

УДК 532.613.5:536.24

ТЕРМОКАПИЛЛЯРНАЯ КОНВЕКЦИЯ В ТОНКОМ СЛОЕ НЕРАВНОМЕРНО НАГРЕТОЙ ЖИДКОСТИ

САНОЧКИН Ю. В.

В связи с развитием современных технологий стали известны новые примеры образования тонких протяженных слоев жидкости с неизотермической свободной поверхностью. Например, при лазерном отжиге полупроводников [1] широко применяется режим, когда размер области проплава, равный по порядку величины диаметру луча, составляет более 100 мкм при толщине около 1 мкм. Аналогичная ситуация встречается при лазерной или лучковой обработке материалов с плавлением, которые применяются для легирования и аморфизации поверхностного слоя металлов [2]. Изучение конвективного перемешивания жидкой фазы в подобных условиях важно для понимания технологических процессов. В зависимости от условий выделение тепла может происходить как на поверхности, так и в объеме жидкости. При достаточно малой по абсолютной величине толщине горизонтального слоя жидкости главным движущим фактором может оказаться капиллярная сила.

Целью данной работы является рассмотрение установившегося плоского термокапиллярного движения в слое несжимаемой жидкости с распределенным нагревом, когда толщина слоя h значительно меньше характерного горизонтального размера области нагрева l .

Противоположный предельный случай $l < h$, соответствующий сосредоточенному нагреву, исследовался в [3, 4]. Плоскопараллельное термокапиллярное движение тонкого слоя жидкости в средней части плоской кюветы изучалось теоретически в [5, 6] и экспериментально в [7]. Нестационарной термокапиллярной конвекции в тонких слоях жидкости посвящены работы [8, 9].

1. Предположения и исходные уравнения. Задача решается при следующих упрощающих предположениях. В жидкости отсутствуют примеси других веществ и, следовательно, концентрационно-капиллярная конвекция. Плотность и другие характеристики жидкости, за исключением коэффициента поверхностного натяжения α , считаются не зависящими от температуры. Нагрев и, следовательно, термокапиллярное движение являются симметричными относительно некоторого поперечного сечения, которое принимается за плоскость $x=0$. Для описания замкнутых конвективных структур ввиду условия $h \ll l$ применяется приближение пограничного слоя. В соответствии с этим считается, что слой имеет неограниченную длину и нагрев достаточно быстро исчезает на бесконечности. Нижняя граница слоя $y=-h$ предполагается жесткой. Искривлением равновесной свободной поверхности жидкости $y=0$ при возникновении конвекции пренебрегается. Это оправданно при больших значениях термокапиллярного аналога числа Бонда $Bo = \rho g_0 h^2 / \alpha' \Delta T \gg 1$. Здесь ρ — плотность, $\alpha' = -d\alpha/dT$; g_0 — ускорение силы тяжести, ΔT — характерная величина возмущения температуры. Определение поля давлений в рамках указанного приближения малоинтересно. Поэтому градиент давления из уравнений исключается и одно из динамических условий на поверхности раздела, представляющее граничное значение давления, не используется.

Исходная система уравнений и граничных условий в случае нагрева свободной поверхности жидкости имеет вид

$$\begin{aligned} u_x + v_y &= 0, \quad uu_{xy} + vv_{yy} = \nu u_{yyy}, \quad uT_x + vT_y = \chi T_{yy} \\ \rho \nu u_y(x, 0) &= -\alpha' T_x(x, 0), \quad v(x, 0) = 0, \quad T_y(x, 0) = (q_0/\kappa) q(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(x, -h) &= v(x, -h) = 0, & T(x, -h) &= T_w \\ u(0, y) &= T_x(0, y) = v_x(0, y) = 0 \end{aligned}$$

Здесь u — горизонтальная, v — вертикальная компоненты скорости, ν — кинематическая вязкость, χ — коэффициент теплопроводности, q_0 — максимальное значение плотности потока тепла при $x=0$; κ — коэффициент теплопроводности. Условия тепловой задачи (1.1) соответствуют условиям технологических процессов [1, 2], если T_w равно температуре плавления.

