 \leq \lambda$ на поверхности тела возникает достаточно обширная область, в которой величина теплового потока превышает свое значение в критической точке. При этом с ростом углов атаки и сколь-



Фиг. 5

жения, и с увеличением температуры поверхности значение максимума c_q возрастает, а абсолютное значение максимума потока q в этих точках падает.

Ранее при решении уравнений пространственного тонкого вязкого ударного слоя в некоторых работах, например в [3, 4, 6], использовались различные подходы, основанные на приближенном задании продольных градиентов давления p_α поперек ударного слоя. В связи с этим в данной работе исследовалось влияние способа определения продольных градиентов давления на толщину ударного слоя и распределения коэффициентов трения и теплообмена на поверхности. Для этого наряду с расчетами, выполненными в точной постановке, были получены решения, в которых величины p_α не менялись поперек ударного слоя и принимались равными своим значениям на ударной волне.

Некоторые результаты проведенных расчетов приведены на фиг. 4, на которой изображены зависимости величины c_q для точного (линии a) и приближенного (линии b) методов расчета продольных градиентов давления при $\alpha=45^\circ$, $\beta=15^\circ$, $Re=5 \cdot 10^4$, $\theta_w=0,25$, $\xi^1=0,1; 0,2; 0,3$ (линии 1, 2, 3). В целом из проведенных сравнений следует, что приближенный подход приводит к некоторому увеличению (на 10–15%) толщины ударного слоя и соответствующему уменьшению абсолютных значений q и τ_α . В то же время для относительных распределений c_q и c_α , как это видно из фиг. 4, соответствующая погрешность существенно меньше и не превышает 4–5%.

Остановимся теперь на некоторых характерных особенностях в зависимости относительного распределения теплового потока c_q и давления p_w° вдоль поверхности от определяющих параметров задачи. Анализ проведенных расчетов показывает, что как c_q , так и p_w° слабо зависят от числа Рейнольдса. Этот вывод хорошо иллюстрирует фиг. 5, на которой изображены зависимости c_q от угловой координаты ξ^2 при $\alpha=\beta=45^\circ$ для $\xi^1=0,1; 0,3$ (линии 1, 2), $\theta_w=0,1$, $Re=5 \cdot 10^4$ (линии ϵ), $\theta_w=0,25$, $Re=100$ (линии a), $\theta_w=0,25$, $Re=5 \cdot 10^5$ (линии b). Видно, что, хотя число Рейнольдса изменяется более чем на три порядка, распределения относительного теплового потока c_q меняются незначительно и близки, как показывают сравнения с результатами работы [10], к соответствующим относительным распределениям c_q , вычисленным при обтекании данного тела в рамках модели пространственного ламинарного пограничного слоя. Необходимо также отметить, что наряду с консервативностью c_q по числу Рейнольдса относительный тепловой поток достаточно слабо зависит и от температуры поверхности (для $\theta_w=\text{const} < 0,25$), что хорошо согласуется с выводами [10, 11] для закономерностей теплообмена в пограничном слое.

Тепловой поток к непроницаемой поверхности трехмерного тела, обтекаемого при больших сверхзвуковых скоростях потоком совершенного газа в широком диапазоне чисел Рейнольдса. При исследовании обтекания тел в рамках модели тонкого вязкого ударного слоя и параболизированных уравнений Навье — Стокса было показано, что тепловой поток к поверхности в окрестности критической точки двойной кривизны q_1 , отнесенный к своему значению для осесимметричного тела q_0 , очень слабо зависит от числа Рейнольдса и практически совпадает с соответствующим отношением, вычисленным в рамках модели пограничного слоя [12, 13]. Из результатов расчетов работы [14] следует, что для пограничного слоя это отношение для охлажденной поверхности зависит лишь от одного геометрического параметра $k=R_1/R_2$ ($R_1 < R_2$ — радиусы главных кривизн тела в критической точке) и с хорошей точностью может быть определено по следующей формуле:

$$q^* = q_1/q_0 = \sqrt{0,5(1+k)} \quad (3.4)$$

Расчеты, выполненные в настоящей работе, также показали, что величина $q^\circ = q_0(Re, \theta_w)/q_0(\infty, \theta_w)$, где $q_0(\infty, \theta_w)$ — тепловой поток к критической точке сферы, вычисленный на основе решения уравнений пограничного слоя, зависит в основном от числа Рейнольдса и с точностью 2–3% аппроксимируется формулой

$$q^\circ = 1 + 0,16 \exp [-(y-1,75)^2] - 0,523 \exp (-1,5y^2) \quad (3.5)$$

$$y = \lg Re \geq 0,5$$

Таким образом, исходя из отмеченной выше слабой зависимости относительного теплового потока c_q от числа Рейнольдса и температуры стенки, а также с учетом формул (3.4)–(3.5) и результатов [11] можно предложить следующую формулу для определения теплового потока к непроницаемой поверхности затупленного тела при пространственном его обтекании сверхзвуковым потоком вязкого совершенного газа в широком диапазоне чисел Рейнольдса:

