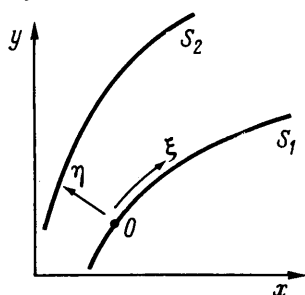


УДК 533.6.011

КВАЗИОДНОМЕРНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧАХ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

МЕНЬШОВ И. С.

Исследования многомерных задач газовой динамики встречаются на своем пути большие трудности. Аналитические методы в них практически неприменимы, и наиболее эффективным и, вероятно, единственным на сегодняшний день подходом является использование численных методов. Однако если решение газодинамической задачи связано с большой серией расчетов, как это имеет место, например, при изучении функциональной зависимости решения от каких-то конкретных параметров или решении задач по выбору оптимальных в некотором смысле параметров течения, то эффективность численных методов резко снижается. Здесь могут оказаться полезными грубые (приближенные) модели течения, которые были бы гораздо проще в математическом смысле исходных моделей и учитывали бы при этом основные физические законы процесса.



Фиг. 1

Плодотворным для построения таких моделей является гидравлический (для двумерных задач — квазиодномерный) подход, который основывается на осреднении исходных неравномерных потоков по какому-нибудь направлению или сечению [1]. При этом за счет огрубления модели удается снизить размерность задачи. Данная работа посвящена развитию этого подхода на нестационарные двумерные газодинамические процессы; рассматриваются некоторые задачи (течение около конуса, затупленного тела, струйные течения) в рамках полученной квазиодномерной модели, проводится сравнение результатов с решениями соответствующих двумерных задач.

1. Рассмотрим двумерное неустановившееся течение идеального нетеплопроводящего газа в области, ограниченной двумя поверхностями: S_1 и S_2 (фиг. 1). Уравнения движения газа в декартовой системе координат (x, y) , где y — радиальная координата в случае осевой симметрии, имеют вид

$$(\rho Q \Phi)_t + (\rho Q u F)_x + (\rho Q v F)_y = B_1 \quad (1.1)$$

$$\Phi^T = [1, u, v, E], \quad F^T = [1, u, v, H],$$

$$B_1^T = [0, -(Qp)_x, -Qp_y, 0]$$

$$E = e + 0,5(u^2 + v^2); \quad H = E + \frac{p}{\rho}; \quad Q = y^*$$

Здесь $v=0,1$ для плоского и осесимметричного случая соответственно, (u, v) — декартовы компоненты вектора скорости, остальные обозначения общепринятые.

Пусть нормальные уравнения поверхностей S_1 и S_2 представляются в виде

$$S_i: x = X_i(\xi, t); \quad y = Y_i(\xi, t); \quad i=1, 2$$

Введем криволинейную систему координат (ξ, η) , связанную для определенности с S_1

$$x = X_1 - \eta(Y_1)_\xi; \quad y = Y_1 + \eta(X_1)_\xi \quad (1.2)$$

Предполагается, что якобиан преобразования (2) $J=1+\eta R$, где R — кривизна поверхности S_1 , отличен от нуля во всей рассматриваемой области.

В системе координат (ξ, η) уравнения (1) примут вид

$$(JQ\rho\Phi)_i + (\rho QuF)_\xi + (JQ\rho vF)_\eta = B_2 - Q\Phi J_i, \quad (1.3)$$

$$B_2 = [0; -\rho QuvR - Qp_\xi; \rho Qu^2R - QJp_\eta; 0]^T$$

а (u, v) обозначают компоненты вектора скорости в координатах (ξ, η) .

Пусть $\eta_2 = \eta_2(\xi, t)$ задает уравнение поверхности S_2 . Интегрируя уравнения (3) по η от 0 до η_2 , можно получить следующую систему интегро-дифференциальных уравнений:

$$\left(\int_0^{\eta_2} JQ\rho\Phi d\eta \right)_i + \left(\int_0^{\eta_2} Q\rho uF d\eta \right)_\xi = \int_0^{\eta_2} (B_2 - Q\Phi J_i) d\eta +$$

$$+ \rho_2 Q_2 J_2 \left[\Phi_2(\eta_2)_i + \frac{u_2 F_2}{J_2} (\eta_2)_\xi - v_2 F_2 \right] + J_1 Q_1 \rho_1 v_1 F_1 \quad (1.4)$$

$$f_2 = \lim_{\eta \rightarrow \eta_2 - 0} f(t, \xi, \eta); \quad f_1 = \lim_{\eta \rightarrow +0} f(t, \xi, \eta)$$