В задаче (1.1) нет заданных внешними условиями масштабов скорости v_* и температуры ΔT . Они подлежат определению, и в разных условиях их значения могут быть различными. Поэтому при рассмотрении каждого конкретного случая удобно выбирать свои v_* и ΔT , безразмерная запись (1.1) при этом также оказывается различной. Опуская штрихи, будем сохранять в дальнейшем те же, что и в (1.1), обозначения для безразмерных переменных

$$x' = \frac{x}{l}, \quad y' = \frac{y}{h}, \quad u' = \frac{u}{v_*}, \quad v' = \frac{vl}{hv_*}, \quad T' = \frac{T - T_w}{\Delta T}.$$

Рассмотрим вначале некоторые предельные случаи задачи (1.1), допускающие простое исследование.

2. Режим слабой конвекции. Определим условия, при которых конвективным переносом тепла можно пренебречь и течение жидкости — ползущее. Решение (1.1) зависит от двух критериев подобия. Если выбрать в качестве масштабов $v_* = (\alpha' q_0 h^2 / \rho \nu \chi l)$, $\Delta T = q_0 h / \kappa$, то ими являются число Прандтля P и приведенное число Рейнольдса $R^* = (h^2 / l^2) R$, где $R = v_* l / \nu$. Конвективные члены в уравнениях движения и энергии оказываются умноженными на R^* и PR^* соответственно. Таким образом, режим слабой конвекции реализуется при выполнении условий $R^* \ll 1$, $P \ll 1$ и описывается в первом приближении решением задачи

$$\begin{aligned} T_{yy} &= 0, & u_{yyy} &= 0, & u_x + v_y &= 0 \\ u_y(x, 0) &= -T_x(x, 0), & T_y(x, 0) &= q(x) \end{aligned}$$

Здесь и далее выписываются только те граничные условия, в которых возможно появление безразмерных параметров. Указанное решение имеет простой вид

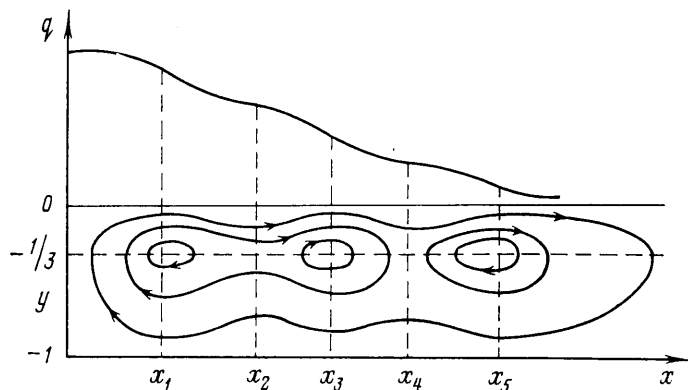
$$\begin{aligned} u &= -q'(x)g'(y), & v &= q''(x)g(y) \\ T &= (1+y)q(x), & g(y) &= \frac{1}{2}y(1+y)^2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Плотность потока тепла часто имеет вид, близкий к Гауссову распределению. В этом случае согласно (2.1) компоненты скорости при $x \rightarrow \infty$ также уменьшаются по экспоненциальному закону. Если в некотором сечении, где скорость конвекции мала, поставить вертикальную стенку, то она не будет оказывать заметного воздействия на поток. Решение (2.1), таким образом, приближенно описывает конвекцию в кювете ограниченной длины. Слабой термокапиллярной конвекции в полости квадратного сечения с теплоизолированными дном и свободной поверхностью посвящена работа [40]. Плоская задача о слабом режиме конвекции в мелком канале конечной длины при тех же тепловых условиях рассмотрена в рамках теории возмущений в [11].

Описываемая решением (2.1) картина конвекции оказывается весьма чувствительной к распределению температуры на поверхности. Движение жидкости имеет вид циркуляции вдоль замкнутых линий тока $|q'(x)g(y)| = C$. Пусть $q(x)$ — монотонно убывающая с ростом x положительная функция, имеющая при $x=x_1$ единственную точку перегиба. Тогда решение (2.1) описывает при $x > 0$ термокапиллярную ячейку с

центром вихря в точке $(x_1, -1/3)$. Вращение жидкости происходит по часовой стрелке. Течение в направлении действия поверхностной силы занимает $1/3$ толщины, возвратное течение — остальную часть слоя. Подобный профиль горизонтальной составляющей скорости потока $g'(y)$ встречается уже в [5]. Скорость на поверхности нарастает от нуля в плоскости симметрии до максимального значения $u_m \sim 1$ при $x=x_1$ (зона разгона) и падает затем до нуля с увеличением x (область замедления). Максимально достижимое значение скорости конвекции в ячейке есть u_m .

