

УДК 532.72:541.12

О СТАБИЛИЗАЦИИ НЕУСТОЙЧИВЫХ СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ ПРОТОЧНОГО ХИМИЧЕСКОГО РЕАКТОРА

КУРДЮМОВ В. Н., РЯЗАНЦЕВ Ю. С.

Явление множественности стационарных режимов проточного химического реактора изучалось во многих работах (см. например [1–3]). При изучении распределений температуры и концентраций внутри реактора неустойчивые стационарные режимы часто оказываются более предпочтительными, чем устойчивые. Так, например, при неустойчивых режимах возможны более оптимальные распределения температуры. По этой причине стабилизация неустойчивых режимов имеет большое значение и этому вопросу посвящен ряд работ [4–7]. В этих работах стабилизация организуется наложением обратной связи между входными параметрами, такими, как температура входной смеси, концентрация реагента или скорость протекания реагента через реактор и характеристиками внутри и на выходе из реактора. В [4–6] рассматривается реактор с продольным перемешиванием. Поток концентрации на входе в реактор связывается с температурой в некоторых точках внутри реактора. В [7] рассматривается стабилизация неустойчивого режима реактора вытеснения с интегральным учетом тепла. Скорость подачи реагирующей смеси изменяется в соответствии с отклонением температуры от значения, соответствующего стационарному распределению. Во всех работах показана возможность стабилизации неустойчивого режима при некоторых значениях параметров. В работе [6] указывается также, что без наличия стабилизирующей системы реализация даже некоторых устойчивых режимов может быть затруднительна.

При конструировании стабилизирующей системы важно влияние времени запаздывания на стабилизацию. При наличии времени запаздывания область параметров, в которой возможна стабилизация, сужается [7].

В данной работе рассматривается стабилизация неустойчивого режима проточного химического реактора с распределенными параметрами. Стабилизирующая система связывает скорость подачи вещества в реактор с отклонением концентрации на выходе от стационарного значения. В качестве простейшей реакции, при которой возможна неединственность стационарных режимов, выбрана изотермическая автокаталитическая реакция. Было найдено [3], что возможны три стационарных режима. В [8] изучалась их устойчивость. Было показано, что неустойчивым является средний режим, причем неустойчива только первая мода малых возмущений для широкого диапазона параметров.

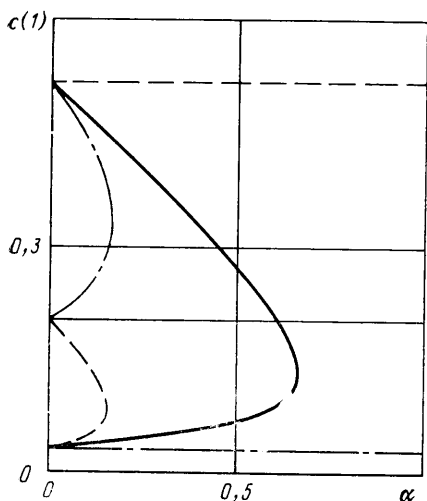
В безразмерных переменных уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} &= \frac{1}{Pe} \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \varphi(c) \\ - \frac{1}{Pe} \frac{\partial c}{\partial x} + u(c-1) &= 0, \quad x=0 \\ \frac{\partial c}{\partial x} &= 0, \quad x=1 \end{aligned} \quad (1)$$

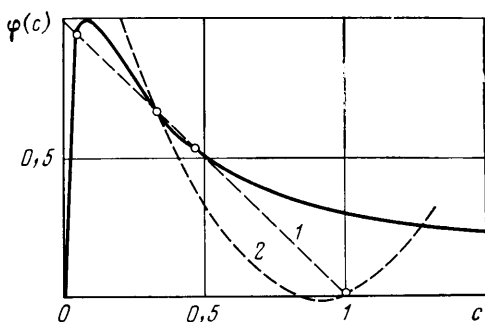
$$u = 1 - \alpha(c(1, t - \tau) - z_0), \quad \varphi(c) = k_1 c / (1 + k_2 c)^2$$

$$c = \frac{C}{C_0}, \quad x = \frac{X}{l}, \quad Pe = \frac{Ul}{D}, \quad k_1 = \frac{K_1 l}{U}, \quad k_2 = K_2 C_0, \quad t = \frac{Tl}{U}$$

где X — координата вдоль реактора, l — длина реактора, U — скорость протекания вещества в реакторе, D — коэффициент диффузии, C , C_0 — концентрации внутри реактора и на входе в реактор, K_1 , K_2 — константы кинетики, τ — безразмерное время запаздывания, T — размерное время, z_0 — безразмерная концентрация стабилизации, α — параметр, характеризую-



Фиг. 1



Фиг. 2

щий силу обратной связи. Пусть в отсутствие стабилизации система имеет три стационарных режима. Выберем в качестве z_0 одну из концентраций c_s на выходе из реактора.