$$q = q_0 q^* c_q^\circ, \quad q_0 = q^* q^\circ \quad (3.6)$$

Здесь q_0 — тепловой поток в критическую точку сферы радиуса R_1 , q° находится по формуле (3.5), а q^* — тепловой поток в осесимметричном пограничном слое в критическую точку сферы — определяется, например, по формуле Фэя и Ридделла [15]

$$q^* = 0,76 \sigma^{-0,6} \left(\frac{\mu_w \rho_w}{\mu_e \rho_e} \right)^{0,1} (h_e - h_w) \left(\mu_e \rho_e \frac{\partial u_e}{\partial x} \right)^{1/2} \quad (3.7)$$

Для режима обтекания при больших сверхзвуковых скоростях величины на внешней границе пограничного слоя можно вычислить, используя асимптотический подход Хейза — Буземана [16]. В результате чего (3.7) несколько упрощается

$$q^* = 0,76 \frac{\rho_\infty V_\infty^3}{2\sqrt{Re}} \sigma^{-0,6} \theta_w^{0,1(\omega-1)} (1-\theta_w) \sqrt[4]{\frac{2^{3-2\omega}}{3\varepsilon}} \quad (3.8)$$

Величина c_q° в (3.6) представляет собой относительное распределение теплового потока вдоль поверхности тела в пограничном слое и определяется по формуле (2.6) работы [11], а величина q^* находится по формуле (3.4) настоящей работы. Как показывают сравнения расчетов, проведенных с использованием (3.6), с численным решением исходной системы уравнений, предложенная формула определяет тепловой поток с точностью порядка 10% и может быть использована в практике инженерных расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гершбейн Э. А., Юницкий С. А. Исследование гиперзвукового пространственного вязкого ударного слоя в окрестности критической точки при наличии вдува или отсоса // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 5. С. 817–828.
2. Марков А. А. Исследование стационарного течения вязкого газа в тонком трехмерном ударном слое // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 5. С. 115–126.
3. Eaton R. R., Koestner P. C. Viscous shock layer flow in the windward plane of cones at angle of attack // AIAA Paper. 1973. № 134.
4. Гершбейн Э. А., Юницкий С. А. К теории пространственного гиперзвукового вязкого ударного слоя в окрестности плоскости симметрии // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 5. С. 768–775.
5. Гершбейн Э. А., Щелин В. С., Юницкий С. А. Численные и приближенные аналитические решения уравнений гиперзвукового пространственного вязкого ударного слоя при умеренно малых числах Рейнольдса // Гиперзвуковые пространственные течения при наличии физико-химических превращений. М.: Изд-во МГУ, 1981. С. 72–92.
6. Гершбейн Э. А., Крупа В. Г., Щелин В. С. К исследованию пространственного гиперзвукового вязкого ударного слоя на затупленных телах, обтекаемых под углами атаки и скольжения // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 1. С. 110–118.
7. Гершбейн Э. А. Асимптотическое исследование задачи пространственного гиперзвукового обтекания вязким газом затупленных тел с проницаемой поверхностью // Гиперзвуковые пространственные течения при наличии физико-химических превращений. М.: Изд-во МГУ. 1981. С. 29–51.
8. Петухов И. В. Численный расчет двумерных течений в пограничном слое // Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. М.: Наука, 1964. С. 304–324.
9. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 592 с.
10. Бородин А. И., Пейгин С. В. Пространственный пограничный слой на затупленных телах с проницаемой поверхностью, обтекаемых под углами атаки и скольжения // Теплофизика высоких температур. 1987. Т. 25. № 3. С. 509–516.
11. Брыкина И. Г., Гершбейн Э. А., Пейгин С. В. Исследование пространственного пограничного слоя на затупленных телах с проницаемой поверхностью // Изв. АН СССР. МЖГ. 1982. № 3. С. 49–58.
12. Пейгин С. В., Русаков В. В. Численное исследование гиперзвукового течения разреженного газа в окрестности критической точки двоякой кривизны при наличии вдува в рамках уравнений Навье – Стокса // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1985. Т. 16. № 2. С. 118–133.
13. Гершбейн Э. А., Щелин В. С., Юницкий С. А. Исследование пространственного обтекания тел с каталитической поверхностью при их движении по траектории входа в атмосферу Земли // Космич. исслед. 1985. Т. 23. № 3. С. 416–425.
14. Брыкина И. Г., Гершбейн Э. А., Пейгин С. В. Ламинарный пространственный пограничный слой на проницаемой поверхности в окрестности плоскости симметрии // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 5. С. 37–40.
15. Фэй, Ридделл. Теоретический анализ теплообмена в передней критической точке, омываемой диссоциированным воздухом // Газодинамика и теплообмен при наличии химических реакций. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. С. 190–224.
16. Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф. Теория гиперзвуковых течений. Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 607 с.

Томск

Поступила в редакцию
22.II.1988