Пусть $q(x)$ — по-прежнему монотонно убывающая функция, но имеющая несколько точек перегиба $x_1, x_2, x_3, \dots$ (фиг. 1). В этом случае в точ-



Фиг. 1

ках области $(x_1, -1/3)$, $(x_2, -1/3)$, $\dots$ скорость исчезает. Некоторые из них (точки x_1, x_3, x_5 на фиг. 1) могут стать центрами внутренних замкнутых линий тока. Траектории, охватывающие несколько таких центров, имеют вид волнистых овалов. Направление циркуляции вдоль всех линий тока одинаковое. Точки перегиба x_2, x_4 на фиг. 1 не порождают вторичных внутренних вихрей, поскольку знаки u и v в окрестности соответствующих точек покоя оказываются несогласованными. Таким образом, модуляция температуры свободной границы может приводить к образованию «тонкой структуры» конвекции — появлению цуга субъчеек, пульсирующих траекторий и т. д. Представленная картина напоминает описанную в [12]. Возможно, она имеет отношение к мелкочаечистой структуре конвекции, наблюдаемой часто при лазерном отжиге полупроводников.

Если $q(x)$ будет немонотонной на некотором интервале значений x функцией, то происходит качественное изменение структуры термокапиллярной ячейки (фиг. 2). Она распадается на несколько смежных ячеек с центрами в точках $(x_1, -1/3)$, $(x_2, -1/3)$, $\dots$, где $x_1, x_2, \dots$ — координаты точек перегиба функции $q(x)$. Границы между ячейками совпадают с сечениями локальных экстремумов температуры поверхности. Циркуляция в соседних ячейках происходит в противоположных направлениях.

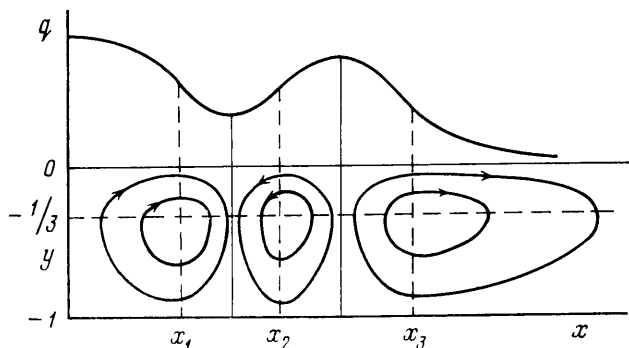
Рассмотрим задачу о режиме слабой конвекции при объемном выделении тепла. Если пренебречь неоднородностью нагрева по высоте, то в уравнение энергии (1.1) добавляется плотность источников $Q_0 q(x)$, где Q_0 — максимальное значение выделяющейся удельной мощности. В качестве граничного условия тепловой задачи на свободной поверхности естественно принять условие 3-го рода $T_y(x, 0) + m[T(x, 0) - T_\infty] = 0$, где T_∞ — температура окружающего газа, m — коэффициент межфазного теплообмена. Удобно выбрать в качестве единиц изменения температуры $\Delta T = Q_0 h^2 / \chi$ и скорости $v_* = (\alpha' Q_0 h^2 / \rho \nu \chi) (h/l)$. Условие малости конвективных членов выражается прежними неравенствами. Поле температур да-

ется выражением

$$T = \frac{1}{2} Q(x) (1-y^2) - \frac{\text{Bi}}{1+\text{Bi}} (1+y) \left[\frac{1}{2} Q(x) + \frac{\chi(T_w - T_\infty)}{Q_0 h^2} \right]$$

а решение для скорости конвекции описывается формулами (2.1), в которых следует положить $q = Q/2(1+\text{Bi})$. Здесь Bi — число Био.