Рассмотрим стационарные режимы системы (1) при различных α ($\partial c/\partial t = 0$). На фиг. 1 представлены результаты расчета зависимости $c(1)$ от α при различных значениях параметров. Сплошная, пунктирная и штрихпунктирная кривые соответствуют случаям, когда в качестве z_0 выбиралась концентрация $c_s(1)$ среднего, верхнего и нижнего режимов. $Pe = 0,3$, $k_1 = 50$, $k_2 = 12$ для всех кривых. При достаточно больших α стабилизируемый стационарный режим становится единственным.

Следует отметить что в принципе при любых α существует еще один стационарный режим с концентрацией на выходе из реактора большей 1 и отрицательной u . При $Pe = 0$ нахождение стационарных режимов сводится к решению нелинейного алгебраического уравнения $(1 - \alpha(c - z_0)) \times (1 - c) = \varphi(c)$. На фиг. 2 сплошная кривая — его правая часть. Пунктирные кривые 1 и 2 соответствуют $\alpha = 0$ и $\alpha \neq 0$ левой части. При достаточно больших α наклон становится такой большой, что для $0 < c < 1$ возможно только одно решение. Для всех $\alpha > 0$ при $c > 1$ также существует корень. Однако данный режим нефизичен и в дальнейшем рассматриваться не будет.

Далее будем исследовать стабилизацию среднего неустойчивого режима и под z_0 понимать $c_s(1)$ для этого режима.

Линеаризуем систему (1) около $c_s(x)$

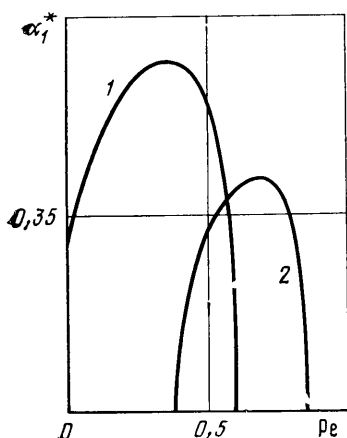
$$c = c_s(x) + \varepsilon \Phi(x) \exp(-\lambda t), \quad \varepsilon \ll 1$$

Для Φ и λ получаем спектральную задачу. Так как задача линейна по Φ , то выберем нормировку $\Phi(1) = 1$:

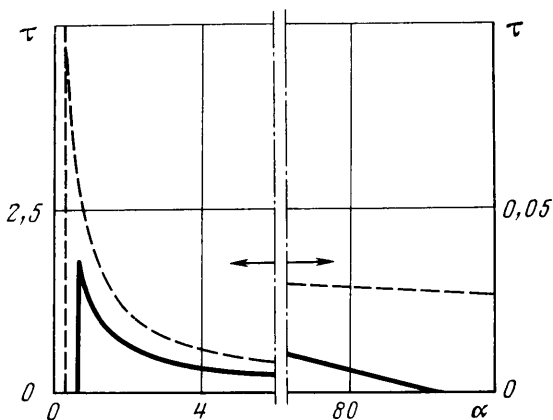
$$\begin{aligned} -\lambda \Phi + \Phi' - \alpha c_s'(x) e^{\lambda x} &= \frac{1}{Pe} \Phi''(x) - \varphi'(c_s) \Phi \\ -\frac{1}{Pe} \Phi'(0) + \Phi(0) - \alpha(c_s(0) - 1) e^{\lambda x} &= 0 \\ \Phi'(1) &= 0, \quad \Phi(1) = 1 \end{aligned} \quad (2)$$

где штрих — дифференцирование.

Для нахождения спектра при конечных Pe уравнение (2) решалось численным методом стрельбы с правого конца совместно со стационарным уравнением (1). Пристрелочным параметром было λ .