Будем считать, что S_1 и S_2 являются физическими границами: это либо поверхности разрыва газодинамических параметров, либо твердые стенки. Для определенности положим, что S_1 — твердая стенка. Тогда, очевидно, что $v_1 = 0$, а параметры с индексом 2 удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\rho_2 \left[(\eta_2)_i + \frac{u_2}{J_2} (\eta_2)_\xi - v_2 \right] = \rho_0 \left[(\eta_2)_i + \frac{u_0}{J_2} (\eta_2)_\xi - v_0 \right] = j_0 \quad (1.5)$$

$$j_0 (v_2 - v_0) = p_2 - p_0; \quad j_0 (u_2 - u_0) = -\frac{1}{J_2} (\eta_2)_\xi (p_2 - p_0)$$

$$j_0 E_2 - p_2 \left[-\frac{u_2}{J_2} (\eta_2)_\xi + v_2 \right] = j_0 E_0 - p_0 \left[-\frac{u_0}{J_2} (\eta_2)_\xi + v_0 \right]$$

$$f_0 = \lim_{\eta \rightarrow \eta_2 + 0} f(t, \xi, \eta)$$

где f_0 — параметры вне рассматриваемой области, которые предполагаются известными. Используя (5), преобразуем систему (4) к виду

$$\left(\int_0^{\eta_2} QJ\rho\Phi d\eta \right)_i + \left(\int_0^{\eta_2} Q\rho uF d\eta \right)_\xi = J_2 Q_2 j_0 F_0 + B_3 \quad (1.6)$$

$$B_3 = \left[0; Q_2 p_0 (\eta_2)_\xi + \int_0^{\eta_2} p Q_\xi d\eta - \left(\int_0^{\eta_2} Q p d\eta \right)_\xi - \int_0^{\eta_2} \rho Q u v R d\eta, \right.$$

$$\left. \int_0^{\eta_2} \rho Q u^2 R d\eta + p_1 Q_1 J_1 - p_0 Q_2 J_2 + \int_0^{\eta_2} p (QJ)_\eta d\eta; -J_2 Q_2 p_0 (\eta_2)_i \right]^T$$

На основе этой системы уравнений, которая является точным следствием исходной системы (1.1), построим упрощенную квазиодномерную модель двумерного течения. Для этого воспользуемся методом канонических потоков [1], основная идея которого применительно к рассматриваемому случаю состоит в следующем. В каждом сечении $\xi = \text{const}$ истинный неравномерный поток заменяется некоторым каноническим потоком, который в общем случае может быть также неравномерным, характеризующимся наименьшим числом параметров, причем так, чтобы удовлетворялись урав-

нения (6), отражающие основные свойства истинного потока. Этот подход успешно применялся для построения моделей МГД [2], стратифицированных и многофазных течений [3].

Возьмем в качестве канонического потока однородный поток идеального газа с параметрами $\rho = \rho(t, \xi)$, $u = u(t, \xi)$ и т. д. Подставляя эти параметры в систему уравнений (6), получим

$$(\omega \rho \Phi)_t + (\rho u S F)_\xi = J_2 Q_2 j_0 F_0 + B \quad (1.7)$$

$$B = [0; -\rho u v S R - S p_\xi + (p_0 - p) Q_2 (\eta_2)_\xi; \\ \rho u^2 S R + J_2 Q_2 (p - p_0) + J_1 Q_1 (p_1 - p); -J_2 Q_2 p_0 (\eta_2)_t]^T$$

$$\omega = \int_0^{\eta_2} J Q d\eta; \quad S = \int_0^{\eta_2} Q d\eta$$

а для параметров канонического потока оставлены прежние обозначения.