Остановимся на правомочности использования уравнений пограничного слоя в рассматриваемой задаче. Условие $|v| \ll |u|$ нарушается в тех областях, где $u \rightarrow 0$. Оценим их размер. Пусть $q = \exp(-x^2)$. Согласно (2.1) $|v| \gg |u|$ в полосе около прямой $y = -1/3$ шириной $\Delta y \sim h/l$ и в областях $0 < x \leq h/l$, $x \geq l/2h$. Поскольку размер областей, где неприменимы уравнения пограничного слоя, порядка h/l от площади основного прямоугольни-



Фиг. 2

ка $x \leq 1$, можно ожидать, что вносимая от их использования погрешность также будет мала.

3. Конвекция жидкости с малым числом Прандтля. Для рассмотрения асимптотики решения (1.1) при $R \rightarrow 0$ удобно использовать в качестве характерных скорости и разности температур $(\nu l/h^2)$ и $(\rho \nu^2/\alpha' h)(l^2/h^2)$ соответственно. В этом случае число Прандтля остается множителем в левой части уравнения энергии, а приведенное число Рейнольдса, определяемое прежним выражением, переходит в граничное условие для температуры. В пределе малых R приходим к задаче

$$u_x + v_y = 0, \quad uu_{xy} + vv_{yy} = u_{yyy}, \quad T_{yy} = 0 \quad (3.1)$$

$$u_y(x, 0) = -T_x(x, 0), \quad T_y(x, 0) = R^* q(x)$$

Решение для температуры сохраняет прежний вид $T = (1+y)R^* q(x)$. Поскольку выбранные масштабы не зависят от x , предельный переход $R \rightarrow 0$ в (3.1) соответствует случаю $\kappa \rightarrow \infty$, $(q_0/\kappa) = O(1)$. Если мощность нагрева зафиксирована, то с ростом теплопроводности $R^* \rightarrow 0$ и, как и должно быть в идеальном проводнике тепла, $(T, u, v) \rightarrow 0$. Таким образом, при $R^* \ll 1$ решение (3.1) имеет вид $u = R^* u_1 + R^* u_2 + \dots$, $v = R^* v_1 + R^* v_2 + \dots$, где u_1, v_1 даются формулами (2.1). Определение асимптотики решения (3.1) в другом предельном случае $R^* \gg 1$ вряд ли целесообразно с физической точки зрения, поскольку с увеличением скорости необходимо принимать во внимание конвективный перенос тепла. Для решения (3.1) при $R^* \sim 1$ можно воспользоваться разложением функции тока в степенной ряд

$$\psi = x f_1(y) + x^3 f_3(y) + \dots + x^{2n+1} f_{2n+1}(y) + \dots \quad (3.2)$$

$$f_1^{IV} + f_1 f_1''' - f_1' f_1'' = 0$$

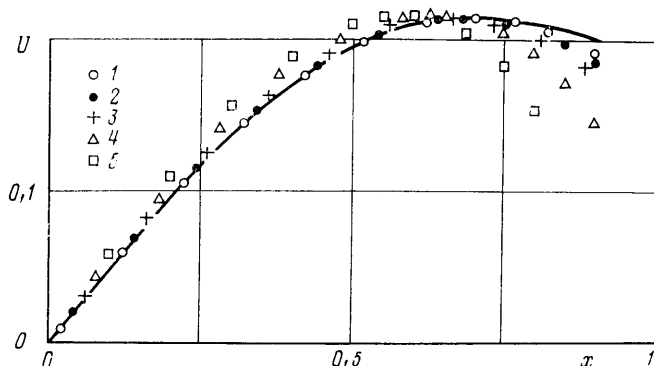
$$f_3^{IV} + f_1 f_3''' - 3 f_1' f_3'' - f_1'' f_3' + 3 f_1''' f_3 = 0, \dots \quad (3.3)$$

$$f_i(0) = f_i(-1) = f_i'(-1) = 0, \quad f_i''(0) = -R^* q_i, \quad i = 1, 3, \dots$$

Здесь $q_1, q_3, \dots$ — коэффициенты разложения $q'(x)$ в степенной ряд. Для аппроксимации профиля скорости в пограничном слое обычно ограничиваются полиномом 4–5 степени. В качестве примера приведем приближенное решение (3.3) при $R^*=1$, $q=\exp(-x^2)$ для нескольких первых функций

$$\begin{aligned} f_1 &= 0,5120y + y^2 + 0,4972y^3 + 0,0427y^4 + 0,0333y^5 \\ f_3 &= -0,5450y - y^2 - 0,4967y^3 - 0,1734y^4 - 0,1317y^5 \\ f_5 &= 0,3114y + 0,5y^2 + 0,2617y^3 + 0,2689y^4 + 0,1958y^5 \\ f_7 &= -0,1316y - 0,1667y^2 - 0,1130y^3 - 0,2521y^4 - 0,1743y^5 \end{aligned} \quad (3.4)$$