Фиг. 3



Фиг. 4

Случай $\tau=0$. Уравнение (2) при $\alpha=0$ полностью совпадает с задачей, рассмотренной в [8], и имеет бесконечный счетный действительный спектр возрастающих с номером чисел λ_n , $n=1, \dots, \infty$. Как уже отмечалось в [8], отрицательно только первое собственное значение λ_1 . С увеличением α λ_1 смещается вправо и при некотором α_1^* пересекает ноль. Второе собственное число λ_2 смещается влево, при $\alpha=\alpha_2^* > \alpha_1^*$ сливается с λ_1 и образует комплексно-сопряженную пару собственных чисел. При дальнейшем увеличении α действительная часть их убывает и при $\alpha=\alpha_3^*$ они пересекают комплексную ось. Стабилизируемый стационарный режим становится снова неустойчивым. Далее с увеличением α действительная часть комплексно-сопряженной пары продолжает убывать и неустойчивость увеличивается.

Следующая пара λ_3 и λ_4 также сливается, образует комплексно-сопряженную пару и при некотором α , большем α_3^* , пересекает мнимую ось. Эволюция следующих собственных чисел не прослеживалась.

Случай $\tau > 0$. Как видно из (2), если первое собственное значение пересекло 0 при $\alpha=\alpha_1^*$, то значение α_1^* не зависит от τ . (Если слияние λ_1 и λ_2 происходит в точке $\lambda_* > 0$.) Действительно, значение α_1^* , при котором $\lambda=0$, должно удовлетворять уравнению, не содержащему τ . Образование комплексно-сопряженной пары и пересечение ею комплексной оси в этом случае происходит при меньших α , чем при $\tau=0$.

На фиг. 3 представлены зависимости α_1^* от Re . Кривые 1 и 2 соответствуют $k_1=50$, $k_2=12$ и $k_1=50$, $k_2=11,5$. В первом случае множественность стационарных режимов возможна при $0 < Re < 0,59$, во втором — при $0,39 < Re < 0,76$. Из графиков видно, что поведение α_1^* от Re немонотонно, имеет максимум и при стремлении Re к значению Re_c , при котором происходит изменение числа стационарных состояний, α_1^* стремится к нулю.

На фиг. 4 в переменных α — τ представлены области, в которых возможна стабилизация неустойчивого режима. Для значений параметров $Re=0,5$, $k_1=50$, $k_2=12$ область стабилизации ограничена сплошными кривыми. При $\tau > 0$ интервал α , для которых возможна стабилизация, ограничен и с увеличением τ резко сужается.

Рассмотрим случай реактора полного перемешивания ($Re=0$). Аналогичное уравнение рассматривалось в [9]. Условием на спектр будет

$$\lambda = \lambda_1 + \alpha(1 - c_s) \exp(\lambda \tau) \quad (3)$$

где $\lambda_1 = 1 + \varphi'(c_s) < 0$ (стационарный режим неустойчив). При $\tau=0$ (3) будет иметь только один действительный корень, который становится положительным при $\alpha > |\lambda_1|/(1 - c_s)$. При $\tau > 0$ это уравнение имеет бесконечное счетное число комплексных корней с возрастающей с номером дей-

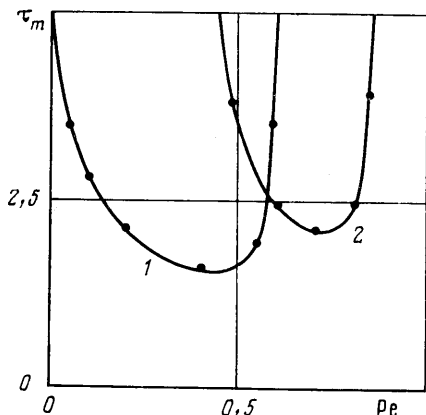
ствительной частью. Пусть $\lambda = x + iy$. Тогда (3) эквивалентно системе

$$x = \lambda_1 + \alpha(1 - c_s)e^{\tau x} \cos \tau y, \quad y = \alpha(1 - c_s)e^{\tau x} \sin \tau y$$

При $\alpha = 0$ система имеет один корень $x = \lambda_1$, $y = 0$, а все другие уходят на бесконечность. С увеличением α x увеличивается и пересекает ноль при $\alpha_1^* = |\lambda_1|/(1 - c_s)$. Можно показать, что слияние первого и второго λ и образование комплексно-сопряженной пары будет при $\alpha = \alpha_2^* = \exp(-1 - \tau \lambda_1)/\tau(1 - c_s)$. Пересечение комплексной оси комплексно-сопряженной пары произойдет на кривой в переменных $\alpha - \tau$, выражаемой уравнением

$$\tau = \arccos(|\lambda_1|/\alpha(1 - c_s))/\sqrt{\alpha^2(1 - c_s)^2 - \lambda_1^2} \quad (4)$$