Система уравнений (1.7) является незамкнутой относительно четырех газодинамических величин и формы поверхности S_2 , задаваемой функцией η_2 . Чтобы замкнуть эту систему, воспользуемся уравнением притока тепла для канонического потока

$$(\omega p e)_t + (\rho u S e)_\xi + p \rho \left[\omega \left(\frac{1}{\rho} \right)_t + S u \left(\frac{1}{\rho} \right)_\xi \right] = J_2 Q_2 j_0 e_0 + B_e \quad (1.8)$$

Второе слагаемое в правой части, B_e , характеризует источник внутренней энергии за счет работы сил давления в результате взаимодействия внешнего потока с каноническим. Из сравнения (1.5) и (1.7) следует, что выражения для источников членов в уравнениях канонического потока в точности совпадают с соответствующими членами в соотношениях на поверхности разрыва. Поэтому естественно положить, что источник внутренней энергии канонического потока при взаимодействии с внешним потоком аналогичен соответствующему члену в соотношениях на поверхности разрыва

$$B_e = J_2 Q_2 \frac{p + p_0}{2} \left(\frac{j_0}{\rho_0} - \frac{j_0}{\rho} \right)$$

Принимая эту гипотезу, из (1.7) и (1.8) нетрудно получить недостающее уравнение для η_2

$$J_2 Q_2 (p - p_0) \left[(\eta_2)_t + \frac{u}{J_2} (\eta_2)_\xi - v \right] - J_1 Q_1 v (p_1 - p) + \\ + J_2 Q_2 j_0 \left[\frac{1}{2} (u - u_0)^2 + \frac{1}{2} (v - v_0)^2 + \frac{p_0 - p}{2} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_0} \right) \right] = 0 \quad (1.9)$$

Отметим, что как частный случай из этих уравнений получается квазиодномерная модель течения в каналах. Для этого надо положить $j_0 = 0$; $p = p_0$. При этом уравнение (1.9) превращается в равенство $p = p_1$, а система (1.7) переходит в известную систему уравнений каналового приближения.

Если поверхность S_2 является контактной границей с заданным на ней внешним давлением p_0 , то $j_0 = 0$, а (1.9) принимает простой вид

$$J_2 Q_2 \left[(\eta_2)_t + \frac{u}{J_2} (\eta_2)_\xi - v \right] (p - p_0) = J_1 Q_1 v (p_1 - p) \quad (1.10)$$

Рассмотренная модель является неполной, так как не определены давление p_1 и термодинамика канонического потока. Что касается последнего, то естественно положить, что термодинамика канонического потока описывается теми же соотношениями, что в исходных уравнениях, а p_1 опреде-

$$p = \frac{1}{S} \int_0^{\eta_2} Q p' d\eta$$

где p' — некоторое распределение давления, аппроксимирующее исходное. В простейшем случае можно взять $p' = \text{const} = p_1 = p$.

Если взять в качестве p' линейную функцию с условием $p'(\eta_2) = p_2$, $p'(0) = p_1$, то p_1 определяется из соотношения

$$p = p_1 + \frac{1}{6} \left(2 + \frac{Q_2 \eta_2}{S} \right) (p_2 - p_1) \quad (1.11)$$

Если аппроксимировать распределение давления в сечении $\xi = \text{const}$ квадратичной функцией p' с условием $p'(\eta_2) = p_2$, $p'(0) = p_1$, $p'_\eta(0) = R \rho u^2$, то связь канонического давления p с p_1 будет иметь вид

$$p = p_1 + \frac{1}{6} \left(1 + \frac{Q_2 \eta_2}{S} \right) (p_2 - p_1) + \frac{1}{6} R \rho u^2 \eta_2 \quad (1.12)$$

2. Рассмотрим простейшее решение уравнений (1.7), (1.9) ($p = p_1$). Будем искать решение вида $u, v, \rho, p = \text{const}$. Тогда $\eta_2 = D\xi$. Это решение соответствует течению около острого конуса или клина. Из (1.7), (1.9) следует, что константы u, v, ρ, p, D удовлетворяют следующей системе алгебраических соотношений:

$$\begin{aligned} \rho(uD - v) &= j_0; \quad j_0 = (u_0 D - v_0) \rho_0 \\ j_0(u - u_0) &= -D(p - p_0); \quad j_0(v - v_0) = p - p_0 \\ 0.5(u^2 + v^2) + e + \frac{p}{\rho} &= 0.5(u_0^2 + v_0^2) + e_0 + \frac{p_0}{\rho_0} \\ v + u\chi &= 0; \quad \chi = \frac{1}{Q_2} \int_0^{\eta_2} Q_2 d\eta = v \frac{D \sin \alpha}{\sin \alpha + D \cos \alpha} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь α — половина угла раствора конуса или клина.