С помощью (3.2), (3.4) нетрудно проверить, что профиль скорости $u(x_0, y)$, скажем, в сечении $x_0=0,5$ практически совпадает с (2.1). На фиг. 3 точками показаны отнесенные к соответствующим значениям R^*



Фиг. 3

распределения скорости на свободной поверхности $U=u(x, 0)/R^*$ при $q=\exp(-x^2)$. Для каждого R^* определялись четыре функции $f_1, \dots, f_7$. Точки 1–5 вычислены для значений $R^*=0,2, 1, 2, 5, 10$ соответственно. Сплошная линия относится к случаю $R^*=0$ и отвечает формуле (2.1). Видно, что максимальная скорость конвекции достигается приблизительно в точке перегиба $q(x)$ и линейно увеличивается с ростом R^* . Решение (3.2), (3.3) описывает зону разгона. Это связано с областью сходимости (3.2). Используемые при построении f_i первые четыре члена разложения $q'(x)$ хорошо аппроксимируют нагрев только при $x \leq 0,8$. Определяемая ими функция имеет при больших x совсем другое асимптотическое поведение по сравнению с исходной, что объясняет поведение решений в области замедления.

Таким образом, описать всю ячейку при произвольном задании $q(x)$ с помощью небольшого числа первых членов ряда (3.2) не удастся. Поэтому рассмотрим задачу (3.1) с функцией нагрева

$$\begin{aligned} q &= 1 - kx^2, \quad (0 \leq x \leq a), \quad q = \frac{b}{b-a} \left(1 - \frac{x}{b}\right)^2 \\ &\quad (a < x \leq b), \quad q = 0 \quad (x > b) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Здесь k, a, b — положительные константы, связанные соотношением $kab=1$. Распределением (3.5), содержащим две произвольные постоянные, можно аппроксимировать лазерный нагрев в широком диапазоне условий. Применение (3.5) позволяет построить точное решение (3.1) во всех областях. Однако из-за наличия в точках a, b изломов функции $q'(x)$ при этом допускаются, как видно из (2.1), решения со скачком скорости и изломом линий тока в указанных сечениях. Непрерывное сращивание решений можно осуществить, очевидно, в малых переходных областях,

если ввести в них более гладкую функцию нагрева. Точке перегиба на профиле $q(x)$ при использовании (3.5) соответствует сечение $x=a$.

В области разгона ($x < a$) решение (3.1) имеет вид

$$u = 2kR^* x f'(y), \quad v = -2kR^* f(y), \quad 2kR^* (f' f'' - f f''') = f^{IV} \quad (3.6)$$

$$f(0) = f(-1) = f'(-1) = 0, \quad f''(0) = 1$$

В зоне замедления ($a < x \leq b$) вместо (3.6) получается следующее уравнение с теми же граничными условиями:

$$\frac{2R^*}{b(b-a)} (-f' f'' + f f''') = f^{IV} \quad (3.7)$$

$$u = \frac{2R^*}{b-a} \left(1 - \frac{x}{b}\right) f'(y), \quad v = \frac{2R^*}{b(b-a)} f(y)$$

Задачи (3.6), (3.7) могут быть решены методом Галеркина. Искомая функция аппроксимируется суммой полиномов $f = f_0 + c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots$, где f_0 удовлетворяет неоднородным граничным условиям (3.6), а $f_1, f_2, \dots$ — однородным. Полином наименьшей степени, удовлетворяющий (3.6), определяется однозначно $f_0 = g(y)$. В качестве последующих пробных функций можно выбрать $f_1 = y(1+y)^2(1-2y)$ и т. д. При $R^* \rightarrow 0$, очевидно, $c_i \rightarrow 0$. Если ограничиться двучленной аппроксимацией решения, то при изменении параметра $2kR^*$ в уравнении (3.6) от единицы до десяти норма второго слагаемого $\|c_1 f_1 / g\| = 12|c_1|$ изменяется в диапазоне 0,0137—0,1272. Близкие цифры получаются и в области замедления $0,0139 < 12c_1 < 0,1548$. Ввиду малости поправки функция g является в указанном диапазоне параметров достаточно хорошим приближением искомого решения. В области $x > b$ задача имеет тривиальное решение. Таким образом, решение задачи (3.1), (3.5) при любых значениях x может быть записано в форме (2.1) с функцией f из (3.6), (3.7) вместо g .