Из (5) следует, что максимальное время запаздывания равно $\tau_m = |\lambda_1|^{-1}$. На фиг. 4 пунктирными кривыми ограничена область возможной стабилизации при $\text{Re} = 0$, $k_1 = 50$, $k_2 = 12$. В отличие от случая конечных Re кривая (4) не пересекает ось $\tau = 0$, а стремится к ней как $\tau \sim \alpha^{-1}$.



Фиг. 5

На фиг. 5 представлена зависимость максимального времени стабилизации τ_m от Re . Кривые 1 и 2 соответствуют тем же значениям k_1 и k_2 , что и на фиг. 3. При стремлении Re к значениям, при которых стационарный режим становится единственным, τ_m стремится к бесконечности. Из (4) следует, что при $\text{Re} = 0$ τ_m точно равно $|\lambda_1|^{-1}$, т. е. обратной величине модуля первого собственного числа в отсутствие стабилизирующей системы. Зависимость λ_1 от параметров изучалась в [8]. На фиг. 5 точка-

ми отмечены величины $|\lambda_1|^{-1}$ для конечных Re . Видно, что τ_m и $|\lambda_1|^{-1}$ хорошо согласуются. Разница составляет менее 2%. Были проведены сравнения τ_m и $|\lambda_1|^{-1}$ для других значений k_1 и k_2 , вплоть до $k_1 = 200$. Ошибка в аппроксимации τ_m составила не более 5%.

Таким образом исследована возможность стабилизации неустойчивого режима проточного химического реактора с перемешиванием при помощи наложения обратной связи между концентрацией реагента на выходе из реактора и скоростью протекания вещества через реактор. Показано, что при конечных Re и времени запаздывания $\tau = 0$ сила обратной связи α должна быть ограничена в отличие от случая $\text{Re} = 0$. Исследовано также влияние времени запаздывания на стабилизацию. Для возможности стабилизации τ не должно превышать некоторое максимальное τ_m , которое хорошо аппроксимируется (с точностью до 5%) $|\lambda_1|^{-1}$ обратной величиной модуля первого собственного числа для стационарного режима без стабилизирующей системы.

В заключение следует отметить, что все сделанные в статье выводы об устойчивости стабилизированного стационарного режима полностью подтверждаются непосредственным численным расчетом уравнений (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Hlavaček V., Hofmann H. Steady state axial heat and mass transfer in tubular reactors. An analysis of the uniqueness of solutions // Chem. Engng Sci. 1970. V. 25. № 1. P. 173.
2. Берман В. С., Рязанцев Ю. С., Шевцова В. М. О числе стационарных режимов одномомерного проточного химического реактора с реакцией типа автокаталитической // Физика горения и взрыва. 1983. Т. 19. № 1. С. 56–60.

3. Рязанцев Ю. С., Шевцова В. М. О числе стационарных режимов адиабатического проточного химического реактора с автокаталитической реакцией // Физика горения и взрыва. 1984. Т. 20. № 5. С. 86–89.
4. Бучин В. А. Стабилизация неустойчивого режима работы химического реактора как объекта с распределенными параметрами с помощью сосредоточенных систем управления // Изв. АН СССР. МЖГ. 1977. № 6. С. 4–16.
5. Бучин В. А. Стабилизация неустойчивого режима работы химического реактора с рециклом как объекта с распределенными параметрами посредством сосредоточенных систем управления // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 3. С. 11–24.
6. Бучин В. А., Ларин О. Б. Изучение устойчивых и неустойчивых режимов работы химического реактора // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 3. С. 54–59.
7. Гупало Ю. П., Новиков В. А., Рязанцев Ю. С. О стабилизации неустойчивого стационарного режима работы реактора вытеснения с интегральным учетом тепловыделения // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 4. С. 678–687.
8. Берман В. С., Курдюмов В. Н., Рязанцев Ю. С. Об устойчивости стационарных режимов изотермического проточного химического реактора // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 2. С. 179–182.
9. Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971. 296 с.

Москва

Поступила в редакцию
28.XII.1987