Первые пять соотношений в (2.1) совпадают с соотношениями на поверхности кривой ударной волны. Поэтому в случае $v=0$ (2.1) дают тривиальный результат — постоянное течение около клина, а при $v=1$ решение определяется пересечением ударной поляры в плоскости (u, v) и кривой второго порядка, уравнение которой имеет вид

$$\frac{u}{v} = \frac{v - v_0}{u - u_0} - \text{ctg } \alpha \quad (2.2)$$

Таким образом, картина течения около конуса с углом 2α в рассматриваемой модели совпадает с аналогичной картиной около некоторого фиктивного клина с углом 2β ($\beta < \alpha$).

Из соотношения (2.1) нетрудно получить зависимость между углами α, β и углом φ между осью x и поверхностью ударной волны. Эта зависимость в случае совершенного газа с показателем адиабаты γ определяется формулами

$$\text{ctg}(\alpha - \beta) = \text{ctg } \alpha + \text{ctg}(\varphi - \alpha) \quad (2.3)$$

$$\text{ctg } \beta = \text{tg } \varphi \left[\frac{(\gamma + 1) M_0^2}{2(M_0^2 \sin^2 \varphi - 1)} - 1 \right]$$

где M_0 — число Маха набегающего потока. В таблице приведены значения $\text{tg } \varphi$, отвечающие слабому семейству решений, в зависимости от α и M_0 , определяемые формулами (2.3) квазиодномерного приближения

α°	$M_0=2$		3		4		5	
10	0,6077	0,6346	0,3983	0,4040	0,3194	0,3307	0,2794	0,2867
15	0,6724	0,7133	0,4719	0,4877	0,3998	0,4060	0,3645	0,3699
20	0,7756	0,8098	0,5684	0,5773	0,4983	0,5007	0,4651	0,4705
25	0,9174	0,9657	0,6870	0,6971	0,6143	0,6248	0,6810	0,5937
30	1,1137	1,1917	0,8327	0,8441	0,7518	0,7372	0,7160	0,7265
35	1,4149	1,4725	1,0177	1,0212	0,9196	0,9163	0,8778	0,8847

(правая колонка). Левая колонка — соответствующие значения, взятые из таблиц [4].

Сравнение этих результатов показывает, что отличие решения в квазиодномерной модели от точного решения составляет не более 5—7%.

Угол полураствора конуса α не может превышать некоторого предельного значения $\alpha_{\max}$. При значениях α , больших $\alpha_{\max}$, решение системы (14) не существует. В этом случае реализуется течение с отошедшей волной. Угол $\alpha_{\max}$ является функцией числа Маха M_0 . Используя (16), найдем вид этой функции.

В предельном случае $M_0 \rightarrow 1$ из (2.3) можно получить асимптотику функции $\alpha_{\max}(M_0)$

$$\alpha_{\max} = \sqrt{\frac{2 \sqrt[3]{4a_*}}{3 + \sqrt[3]{4a_*}}} \sqrt{\frac{M_0 - 1}{a_*}} + O(M_0 - 1), \quad a_* = \frac{\gamma + 1}{2} \quad (2.4)$$

На основании общего околосвукового закона подобия можно вывести аналогичную асимптотику для точного решения

$$\alpha_{\max} = \text{const} \sqrt{\frac{M_0 - 1}{a_*}} + O(M_0 - 1)$$

где const есть некоторое число, не зависящее ни от M_0 , ни от свойств газа. Соответствующая константа в (2.4) зависит от γ , причем область ее изменения при $1 < \gamma < +\infty$ составляет отрезок (0,832, 1,42).