Как и в п. 2, все полученные результаты непосредственно переносятся на случай объемного нагрева жидкости.

4. Конвекция при больших числах Прандтля. Имеется предельный случай, противоположный рассмотренному в п. 3, когда течение носит ползующий характер, а конвективный перенос тепла играет тем не менее важную роль. Если при обезразмеривании (1.1) выбрать масштабы $v_* = \chi l / h^2$, $\Delta T = (\rho \nu \chi / \alpha' h) (l^2 / h^2)$, то в качестве критериев подобия выступают число Прандтля и приведенное число Марангони $M^* = (h^2 / l^2) M$, где $M = (\alpha' q_0 h^2 / \kappa \rho \nu \chi) = PR$. При этом P входит только множителем в вязком члене уравнения движения, а M^* — в граничном условии для температуры. При больших P приходим к задаче

$$u_x + v_y = 0, \quad u_{yyy} = 0, \quad u T_x + v T_y = T_{yy} \quad (4.1)$$

$$u_y(x, 0) = -T_x(x, 0), \quad T_y(x, 0) = M^* q(x)$$

Предельный переход $P \rightarrow \infty$ в (4.1) можно трактовать как $\nu \rightarrow \infty$, $(q_0 / \nu) = O(1)$, при этом $\Delta T \rightarrow \infty$, или в смысле $\chi, \kappa \rightarrow 0$, $(q_0 / \kappa \chi) = O(1)$, при этом v_* , $\Delta T \rightarrow 0$. Решение динамической задачи (4.1) имеет структуру, подобную (2.1)

$$u = -g'(y) T_x(x, 0), \quad v = g(y) T_{xx}(x, 0) - g'(y) T_x(x, 0) T_x + g(y) T_{xx}(x, 0) T_y = T_{yy} \quad (4.2)$$

Переход к режиму слабой конвекции происходит при $M^* \rightarrow 0$. Асимптотика решения (4.1) имеет вид

$$T = M^* T_1 + M^{*2} T_2 + \dots, \quad u = M^* u_1 + M^{*2} u_2 + \dots, \quad v = M^* v_1 + M^{*2} v_2 + \dots$$

где T_1, u_1, v_1 даются формулами (2.1). Исследование асимптотики (4.1) при $M^* \gg 1$ малоинтересно, поскольку с ростом M^* увеличивается ско-

рость и необходимо переходить к рассмотрению полной системы уравнений (1.1). Ограничимся рассмотрением случая, когда нагрев описывается формулой (3.5). В области разгона решение (4.2) естественно искать в виде

$$\begin{aligned} T &= M^*(s(y) - kx^2 t_1(y)) \\ s'' + \lambda_1 g s' &= 0, \quad s'(0) = 1, \quad s(-1) = 0, \quad \lambda_1 = 2M^* k t_1(0) \\ t_1'' + \lambda_1 (g t_1' - 2g' t_1) &= 0, \quad t_1'(0) = 1, \quad t_1(-1) = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Для поставленных целей достаточно ограничиться параболической аппроксимацией профиля температуры поперек слоя. Воспользовавшись методом Галеркина, нетрудно получить решение краевых задач (4.3)

$$\begin{aligned} s &= (1+y) \left[1 - \frac{\lambda_1(1-y)}{80+0,714\lambda_1} \right], \quad t_1 = (1+y) \left[1 - \frac{\lambda_1(1-y)}{20+0,893\lambda_1} \right] \\ \lambda_1 &= -(11,20+0,12M^*k) + [(11,20+0,12M^*k)^2 + 44,80M^*k]^{1/2} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Зависимость решения (4.2) от продольной координаты в области замедления повторяет распределение (3.5)

$$\begin{aligned} T &= \frac{M^*b}{b-a} \left(1 - \frac{x}{b} \right)^2 t(y), \quad \lambda = \frac{2M^*}{b(b-a)} t(0) \\ t'' - \lambda g t' + 2\lambda g' t &= 0, \quad t'(0) = 1, \quad t(-1) = 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

В том же приближении для t и λ получаются выражения

$$\begin{aligned} t &= (1+y) \left[1 + \frac{\lambda(1-y)}{20-0,893\lambda} \right], \quad k_1 = \frac{M^*}{b(b-a)} \\ \lambda &= (11,20-0,12k_1) - [(11,20-0,12k_1)^2 - 44,8k_1]^{1/2} \end{aligned} \quad (4.6)$$

При $M^* \rightarrow 0$ величины λ , $\lambda_1 \rightarrow 0$ и профиль температуры (4.3), (4.5) становится, как в (2.1), линейным по y . Вне зоны нагрева ($x > b$) имеется тривиальное решение для T , u , v . Таким образом, во всей области решение задачи (4.1), (3.5) для поля скоростей имеет форму (2.4). Конвективный перенос тепла приводит к перераспределению плотности теплового потока q_w в стенку. С помощью (4.4), (4.6) нетрудно убедиться, что при малых x в зоне разгона q_w меньше, а в области замедления всюду — больше $q(x)$.

5. Интенсивная конвекция. Рассмотрим задачу (1.1) в полном виде, когда учитываются как конвективный перенос тепла, так и инерция жидкости. Ограничимся тем, что подберем такую функцию $q(x)$, которая имеет разумный физический вид и допускает явное решение (1.1). Такая функция дается формулой (3.5). Для упрощения записи будем считать, что на свободной границе задается значение температуры $T(x, 0) = T_w + \Delta T q(x)$. Удобно использовать в качестве характерной скорости величину $v_* = (\alpha' \Delta T / \rho v) (h/l)$. Числа Рейнольдса и Марангони определяются выражениями $R = (\alpha' \Delta T h / \rho v^2)$, $M = PR$. Если записать систему (1.1) в безразмерном виде, то конвективные члены в уравнениях движения и энергии оказываются умноженными на R^* и M^* соответственно. Решение задачи (1.1), (3.5) в области разгона имеет вид

$$\begin{aligned} u &= 2kx f'(y), \quad v = -2kf(y), \quad T = s(y) - kx^2 t_1(y) \\ s'' + 2M^* k f s' &= 0, \quad s(0) = 1, \quad s(-1) = 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$t_1'' + 2M^* k (f t_1' - 2f' t_1) = 0, \quad t_1(0) = 1, \quad t_1(-1) = 0 \quad (5.2)$$

Функция f в (5.1), (5.2) тождественно совпадает с решением задачи (3.6). В зоне замедления решение (1.1), (3.5) таково:

$$T = \frac{b}{b-a} \left(1 - \frac{x}{b}\right)^2 t_2(y) \quad (5.3)$$

$$u = \frac{2}{b-a} \left(1 - \frac{x}{b}\right) f'(y), \quad v = \frac{2}{b(b-a)} f(y)$$

$$t_2'' - \frac{2M^*}{b(b-a)} (ft_2' - 2f't_2) = 0, \quad t_2(-1) = 0, \quad t_2(0) = 1 \quad (5.4)$$

Здесь f — решение задачи (3.7). Уравнения (5.2) и (5.4) получаются из (4.3) и (4.5), если заменить g на f и учесть изменение граничного условия. Задачи (3.6), (5.2) и (3.7), (5.4) полностью определены и имеют однозначные решения. При $x > b$ краевые условия однородны и имеется тривиальное решение (1.1).

Таким образом, построено точное решение (5.1), (5.3) задачи (1.1), (3.5), описывающее конвекцию во всей области. Оно представляет собой как бы объединение решений (3.6), (3.7) для скорости и (4.3), (4.5) для температуры, полученных в разных предельных случаях, и их продолжение в область произвольных значений параметров подобия.