3. Применим систему уравнений (1.7), (1.9) для описания сверхзвукового обтекания затупленного тела ($p=p_1$). Поместим начало декартовой системы координат (x, y) в носовую точку тела (т. O), направив ось x вдоль оси симметрии. Обозначая через ξ длину дуги вдоль поверхности тела, отсчитываемую от т. O , систему уравнений канонического потока можно записать так

$$(\rho u S)' = J_2 Q_2 j_0 \quad (3.1)$$

$$\rho u S u' = J_2 Q_2 \left[j_0 (u_0 - u) - \frac{p - p_0}{J_2} \eta_2' \right] - S p' - \rho u v R S$$

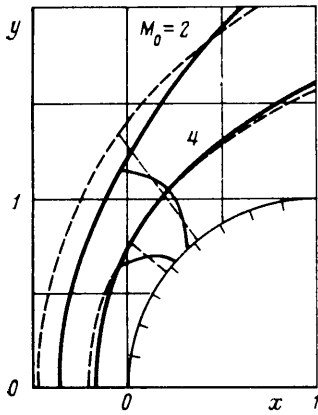
$$\rho u S v' = J_2 Q_2 [j_0 (v_0 - v) + (p - p_0)] + \rho u^2 R S$$

$$0,5(u^2 + v^2) + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} = 0,5 U_0^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_0}{\rho_0}$$

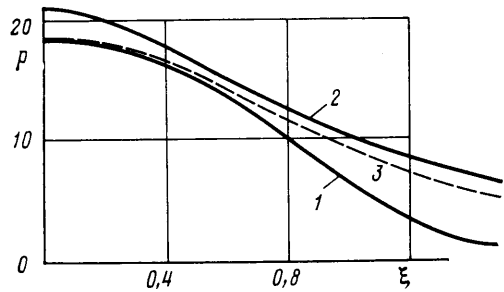
$$(p - p_0) \left[\frac{u}{J_2} \eta_2' - v \right] = \frac{1}{2} j_0 \left[(p - p_0) \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_0} \right) - (u - u_0)^2 - (v - v_0)^2 \right]$$

Индекс ноль обозначает параметры набегающего потока, штрих — производную по ξ . Если $X = X(\xi)$, $Y = Y(\xi)$ — нормальное уравнение поверхности тела, то

$$\begin{aligned} u_0 &= U_0 X'; & v_0 &= -U_0 Y'; & Q_2 &= [Y + \eta_2 X']^\gamma \\ J_2 &= 1 + R \eta_2; & S &= \eta_2 [Y + 0,5 \eta_2 X']^\gamma \end{aligned} \quad (3.2)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

$$j_0 = \rho_0 \left(\frac{u_0}{J_2} \eta_2' - v_0 \right); \quad R = (Y'X'' - X'Y'')$$

Начальными условиями при $\xi=0$ для системы (3.1), (3.2) будут

$$u = \eta_2' = v' = p' = \rho' = 0 \quad (3.3)$$

Анализ системы (3.1) показывает, что при $\xi=0$ она имеет особую точку регулярного типа, причем асимптотика решения вблизи $\xi=0$

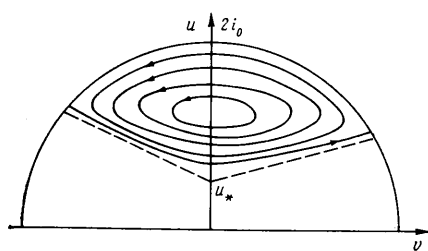
$$\begin{aligned} \eta_2 &= \eta_{20} + \eta_{21}\xi^2 + o(\xi^4); & u &= U_0\xi + o(\xi^3) \\ v &= v_s + v_1\xi^2 + o(\xi^4); & p &= p_s + p_1\xi^2 + o(\xi^4); & \rho &= \rho_s + \rho_1\xi^2 + o(\xi^4) \end{aligned}$$

где v_s , p_s , ρ_s — значения соответствующих параметров за прямым скачком, определяется с точностью до значения константы η_{20} . Кроме того, имеется другая особая точка типа «седла», характеризующаяся условием $u^2 = \gamma p / \rho$. Ситуация здесь аналогична той, которая возникает при интегрировании системы дифференциальных уравнений в методе интегральных соотношений [5, 6]. Искомое решение определяется таким значением η_{20} , при котором соответствующая интегральная кривая проходит через седловую особую точку.