6. Обсуждение результатов. Рассмотренные в п.п. 2–4 случаи относятся к следующим областям значений параметров (R^* , $M^* \ll 1$), ($R^* \sim 1$, $M^* \ll 1$) и ($M^* \sim 1$, $R^* \ll 1$) соответственно. Во всех этих случаях в жидкости возникают перепады температуры порядка $q_0 h / \kappa$, как в отсутствие конвекции. Характерное значение скорости течения дается выражением $(\alpha' q_0 h / \rho \nu \kappa) (h/l)$. Обратим внимание на ее уменьшение с уменьшением h как при постоянной мощности нагрева, так и при фиксированной величине возмущения температуры. Скорость конвекции пропорциональна q_0 (или ΔT), в ее выражение не входит коэффициент температуропроводности. Отмеченные функциональные зависимости справедливы согласно п. 5 в более широкой области параметров $M^* \ll 1$, $R^* \ll 1$. При дальнейшем увеличении R^* или (и) M^* характеристики конвекции изменяются. В частности, линейная зависимость $v_* \sim \Delta T$ заменяется степенной с показателем, меньшим единицы. Исследование соответствующей асимптотики решений (5.1), (5.3) составит предмет отдельного рассмотрения.

Интересно сравнить случаи распределенного и сосредоточенного нагрева. Конвективный теплоперенос не влияет на возникающие при сосредоточенном нагреве перепады температуры, если $R \ll 10^2$ (слабый нагрев). В этом же диапазоне имеется пропорциональность скорости конвекции мощности нагрева [4]. Зависимость же скорости от h практически отсутствует при фиксированном перепаде температуры поперек слоя. Особенно велико различие, если сравнивать полученные результаты со случаем сильного сосредоточенного нагрева, когда скорость конвекции увеличивается с уменьшением h , если ΔT фиксировано [3]. Для указанного случая характерна также степенная зависимость скорости конвекции от q_0 (или ΔT), а также от ν и χ с показателем $1/2$ [3, 4].

Отметим различие в картине конвекции. При сильном локальном нагреве свободной границы тонкого слоя жидкости образуется термокапиллярная ячейка, длина которой значительно превышает размер области нагрева [3, 4]. В рассматриваемом случае движением охвачена часть слоя, расположенная непосредственно под местом нагрева. Хотя этот вывод базируется на использовании (3.5), он не зависит от выбора аппроксимации для $q(x)$. Это означает (поскольку используется приближение пограничного слоя), что вне области нагрева возмущается слой жидкости длиной $\sim h$. Длина ячейки при $h \rightarrow 0$ должна стремиться к радиусу пятна нагрева.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хайбуллин И. Г., Штырков Е. И., Заринов М. М. Лазерный отжиг имплантированных полупроводников // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1981. Т. 45. № 8. С. 1464–1473.
2. Веденов А. А., Гладуш Г. Г. Физические процессы при лазерной обработке материалов. М.: Энергоатомиздат, 1985. 206 с.
3. Саночкин Ю. В. Термокапиллярная конвекция в тонком слое жидкости, локально нагреваемом сверху // ПМТФ, 1983. № 6. С. 134–137.
4. Саночкин Ю. В., Тухватуллин Р. С., Филиппов С. С. Численное моделирование термокапиллярной конвекции в слое жидкости при локальном нагреве ее свободной поверхности // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 4. С. 108–113.
5. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 699 с.
6. Levich V. G., Krylov V. S. Surface-tension-driven phenomena // Ann. Rev. Fluid Mech. 1969. V. 1. P. 302–303. Palo-Alto, Cal.
7. Пшеничников А. Ф., Токменина Г. А. Деформация свободной поверхности жидкости термокапиллярным движением // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. № 3. С. 150–153.
8. Pimputkar S. M., Ostrach S. Transient thermocapillary flow in thin liquid layers // Phys. Fluids. 1980. V. 23. № 7. P. 1281–1285.
9. Копбосынов Б. К., Пухначев В. В. Термокапиллярное движение в тонком слое жидкости // Гидромеханика и процессы переноса в невесомости. Свердловск: УНЦ АН СССР. 1983. С. 116–125.
10. de Socio L. M. Convection driven by non-uniform surface tension // Lett. Heat. and Mass Trans. 1979. V. 6. P. 375–383.
11. Sen A. K., Davis S. H. Steady thermocapillary flows in two-dimensional slots // J. Fluid Mech. 1982. V. 121. P. 163–186.
12. Бердников В. С., Забродин А. Г., Марков В. А. Тепловая гравитационно-капиллярная конвекция в прямоугольной полости // Гидромеханика и процессы переноса в невесомости. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1983. С. 136–151.

Москва

Поступила в редакцию
13.I.1988