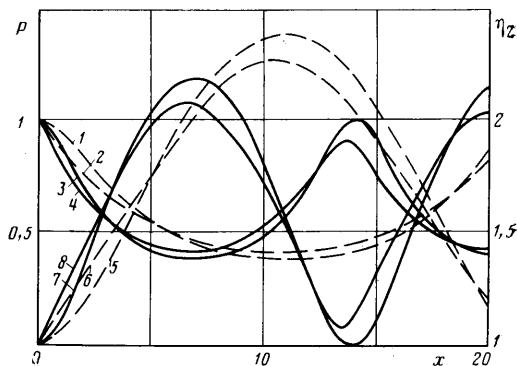
Система уравнений (3.1) интегрировалась численно. Значение η_{20} подбиралось из условия «склейки» решения (3.1) с асимптотикой в окрестности седловой особой точки. На фиг. 2 показаны положения фронта ударной волны и звуковой линии при сверхзвуковом обтекании сферы ($M_0=2,4$). Сплошные линии здесь и ниже отвечают двумерному расчету [7], штриховые — решению (3.1)–(3.3). При числах M_0 порядка 4 и более различие в положении ударной волны составляет несколько процентов. С уменьшением M_0 это различие увеличивается. На фиг. 3 приведены распределение средних значений давления по поверхности сферы (кривая 3), а также минимальные и максимальные значения этих параметров (кривые 1 и 2).

Анализ и сравнение результатов показывают, что квазиодномерная модель течения с отошедшей ударной волной качественно правильно отражает основные характеристики потока: форму ударной волны, положение звуковой линии, распределения средних параметров.

4. Рассмотрим задачу об осесимметричном (или плоском) истечении газовой струи в затопленное пространство, которое характеризуется некоторым заданным давлением p_e . Область движущегося газа ограничена контактной границей — границей струи, на которой выполняются соотношения $p_2 = p_0 = p_e$, $j_0 = 0$. Для определенности будем считать, что газ является совершенным с показателем адиабаты γ . Тогда в стационарном случае систему квазиодномерных уравнений (1.7), (1.10), (1.13) можно упростить и свести к четырем алгебраическим и одному дифференциаль-



Фиг. 4



Фиг. 5

ному уравнениям

$$\rho u S = q_0; \quad 0,5(u^2 + v^2) + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} = i_0 \quad (4.1)$$

$$\rho u^2 S + (p - p_e) S = j_0; \quad p = C \rho^\gamma, \quad u \frac{dS}{dx} = v Q_2 + \frac{1}{2} v Q_1$$

Ось $x = \xi$ направлена вдоль оси симметрии струи, начало координат помещено на срезе выпускного сопла, $\eta_2 = \eta_2(x)$ — координата свободной поверхности струи.

Параметры q_0 , i_0 , j_0 в (4.1) — константы вдоль всей струи, независимо от того, является ли течение в струе непрерывным или же имеются разрывы параметров. В последнем случае из системы (1.7), (1.9) нетрудно получить, что на разрыве функции η_2 , v — непрерывны, а u , p , ρ удовлетворяют известным соотношениям на прямой ударной волне. Параметр C — константа только в области непрерывного течения и изменяется при переходе через разрыв.

Физический смысл параметров q_0 , i_0 , j_0 очевиден: q_0 — расход струи, i_0 — полная энтальпия, j_0 — полный импульс вдоль струи.

Обозначим через z квадрат скорости звука: $z = \gamma p / \rho$. Тогда поле интегральных кривых в плоскости (z, u) при фиксированных значениях q_0 , i_0 , j_0 определяется соотношением

$$u^2 - \frac{j_0}{i_0} u + \frac{z}{\gamma} - \frac{p_e}{C_*} z^{-1/(\gamma-1)} = 0, \quad C_* = (\gamma C)^{\gamma-1}$$

Качественная картина линий уровня решений системы (4.1) в плоскости (u, v) , определяемая вторым уравнением в (4.1), для случая сверхзвуковой струи приведена на фиг. 4. Стрелками обозначено направление движения при увеличении x . Предельная парабола

$$v^2 - \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left[u - \frac{j_0}{(\gamma+1)q_0} \right]^2 = 2i_0 - \frac{\gamma^2}{\gamma^2-1} \frac{j_0^2}{q_0^2}$$

отвечает истечению в вакуум ($p_e = 0$).

Таким образом, решения системы (4.1) для сверхзвуковых струй представляются периодическими функциями («многоблочные» струи). При $p_e \rightarrow 0$ амплитуда и период этих функций неограниченно возрастают.

В критических сечениях, где $v = 0$, канонические параметры, за исключением v и η_2 , достигают экстремальных значений. Используя (4.1), можно получить эти значения. Обозначая их индексом «звездочка», для безразмерных переменных имеем

$$S_* = q_0 [\rho_* u_*]^{-1}, \quad u_* = \sqrt{2i_0 - \frac{2\gamma}{\gamma-1} \rho_*^{\gamma-1}}, \quad P_* = \rho_*^\gamma$$

$$2i_0 - \frac{2\gamma}{\gamma-1} \rho_*^{\gamma-1} + \frac{(\rho_*^\gamma - P_e)}{\rho_*} = \frac{j_0}{q_0} \sqrt{2i_0 - \frac{2\gamma}{\gamma-1} \rho_*^{\gamma-1}}$$

Очевидно, в случае $v(0)=0$ критические значения зависят от трех параметров: числа Маха на срезе сопла M_0 , $P_e = p_e/p(0)$ и γ . Константы q_0 , i_0 , j_0 выражаются через них так

$$q_0 = \sqrt{\gamma} M_0; \quad j_0 = \gamma M_0^2 + 1 - P_e; \quad i_0 = 1/2 \gamma M_0^2 + \gamma/(\gamma-1)$$

Полученные по квазиодномерной модели результаты сравнивались с решениями двумерной задачи. Для численного исследования параметров струи, вытекающей в затопленное пространство с постоянным давлением P_e , использовалась методика расчета пространственных сверхзвуковых течений в составных областях [8].

В методике применяется разностная схема 1-го порядка аппроксимации — стационарный аналог разностной схемы С. К. Годунова [9]. Расчеты проводились с $P_e=0,1$ и $0,5$ на равномерной сетке с числом точек между границей струи и осью симметрии $NT=45$.

На фиг. 5 для случая плоской симметрии и $P_e=0,5$ изображены положения границы струи и распределение среднего значения давления P вдоль струи, которое при расчете двумерной задачи определялось так

$$P = \frac{1}{S} \int_0^{\eta_2} pQ d\eta$$

Штриховые линии отвечают $M_0=3$, сплошные — $M_0=2$. Линии 1—4 соответствуют давлению, 5—8 — координате границы струи, с нечетными номерами — решениям квазиодномерной модели, с четными — двумерной задаче.

Положения «бочек» струи, даваемые приближенным и точным расчетами, хорошо согласуются в другом: квазиодномерная модель дает чуть большие период и амплитуду «бочки» по сравнению с решением двумерной задачи. Отличие по периоду составляет 3—5%, а по амплитуде — 10%. Различие в средних значениях давления (и других параметров) также составляет не более 10%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И., Черный Г. Г. Об осреднении неравномерных потоков газа в каналах // Теоретическая гидромеханика. М.: Оборонгиз, 1954. № 12. Вып. 4. С. 17—30.
2. Любимов Г. А. Об осреднении магнитогидродинамических потоков и применимости гидравлического приближения для расчета магнитогидродинамических течений в каналах // Изв. АН СССР. МЖГ. 1966. № 3. С. 3—11.
3. Stewart H. B., Wendroff B. Two-Phase Flow: Models and Methods // J. Comput. Phys. 1984. V. 56. № 3. Р. 363—409.
4. Бабенко К. И., Воскресенский Г. П., Любимов А. Н., Русанов В. В. Пространственное обтекание гладких тел идеальным газом. М.: Наука, 1964. 505 с.
5. Белоцерковский О. М. Обтекание симметричного профиля с отошедшей ударной волной // ПММ. 1958. Т. 22. № 2. С. 206—219.
6. Белоцерковский О. М. О расчете обтекания осесимметричных тел с отошедшей ударной волной на электронной счетной машине // ПММ. 1960. Т. 24. № 3. С. 511—517.
7. Любимов А. Н., Русанов В. В. Течение газа около тупых тел. Ч. II. Таблицы газодинамических функций. М.: Наука, 1970. 379 с.
8. Воскресенский Г. П., Луцкий А. Е., Орлова М. Г. Сверхзвуковое обтекание боковой части крыльев с клиновидным профилем при ударной волне, присоединенной к передней кромке: Препринт № 62. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР, 1985. 28 с.
9. Иванов М. Я., Крайко А. Н., Михайлов Н. В. Метод сквозного счета для двумерных и пространственных сверхзвуковых течений. 1 // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1972. Т. 12. № 2. С. 441—463.

Москва

Поступила в редакцию
3.XI.1987